

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE
AUTOMÓVEL**

JOÃO PEDRO QUEROGA CALDAS

**METODOLOGIA PARA A OBTENÇÃO DA CURVA DE DISPERSÃO EM
FUNÇÃO DA RAZÃO DE FREQUÊNCIAS PARA TUBOS DE ARMAS
AUTOMÁTICAS**

**RIO DE JANEIRO
2021**

©2021

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro – RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmар ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

Queroga Caldas, João Pedro.

METODOLOGIA PARA A OBTENÇÃO DA CURVA DE DISPERSÃO EM FUNÇÃO DA RAZÃO DE FREQUÊNCIAS PARA TUBOS DE ARMAS AUTOMÁTICAS / João Pedro Queroga Caldas. – Rio de Janeiro, 2021.

47 f.

Orientador(es): Achille Arantes Bassi.

Projeto de Final de Curso (graduação) – Instituto Militar de Engenharia, Engenharia Mecânica e de Automóvel, 2021.

1. Armas Automáticas. 2. Curva de Dispersão. 3. Análise Modal. 4. Elementos Finitos. 5. Tubos e canos de armamentos. i. Arantes Bassi, Achille (orient.)
ii. Título

JOÃO PEDRO QUEROGA CALDAS

METODOLOGIA PARA A OBTENÇÃO DA CURVA DE DISPERSÃO EM
FUNÇÃO DA RAZÃO DE FREQUÊNCIAS PARA TUBOS DE ARMAS
AUTOMÁTICAS

Projeto de Final de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica e de Automóvel do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica e de Automóvel.

Orientador(es): Achille Arantes Bassi, D.Sc.

Rio de Janeiro

2021

JOÃO PEDRO QUEROGA CALDAS

**METODOLOGIA PARA A OBTENÇÃO DA CURVA DE
DISPERSÃO EM FUNÇÃO DA RAZÃO DE
FREQUÊNCIAS PARA TUBOS DE ARMAS
AUTOMÁTICAS**

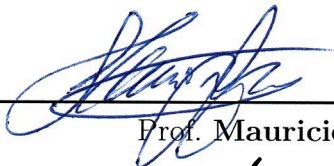
Projeto de Final de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica e de Automóvel do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica e de Automóvel.

Orientador(es): Achille Arantes Bassi.

Aprovado em Rio de Janeiro, 26 de Novembro de 2021, pela seguinte banca examinadora:



Prof. Achille Arantes Bassi - D.Sc. IME



Prof. Mauricio Gruzman - D.Sc. IME



Prof. Ademir Tomaz - M.Sc. IME

Rio de Janeiro

2021

Um problema está, de início, resolvido, se está bem colocado.
- *Otto Maria Carpeaux*

AGRADECIMENTOS

No princípio, criou Deus os céus e a terra.

–Gênesis 1:1–

David Eagleman dizia que o homem experimenta a morte pela segunda vez no dia em que é esquecido. Portanto, para que sejam lembradas, registro aqui - neste pequeno infinito - a vida das pessoas que, ora na valsa, ora no abismo, tenham agraciado meu espírito. Logo, dedico esta humilde peça àqueles que deixaram tais marcas pelo meu caminho, pois só Deus há de saber o que seria de mim sem eles.

Para minha amada mãe: Magda, eterna senhorita cuja tamanha bondade sinto jamais ter sido merecedor. Para meu pai: Wellington em seus méritos. Para minha querida Irmã: Luiza, que tanta falta sinto, mas sei que toma bom caminho. Para minha adorável avó: Ina, que cuidou de mim na infância com todo seu ser. Para minhas tias: Bá e Soraya, as quais desprenderam imensurável amor por mim quando a vida me servira de figos à cinzas. Para toda minha família – de sangue ou não – a qual, sou eternamente grato de dizer, não caberiam em tão poucas linhas.

Aos meus grandes colegas atuais de turma, que sei ter para até o fim de meus dias. Pois, o que seria dos homens sem ter em outro a paz da irmandade, que acolhe e nutre aqueles quando mais precisam. Dedico esta passagem a meus maiores amigos: Gabriel Carvalho, Matheus Caracas Veras, João Vitor Tavares Paz, Lucas Alexandre Gonçalvez Lima, Paulo Vitor Cardoso, Roberto Moura, Guilherme Dufflis, Maria Pia Apestegui e Raphael Melo de Araujo.

Aos Mestres maiores que extraíram forças que nunca, sequer fantasiei ter. Professor Luciano, que ensinou-me uma das maiores lições de minha vida: o sonho dos homens transcende a razão. Professor Rodrigo Cardoso Paula, o maior mentor que certamente terei nesta vida e em tantas outras que me fossem dadas. Acima de tudo, um amigo e homem extraordinário cuja memória cultivo com todo carinho ainda que, agora, esteja distante. Ao Professor Moacyr Henrique (sei que Deus está convosco), que tutelou com maestria mais do que a arte da engenharia e seu pai Hugo Roquette (sei que Deus está convosco), que dispensa apresentações.

Agradeço também aos bons homens do Instituto Militar de Engenharia. Aos Professores: TC R/1 Egydio Carvalho, Cel R/1 Júlio (sei que Deus está convosco), Maj Gustavo Simão e Maj Achille Arantes; minha passagem pelo Instituto seria incompleta se não os tivesse conhecido.

"Sempre avante, Engenheiros sem abandono!"

RESUMO

De acordo com a literatura, a dispersão, i.e. incerteza na trajetória balística do projétil, está correlacionada com a cadência de tiro da arma automática, ou seja, com a taxa de tiros por unidade de tempo de uma arma que dispara rajadas. Com o intuito de averiguar a fidedignidade dos resultados presentes na literatura, o presente trabalho adapta modelagens anteriores e propõe uma metodologia para a obtenção da curva qualitativa da dispersão em função da cadência de tiro. Logo, para tal, o tubo foi modelado como uma viga de Bernoulli-Euler, sendo seu modelo resolvido no espaço pelo método dos elementos finitos e no tempo por um método de Runge-kutta. Toda a implementação numérica foi realizada em *Matlab*® e os resultados obtidos são comparados com aqueles presentes na literatura de referência para o projeto de tubos de armamento.

Palavras-chave: Armas Automáticas. Curva de Dispersão. Análise Modal. Elementos Finitos. Tubos e canos de armamentos.

ABSTRACT

According to the literature, dispersion, i.e. uncertainty in the ballistic trajectory of the projectile, is correlated with the rate of fire of an automatic weapon, that is, with the rate of fire per unit of time of a weapon that fires bursts. In order to verify the reliability of the results present in the literature, this work adapts previous models and proposes a methodology for obtaining the qualitative curve of dispersion as a function of rate of fire. Therefore, for this purpose, the tube was modeled as a Bernoulli-Euler beam, its model being solved in space by the finite element method and in time by a Runge-kutta method. The entire numerical implementation was performed in *Matlab*® and the results obtained are compared with those present in the reference literature for the design of armament tubes.

Keywords: Automatic Weapons. Dispersion Curve. Modal Analysis. Finite Elements. Weapons tubes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Foto: tubo de alma lisa (esquerda) e tubo de alma raiada (direita) (1, 2)	16
Figura 2 – Representação das relações entre exatidão e precisão com respeito à dados amostrais.	17
Figura 3 – Reprodução adaptada da dispersão em função de razão de frequências como consta na AMCP 706-252 (3)	18
Figura 4 – Viga flexível engastada sujeita a passagem da munição (4).	25
Figura 5 – Exemplo de histogramas viesados, a direita (verde) e a esquerda (vermelho) em um histograma simétrico (azul).	27
Figura 6 – Elemento de viga e variáveis de interesse.	30
Figura 7 – Ilustração do método de superposição das matrizes dos elementos para obtenção das matrizes globais	31
Figura 8 – Relação entre a amplitude de u_n e θ_n no domínio da frequência em regime permanente.	39
Figura 9 – Relação entre a amplitude de u'_n e θ'_n no domínio da frequência em regime permanente.	39
Figura 10 – Gráfico original da dispersão em função de razão de frequências da AMCP 706-252 (3)	41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela do primeiro grupo de hipóteses	28
Tabela 2 – Tabela do segundo grupo de hipóteses	28
Tabela 3 – Tabela de geometria, propriedades e carregamento	37
Tabela 4 – Tabela de ganhos para convergência via acréscimo de elementos.	38
Tabela 5 – Comparação entre amplitude das variáveis nos regimes	40
Tabela 6 – Comparação entre a curva original da AMCP 706-252 e curvas obtidas.	41

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APFSDS	Armour Piercing Fin Stablished Discarding Sabot
EF	Elemento Finito
MEF	Método dos Elementos Finitos
PVI	Problema de Valor Inicial
ED	Equação Diferencial
CC	Condições de Contorno
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
GDL	Graus de liberdade

LISTA DE SÍMBOLOS

A_u	Amplitude de excitação do carregamento posta na boca do armamento em respeito a u .
$A(x)$	Área da seção transversal da viga no domínio x .
A_{theta}	Amplitude de excitação do carregamento posta na boca do armamento em respeito a θ .
C	Matriz amortecimento.
$[C]_E$	Matriz amortecimento de um elemento.
$[C]_{ij Ek}$	Elemento i,i da matriz de amortecimento do elemento k -ésimo da viga.
$[C]_G$	Matriz global de amortecimento.
E	Modulo de elasticidade do material da viga.
f_{fire}	Frequência de disparo
$F(t)$	Tensor de forçamentos no domínio t .
$f_{natural}$	Frequência natural do 1º modo de vibração
g	Gravidade local.
I	Momento de inércia de massa.
K	Matriz rigidez.
$[K]_E$	Matriz rigidez de um elemento.
$[K]_{ij Ek}$	Elemento i,i da matriz de rigidez do elemento k -ésimo da viga.
$[K]_G$	Matriz global de rigidez.
l	Comprimento do elemento finito.
L	Comprimento total do tubo.
L_{target}	Distância longitudinal da boca do armamento até o alvo.
M	Matriz inércia.
$[M]_E$	Matriz inércia de um elemento.

$[M]_{ij \ E_k}$	Elemento i,j da matriz de inércia do elemento k -ésimo da viga.
$[M]_G$	Matriz global de inércia.
n	Número de elementos finitos na viga.
$q(x)$	Carga aplicada na viga no domínio x .
R_{Ratio}	Amplitude da dispersão em dada razão de frequências.
$Ratio_f$	Razão de frequências.
t	tempo.
u	Movimento transversal de um nó.
$u(t)$	Tensor de deslocamentos no domínio t .
$u(x, t)$	Deflexão da linha de centro da viga em função da distância e do tempo.
V_{prj}	Velocidade do projétil.
w_{fire}	período da força de excitação em razão da frequência de disparo.
x	Distância longitudinal.
$x_m(t)$	Posição da carga móvel em função do tempo.
α	Coefficiente de Rayleigh para inércia.
β	Coefficiente de Rayleigh para rigidez.
θ	Movimento angular de um nó.
μ	Valor médio da amostra.
μ_{Ratio}	Valor médio de dispersão em dada razão de frequências.
ρ	Massa específica do material da viga.
σ	Desvio-padrão da amostra.
σ_{Ratio}	Desvio-padrão da dispersão em dada razão de frequências.
Ω	Dispersão.
Ω_{Ratio}	Amostra de dispersão em dada razão de frequências.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	INTRODUÇÃO AO TEMA	15
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
1.3	MOTIVAÇÃO	22
1.4	OBJETIVOS	23
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	23
2	MODELAGEM	24
2.1	VIGA ESTRUTURAL DE EULER-BERNOULLI	24
2.2	DINÂMICA DO SISTEMA	25
2.3	AMORTECIMENTO PROPORCIONAL DE RAYLEIGH	25
2.4	BALÍSTICA INTERNA	26
2.5	ANÁLISE DA DISPERSÃO	26
3	METODOLOGIA	29
3.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	29
3.1.1	MATRIZES INÉRCIA E RIGIDEZ DE UM ELEMENTO FINITO	29
3.1.2	MATRIZES INÉRCIA E RIGIDEZ GLOBAIS	31
3.1.3	AMORTECIMENTO GLOBAL COM COEFICIENTES DE RAYLEIGH	32
3.1.4	ANÁLISE MODAL	32
3.1.5	ADEQUAÇÃO ÀS CONDIÇÕES DE CONTORNO	33
3.2	IMPLEMENTAÇÃO DOS EFEITOS ENVOLVIDOS.	34
3.2.1	INCLUSÃO DO PESO DISTRIBUÍDO DA VIGA	34
3.2.2	FORÇA PERIÓDICA NA PONTA DO ARMAMENTO	35
3.3	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA	36
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	37
4.1	DADOS DE ENTRADA	37
4.2	TESTE DE CONVERGÊNCIA	37
4.3	VARIÁVEIS DE INTERESSE E AMPLITUDE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	38
4.4	COMPARAÇÃO COM A AMCP 706-252	40
5	CONCLUSÃO	43
	REFERÊNCIAS	44

1 INTRODUÇÃO

Conforme a AMCP 706-252, os tubos dos armamentos estão sujeitos a diversos fenômenos adversos, que, quando não prejudicam seu desempenho, prejudicam sua vida útil. Esses fenômenos podem ter causas mecânicas, térmicas ou químicas, e o trabalho focará num fenômeno mecânico que acomete as armas que realizam disparos em rajadas.

Portanto, para armas de fogo, é conveniente conduzir estudos para se evitar efeitos indesejados na precisão e exatidão de armamentos. Em específico, o fenômeno adverso da dispersão em armamentos automáticos decorrente da cadência de tiro.

1.1 Introdução ao Tema

Para auxiliar o entendimento do documento, é proposta uma breve familiarização com algumas das nomenclaturas utilizadas e posterior contextualização do trabalho. Logo, esta secção destina-se ao cumprimento desses quesitos.

Quanto o calibre, os armamentos são classificados em (5):

- Armamento leve: é designado para armas que possuem calibre inferior a .60 polegadas.
- Armamento pesado: é designado para armas que possuem calibre superior a .60 polegadas. Comumente atribuído às armas que, por inviabilidade de transporte por infantaria, precisam ser montadas em suportes sob rodas ou instaladas em veículos.

A metodologia proposta é aplicável tanto para armamento leve como pesado, não havendo restrição quanto ao domínio. Podendo ser empregada em uma gama de armamentos desde que os dados de entrada necessários estejam disponíveis.

A despeito da nomenclatura usual no Brasil usar cano para armamento leve e tubo para armamento pesado, a metodologia proposta mais adiante é aplicável para ambos. No texto usar-se-á o termo "tubo" para se referir indistintamente a canos e tubos. A denominação "alma" para a superfície interna do tubo, por onde passa o projétil durante a balística interna também é aqui utilizada.

Portanto, há, ainda, outra distinção importante por enunciar: a presença, ou não, de raias na alma do tubo do armamento. Os tubos que tem estrias helicoidais na superfície interna, são denominados tubos de alma raiada. As raias servem para provocar um rotação do projétil em torno de seu eixo, proporcionando estabilidade giroscópica em sua trajetória durante seu voo ao alvo. O ganho em estabilidade aerodinâmica por sua vez, resulta em

um aumento substancial da exatidão e precisão quando comparados aos tubos de alma lisa.

No passado, as armas mais rudimentares eram feitas, quase que exclusivamente, com tubos simples de metal, sem nenhuma estrutura interna muito complexa, como bacamartes, mosquetes e espingardas. Possuíam pouco alcance e precisão, o tubo destas armas são denominados de "alma lisa" ou *smooth bore* (6). Ao final do século XIX, foi aprimorada a tecnologia de refino da precisão nos disparos, um processo, conhecido como *rifling* (presente desde os atiradores norte americanos até os *Jaegers* alemães)(6).

O raiamento do tubo é utilizado em armas que necessitam de precisão, são exemplos – da classe de armamentos leves – os fuzis, carabinas, pistolas e os revólveres. O tubo destas armas são denominados de "alma raiada" ou *rifled bore* (6). A Figura 1 ilustra a diferença entre os tubos de alma lisa e de alma raiada.

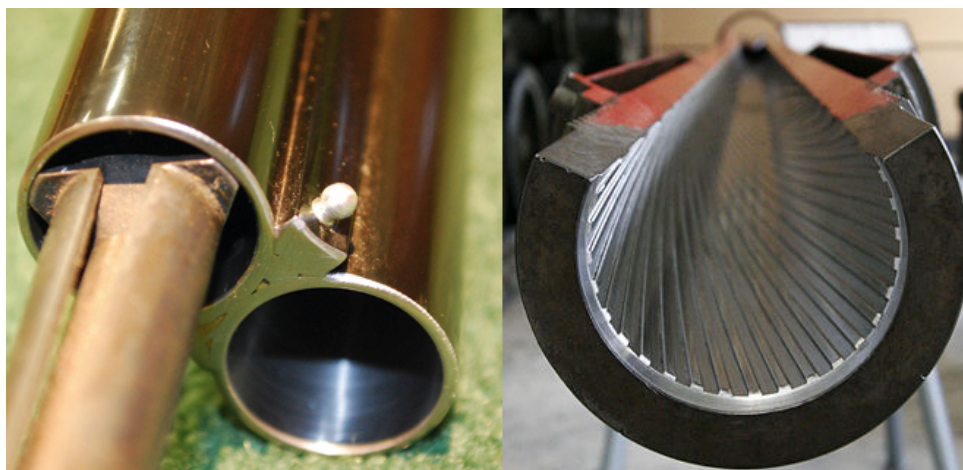


Figura 1 – Foto: tubo de alma lisa (esquerda) e tubo de alma raiada (direita) (1, 2)

Uma vez mencionado o termo "exatidão", é razoável discorrer brevemente sobre duas importantes definições: exatidão e precisão.

- Exatidão: é o grau de proximidade entre as medidas tomadas com o valor alvo.
- Precisão: é o grau de proximidade entre as próprias medidas tomadas, ou seja, entre resultados na reprodução ou repetição de uma medida sob as mesmas condições.

A Figura 2 demonstra qualitativamente os conceitos acima descritos para histogramas de dados amostrais.

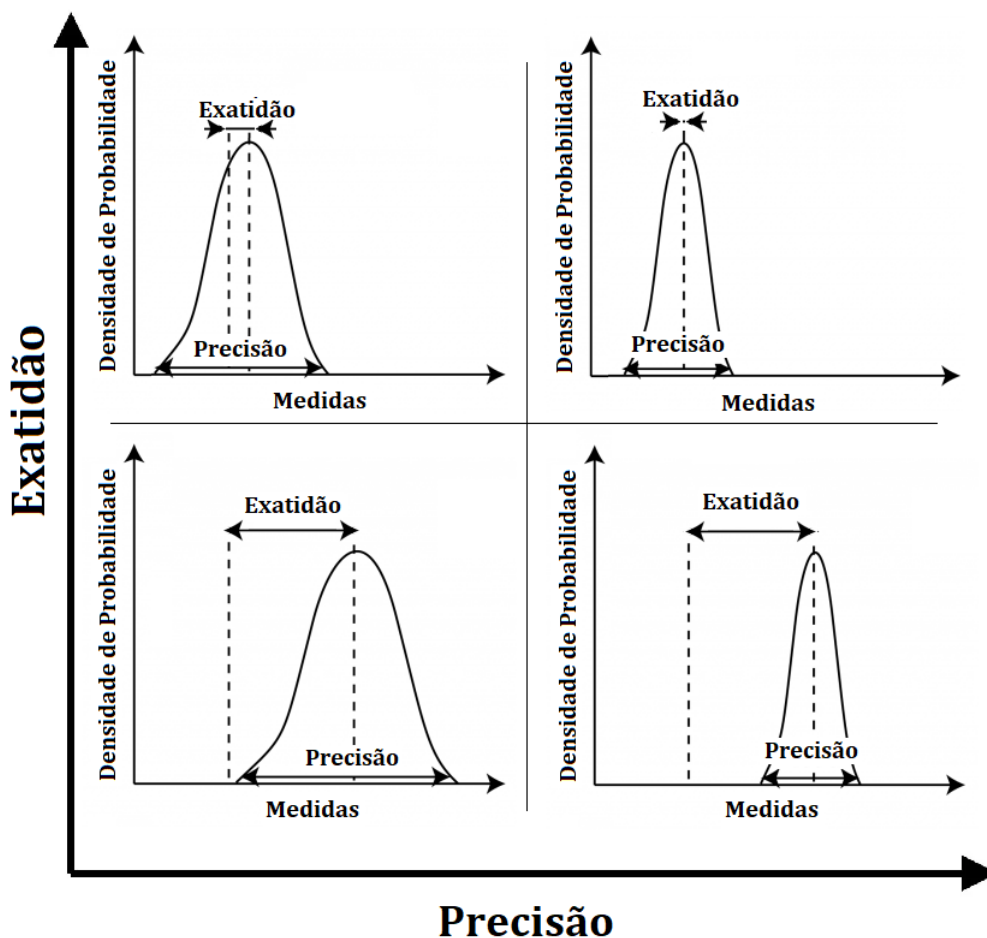


Figura 2 – Representação das relações entre exatidão e precisão com respeito à dados amostrais.

Por todo o processo de efetuação do tiro, esforços de diversas naturezas recaem, ainda que parcialmente, sobre o tubo. Sendo portanto esperadas respostas diferentes de acordo com a solicitação, pois dependem das condições de uso, ou seja, se o armamento opera em regime automático ou intermitente. Estes esforços, ainda que sutis, resultam em deflexões por toda extensão do tubo do armamento. Com efeito, um disparo qualquer do regime permanente é afetado pelo anterior e também afeta o próximo pelas leves deformações no tubo do armamento.

A literatura de referência que versa sobre o projeto de tubos de armamentos, inclusive automáticos leves, quanto à dispersão de tiros é a AMCP 706-252.

Na AMCP 706-252, em seu quarto capítulo, são enunciados os efeitos adversos causados ao tubo quando submetido aos repetidos esforços (3). Sendo posta ênfase na integridade estrutural e de desempenho ocasionado pela vibração em armamentos leves e de alta cadência, pois estes sofrem muito mais com as solicitações cíclicas.

No capítulo seguinte da AMCP 706-252, são propostas soluções para atenuar os fenômenos indesejados.

Para atenuar os efeitos adversos causados pela vibração de armas automáticas, a AMCP 706-252 recomenda limitar a cadência de tiro a frequências naturais tais que a razão de frequências mínima seja 3,5. Caso isso não seja possível, deve-se alterar características do tubo (3).

Finalmente, ainda em seu quinto capítulo, é apresentado um resultado quanto a dispersão em função da razão de frequências como consta na Figura 3. O resultado é trazido à amcp do trabalho contido em (7), que não foi localizado. No entanto, a recomendação é apresentada sem que sejam apresentados aspectos importantes, tais como: seu processo de obtenção, hipóteses e limitações de seu uso.

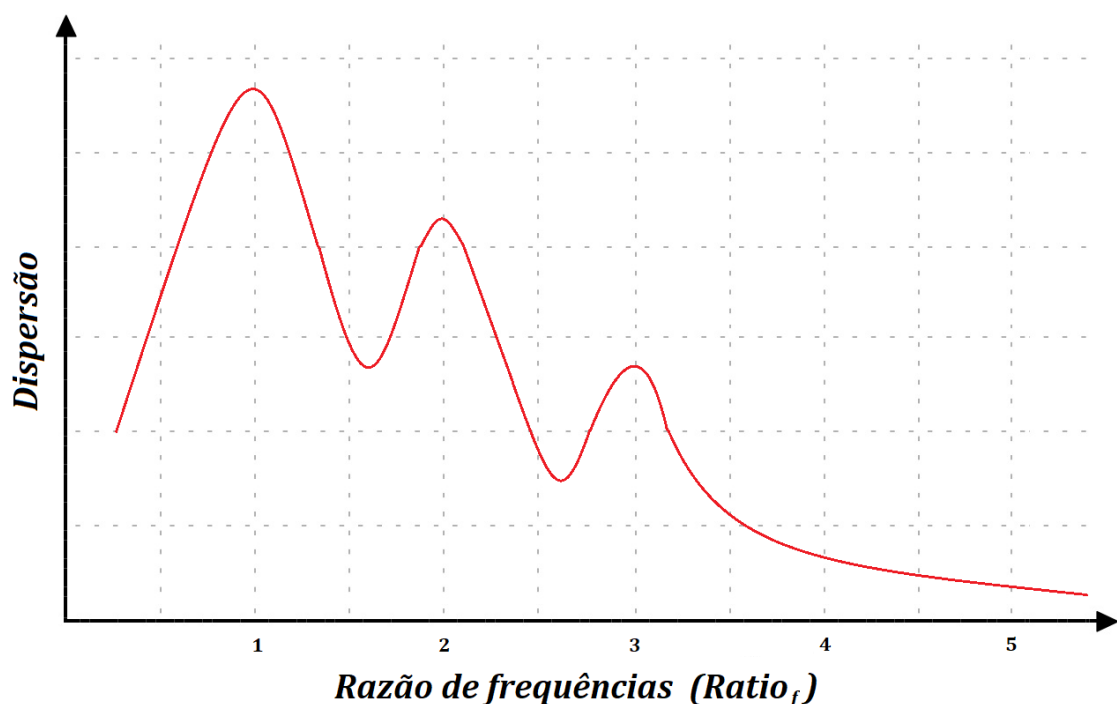


Figura 3 – Reprodução adaptada da dispersão em função de razão de frequências como consta na AMCP 706-252 (3)

A Figura 3, é utilizada para embasar o projeto de armamentos. Nela a recomendação é mediante uso da relação entre a 1^o frequência natural e a cadência de tiros a ser empregada na operação.

1.2 Revisão Bibliográfica

Em (8), datado de 1951, foram propostas as primeiras soluções analíticas do problema e posteriores resultados experimentais para validação do modelo.

Em (9), com auxílio do MEF, foi modelado um armamento automático de 30 mm. Os resultados apontam que as excitações no tubo da arma foram maiores após a saída do projétil que durante a sua passagem pelo tubo. Analogamente, em (10), outro MEF foi utilizado ao simular o tubo de um canhão 120 mm durante o tiro; auxiliado pelo *software* ANSYS®, foram obtidos dados sobre as forças de recuo e movimento do projétil. Ambos estudos fizeram uso das forças de recuo, deslocamento dos gases de queima e o deslocamento do projétil em seus modelos.

Em (11), são estudadas três fontes de vibração oriundas do disparo adotando o MEF como método, sendo intensificadas com a curvatura inicial do tubo em razão do próprio peso. As fontes de vibração são: às forças impostas pelo sistema de recuo, pela onda de pressão assimétrica causada pela queima do propelente e pelo deslocamento do projétil pela alma. Concluindo ainda que, dentre as três, as causadas pelo recuo são as mais relevantes em baixas frequências e as do deslocamento do projétil, significativas em altas frequências.

Em (12), são resolvidos problemas por uma família de formulações Runge-Kutta, nele é estabelecido que a formulação fornece zonas de estabilidade e convergência já eficientes para os termos de quarta e quinta ordem. Denotando, numericamente, resultados satisfatórios ao tratar elevados graus de liberdade dentro de aproximações em ordens menores sem perda substancial de precisão ou, ainda, até mesmo diminuindo o tempo de processamento para a conversão em equacionamentos simples. Tal rotina apresenta forte potencial quando implementada em problemas que envolvam sistemas lineares, mesmo que sejam compostos por muitos graus de liberdade.

Em (13), foi modelada uma viga Bernoulli-Euler sujeita ao deslocamento de um projétil móvel a velocidade constante utilizando o MEF, tendo sua estabilidade e a dinâmica avaliada quanto a influência da massa da viga na resposta da mesma, a conclusão é que há de fato distorções quando a massa da viga for muito superior ao da carga móvel.

Em (14), atesta-se que a força de atrito pode ser tratada como uma constante e sugere uma aproximação da energia perdida como função da energia total. No entanto, para cada instante, a energia perdida é uma fração diferente da energia total, com a força de resistência contra o projétil possuindo comportamento distinto em cada coordenada ao longo do tubo do armamento.

Em (15), um sistema canhão-torre de carro de combate é analisado durante o disparo. A modelagem como um corpo rígido é feita para o tubo junto ao sistema hidráulico torre. Para o batimento balístico no interior do tubo, quanto ao comportamento dinâmico do tubo na direção vertical, o autor tem como conclusão que a simples folga do sistema de elevação do canhão resulta em oscilação da boca do tubo da arma. O efeito último é grave perda na precisão do disparo.

Em (16), é proposto um MEF aliado à uma inteligência artificial. O modelo consiste no tubo do armamento estar sujeito à um projétil de aceleração constante com o objetivo de estimar a deflexão da extremidade do tubo após o disparo, treinar inteligência artificial via algoritmo e torná-la capaz de prever o fenômeno para diferentes munições.

Em (17), a interação entre projétil e tubo durante o disparo em um canhão 105mm de alma lisa é modelado um problema de EF no *software* LS-DYNA®. A modelagem é feita ora com base em um corpo rígido, ora um corpo flexível. Analisando os seguintes: fenômeno de batimento interno do projétil e deflexão vertical do tubo, na hipótese de corpo flexível.

Em (18) é proposta uma fórmula de cálculo da força de atrito local através de uma modelagem da força de contato entre o projétil e o tubo da arma. Para tal, são utilizados o raio do tubo, o raio de giração do projétil e a pressão interna.

Em (4), foram modelados tubos flexíveis de armamentos pesados e suas vibrações decorrentes do disparo em conjunto com absorvedor passivo de vibrações. Baseado na teoria de vigas sujeitas à cargas móveis, com viga do tipo Bernoulli-Euler engastada, sujeita à uma carga móvel implementada para o carregamento dinâmico transiente, obtendo resultados satisfatórios. Enfatizou-se que o peso do tubo da arma tem grande influência nas vibrações decorrentes do deslocamento do projétil pela alma. No entanto, os modelos desenvolvidos negligenciam a rotação do projétil, ou seja, limita-se a armamentos de alma lisa. Foram também negligenciadas as vibrações geradas pelas forças do sistema de recuo e pelo deslocamento dos gases provenientes da queima do propelente ao longo do tubo.

Em (19), o autor faz uso do MEF para discretizar uma viga engastada, em formato de tubo, elaborando uma Calculadora Modal para determinar a velocidade angular, a frequência natural, os modos de vibração e o deslocamento da linha elástica desejados pelo projetista de um armamento. O modelo proposto teve seus resultados comparados ao do *software* ANSYS®, aproximando-se da solução exata de forma proveitosa apesar das hipóteses simplificadoras adotadas. Ademais, mostrou-se superior com resultados mais precisos do que a AMCP 706-252 que adotou o Método do Diagrama de Momentos Reduzidos (limitada pelo recursos computacionais então disponíveis). O autor faz a ressalva de que o Calculador Modal em tubos uniformes ou continuamente variável mostrou-se efetivo do que em perfis descontínuos. Um forte entrave, visto que a maioria dos tubos de armamentos de alta cadência de tiro possui algum tipo de descontinuidade. O eventual desvio é posto como matéria para tratamento futuro e não desconfigura, de pronto, o Calculador Modal apresentado como eficaz.

Em (20) o autor é mais abrangente ao considerar a possibilidade de variação do raio do tubo com a posição. Respalda no *software* PRODAS®, e novamente baseado em (21) para estipular força de resistência com testes experimentais realizados. Constatando de forma evidente a dificuldade de modelar a força de resistência para projéteis.

Ainda em (20), via problema inverso, utiliza-se da otimização de parâmetros recomendada em (22) para validar a implementação do modelo proposto por (22) com resultados consistentes com o *software* PRODAS[®], que por sua vez foi construído através do trabalho apresentado em (21), este último ideal para modelagem dinâmica de carregamento aplicado.

Em (23, 24, 25, 26, 27, 28) a carga móvel foi considerada uma massa em movimento, i.e. massa móvel através de soluções analíticas e adoção de massa móvel.

Em (29) é analisada a resposta de uma viga sujeita à passagem de uma massa móvel com velocidade constante. Foi utilizado o *software* de Elementos Finitos ADINA[®]. A solução utiliza um híbrido para a carga móvel, sendo então modelada tanto como força móvel quanto massa móvel. Incluídas as forças de inércia e de Coriolis, resultados obtidos diferiram da literatura em, no máximo, 12%. Foi constatada a influência do aumento na massa da carga móvel no deslocamento do ponto de máxima deflexão em direção ao que seria, por equivalência, a boca do armamento. No entanto, apesar do deslocamento, a amplitude em si não teve mudança significativa.

Em (30), utilizando-se de técnicas de elementos finitos e diferenças finitas em viga flexível, uma viga biapoiada sujeita a passagem de massa móvel é estudada. São consideradas as forças peso (decorrente da gravidade local), de inércia, de Coriolis e centrípeta decorrentes da massa móvel. Ambas passagens com velocidade constante e acelerada são consideradas no modelo proposto.

Por solução analítica e adoção de força móvel: em (31, 32, 33, 34, 35, 36) a carga móvel foi considerada como uma força móvel com velocidade constante. Para o efeito da velocidade da carga móvel, dados semelhantes foram observados, porém – diferentemente do efeito da massa – um aumento na velocidade incorria em aumento na amplitude máxima de oscilação da viga. No estudo, também foram analisadas as influências de cada componente da força transmitida à viga pela passagem da carga móvel, sendo que os resultados obtidos mostraram que, quando o modelo completo é considerado, a amplitude máxima de oscilação da viga aumenta.

Em (37) é apresentada uma análise através do MEF de vigas elásticas sujeitas a cargas móveis. A carga móvel é modelada inicialmente como uma força móvel determinada e posteriormente como sistema massa-mola-amortecedor, dotado de dois pontos de contato com a viga. Os resultados obtidos com os modelos foram comparados com a literatura, apresentando-se muito similares. O modelo fez uso do método de Runge-Kutta para integrar e obter a resposta dinâmica da solução das equações que governam o fenômeno.

Em (38), é utilizada a solução numérica pelo método da expansão nodal no cálculo da deflexão de uma viga de Timoshenko-Ehrenfest sujeita à uma carga móvel. A carga é modelada como uma massa móvel com a velocidade constante. O modelo anterior é então

comparado com modelo de viga Bernoulli-Euler; o autor apresenta como conclusão que o aumento na velocidade da carga móvel implica em maiores diferenças entre os modelos.

Em (39), a solução numérica proposta é chamada de resposta de elementos discretos de viga. Nesta abordagem, a viga é discretizada em elementos rígidos conectados por juntas. O objetivo final é comparar os resultados obtidos com demais *softwares* comerciais de elementos finitos.

Em (40), é feita a análise dinâmica de viga sujeita a carga móvel através do MEF ao modelar a carga móvel também como um EF, sendo esta última móvel. A carga móvel é trabalhada como massa móvel, com os efeitos da força gravitacional, inercial, de Coriolis e centrípeta considerados na força transmitida à viga, e subsequente validação. Posteriormente, ao analisar as respostas dinâmicas longitudinal e transversal, o autor constata grande diferença caso os efeitos inerciais da carga móvel sejam considerados.

Em (41), uma viga biapoiada sujeita a carga móvel com aceleração constante faz uso da abordagem de (40). É analisada o efeito da aceleração e massa da carga móvel em ambas respostas longitudinal e transversal da viga biapoiada em questão. Com alguns resultados semelhantes aos discutidos em (29). Nela, é enunciada uma relação entre a razão de massa entre carga móvel e viga com a perturbação que percorre a mesma. Recomendando-se não desprezar o efeito da massa em seu trajeto caso a razão entre massas não seja tão desprezível.

Em (42), o uso dos Elementos Finitos na discretização é empregado na modelagem de vigas e carga móvel com o objetivo de investigar a influência do número de elementos na resposta. Os modelos consistem de tratar a carga móvel como força móvel e sistema massa-mola-amortecedor que deslocasse ao longo da viga. Observa-se que os erros de maior magnitude ocorrem nos encontros dos nós e próximos aos suportes da própria viga. A conclusão magna dos autores é que o número de elementos finitos a serem utilizados em análises desta natureza deve ser entre duas a oito vezes maior que o número usado em análises estáticas.

1.3 Motivação

O fenômeno da dispersão em tubos de armamentos é um tema estudado por décadas, mas pouco detalhado em seus métodos. Uma vez posta ênfase na sua relação com a cadência de tiro, os armamentos automáticos sofrem entrave ainda maior, pois um disparo percorre o tubo já comprometido pelo anterior. Com efeito, certas características dimensionais também agravam este fenômeno adverso. Por exemplo, um tubo longo é acometido por oscilações de maior magnitude, comprometendo a qualidade de tiro (43).

A AMCP 706-252 apresenta lacunas em suas hipóteses, limitações e metodologia

para o levantamento da curva apresentada na Figura 3. Lacunas estas que não foram solucionadas ou destrinchadas pela literatura mais atual (18, 44).

O então cenário é um de desconforto para o projetista de tubos. Pois este vê-se obrigado a limitar-se a conclusão da AMCP 706-252. Conclusão esta de que a condição necessária e suficiente para que a arma ou seu desempenho não sofra demasiadamente com os efeitos adversos devidos à vibração mecânica é: respeitar a condição da manutenção de uma razão de frequências maior ou igual a 3,5.

1.4 Objetivos

Após apreciação dos trabalhos anteriores, conclui-se que foram estabelecidos extensos avanços em balística e na análise de tubos como vigas nos diversos trabalhos anteriores citados. É dado destaque para o modelo de forças resistivas da balística interna contido em (20) junto ao *software* PRODAS[®], em análise modal para tubos de armamento automático por (19), vibrações em tubos de armamentos de (4), estabelecimento de critérios para amortecimento para tubos em (45) e resultados satisfatórios do uso do método de Runge-kutta para soluções numéricas expostos em (12, 46).

O presente trabalho tem como objetivo final, obter uma metodologia para a determinação da curva de dispersão em função da razão de frequências, por meio da simulação de um PVI com carregamento periódico em ambiente *Matlab*[®].

Visto que não foi encontrada uma metodologia consolidada e independente para o levantamento da curva de dispersão em função da razão de frequências ou, ainda, confirmação de uma regra geral para a adoção de uma razão de frequências tal que, se obedecida, proporcionaria tubos adequados para quaisquer tipos de armamentos. Logo, faz-se necessário o desenvolvimento de um modelo com este intuito. Ademais, os experimentos de armamentos militares são de difícil execução e altíssimo custo; o modelo computacional proposto por este trabalho pode ser utilizado como ensaio preliminar, ainda que em nível teórico, com o propósito de auxiliar tais testes.

1.5 Organização do Trabalho

O presente trabalho, na sequência, terá uma fundamentação teórica da modelagem para entendimento dos princípios físicos e matemáticos empregados, apresentação da metodologia, seguida então da exposição e discussão dos resultados obtidos, dificuldades enfrentadas e, por fim, a conclusão.

2 MODELAGEM

Essa seção introduzirá os princípios básicos que constituem o modelo final, objetivo deste trabalho. São eles: substanciação da Balística Interna e fundamentação quanto a Viga Estrutural de Euler-Bernoulli.

2.1 Viga Estrutural de Euler-Bernoulli

Conforme consta em (11), são fontes de vibração atuantes no cano do armamento, devido ao disparo, as seguintes três causas: as forças de recuo, o deslocamento dos gases provenientes da queima do propelente e o deslocamento do projétil em si. Logo, o carregamento mecânico como um todo é o responsável pela vibração do cano do armamento, no entanto, os efeitos de transferência de calor em si não tem influência significativa na vibração em questão.

Para o deslocamento do projétil mencionado anteriormente, é passível o uso de modelagem semelhante ao estudo da dinâmica de estruturas sujeitas à cargas móveis. Isto é, o cano do armamento pode ser modelado como uma viga vazada engastada e o projétil como carga móvel que percorre o interior da viga em questão (4).

Em (4), por exemplo, o trabalho conduz um disparo tiro único utilizando do conceito de massa móvel para modelar a vibração. No entanto, a AMCP 706-252 para armas automáticas é baseada em uma simples análise modal, onde o fator predominante é a frequência do carregamento. Tal que, em tese, os resultados podem ser comparados aos de um carregamento cíclico aplicado no ponto específico de interesse, ou seja, a boca do armamento.

A equação de governo da viga estrutural Euler Bernoulli é dada pela Equação 2.1:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E I \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x) \quad (2.1)$$

Onde I é defeninado como consta na Equação 2.2.

$$I = \int \int z^2 dy dz \quad (2.2)$$

O material que constitui o tubo é considerado homogêneo e isotrópico. Logo para uma seção com I e E constantes, junto às Equações 2.1 e 2.2, o resultado é a Equação 2.3.

$$E I \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) \quad (2.3)$$

2.2 Dinâmica do Sistema

Visto que a dinâmica de um sistema mecânico posto a vibrar é regido pela Equação 2.4, este será o pivô para todos equacionamentos subsequentes.

$$M \underline{\ddot{u}}(t) + C \underline{\dot{u}}(t) + K \underline{u}(t) = \underline{F}(t) \quad (2.4)$$

Onde, os tensores $\underline{u}(t)$ e $\underline{F}(t)$ são definidos como:

$$\underline{u}(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_{n-1}(t) \quad u_n(t)]^T \quad (2.5)$$

$$\underline{F}(t) = [F_1(t) \quad F_2(t) \quad \dots \quad F_{n-1}(t) \quad F_n(t)]^T \quad (2.6)$$

Em particular, para o problema de uma viga engastada na extremidade esquerda e sujeita a passagem da munição, representado pela Figura 4, é possível realizar uma adequação correspondente. As imposições necessárias para tal incluem a hipótese de que todas as deformações ocorrem em regime elástico, são desconsiderados os efeitos de deformação por cisalhamento e inércia rotatória da viga. Ademais, o problema aqui tratado limitar-se-á somente as deformações no plano longitudinal da viga.

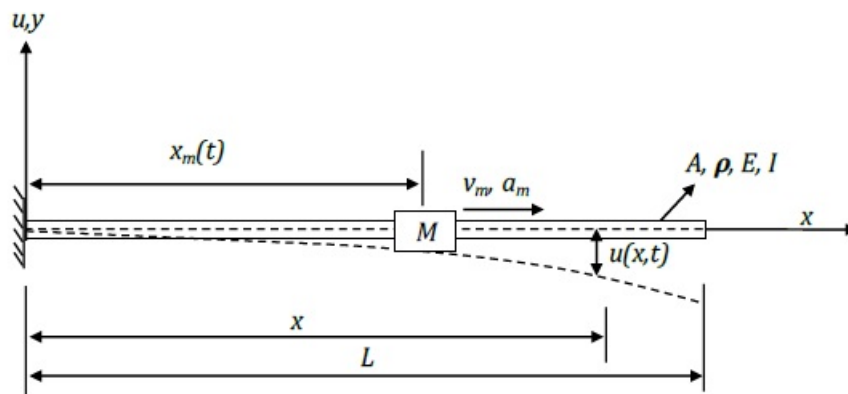


Figura 4 – Viga flexível engastada sujeita a passagem da munição (4).

2.3 Amortecimento Proporcional de Rayleigh

Para a obtenção do amortecimento do sistema, é de interesse tecer a hipótese de amortecimento proporcional ao modelo. Para tal, utiliza-se dos coeficientes de amortecimento de Rayleigh, denominados α e β , tais que satisfaçam a Equação 2.7 (4):

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (2.7)$$

Dito isto, resta atribuir valores de α e β coerentes com o sistema. Este passo pode ser alcançado utilizando literatura prévia ou registros empíricos.

2.4 Balística Interna

Denomina-se Balística interna o estudo da relação entre a arma, o projétil e o propelente da munição até o instante em que o projétil emerge da boca de um armamento (18). Portanto, a Balística interna abrange a investigação do movimento e as características do comportamento de projéteis sobre a influência dos gases produzidos pelo propelente (47). Em decorrência das grandes pressões provenientes da queima da carga de propelente, tubos de armamento são construídos com altos valores de tensão de escoamento, de tenacidade e robustez para suportar ciclos térmicos hostis.

De acordo com (3), para modelagens, os tubos de armamento assemelham-se ao de um vaso de pressão, fechado em uma extremidade (culatra) e aberto na outra (boca), desconsideradas as armas sem recuo. As condições de contorno iniciais do projétil são fornecidas pelo tubo, dado a natureza impulsiva do fenômeno, tais condições valem por todo o processo de deflagração da carga de projeção. Para os efeitos do projétil em si, evidencia-se o torque em almas raiadas e o atrito entre a alma e o projétil (3).

Após a validação realizada por (20), é possível tanto o uso da formulação já estabelecida em (21) – de emprego geral – quanto o auxílio proporcionado pelo *software* PRODAS® para, mais prontamente, obter a posição, velocidade e aceleração do projétil em cada instante. Portanto, o *software* PRODAS®, seria mais imediato e rico em resultados. No entanto, pela natureza cíclica dos esforços e baseado no trabalho realizado em (9), os efeitos da balística interna no tubo serão representados por um carregamento cíclico na extremidade livre do armamento.

2.5 Análise da Dispersão

Os disparos efetuados incorrem em uma problemática, pois um tiro anterior interfere na configuração do tubo do armamento que define a condição inicial para o tiro seguinte. Este efeito é mais pronunciado ao início da sequência de tiros, se reduzindo conforme o tubo entra em um regime permanente. Portanto, é posto como foco o estudo do armamento já em regime permanente como estimador para dispersão. Na presença de ação externa assimétrica, é razoável esperar enviesamento do histograma.

O fato de que há gravidade local deve ser considerado. Portanto, é esperada uma tendência natural dos valores do histograma serem viesados como ilustra a Figura 5.

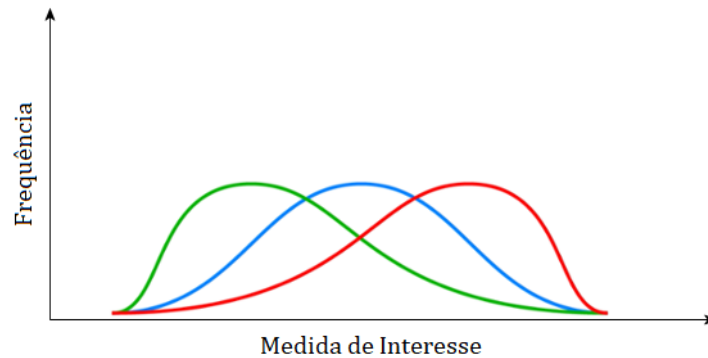


Figura 5 – Exemplo de histogramas viesados, a direita (verde) e a esquerda (vermelho) em um histograma simétrico (azul).

Para determinação da dispersão, aqui denominada $\Omega(t)$, os dados do regime permanente são necessários. As hipóteses propostas para sua estimativa são os seguintes métodos e cenários:

- A dispersão pode ser estimada pela média da variável de interesse (μ);
- A dispersão pode ser estimada pelo desvio padrão da variável de interesse (σ); e
- A dispersão pode ser estimada pela amplitude da variável de interesse (R).

Por sua vez, a variável de interesse em si é – sob hipótese – opera em um dos seguintes cenários:

- Deslocamento transversal do último nó denotado por u_n é proeminente;
- Deslocamento angular do último nó denotado por θ_n é proeminente;
- Uma combinação, linear ou não, de ambos u_n e θ_n é necessária;
- Derivada primeira do deslocamento transversal do último nó denotado por u'_n é proeminente;
- Derivada primeira do deslocamento angular do último nó denotado por θ'_n é proeminente; e
- Uma combinação, linear ou não, de ambos u'_n e θ'_n é necessária.
- Por fim, uma combinação, linear ou não, de todos os termos anteriores: u_n , θ_n , u'_n e θ'_n . Sendo esta hipótese a mais complexa dentre todas e necessita de análise individual dos componentes para ser possível inferir algum dado.

Finalmente, a combinação das possíveis variáveis de interesse e dos estimadores aqui propostos definem um conjunto restrito de possibilidades que é definido pelas Tabelas 1 e 2 apresentadas abaixo:

Hipóteses		Variável de interesse		
		u_n	θ_n	u_n e θ_n
Estimador	μ	u_n e μ	θ_n e μ	(u_n, θ_n) e μ
	σ	u_n e σ	θ_n e σ	(u_n, θ_n) e σ
	R	u_n e R	θ_n e R	(u_n, θ_n) e R

Tabela 1 – Tabela do primeiro grupo de hipóteses

Hipóteses		Variável de interesse		
		u'_n	θ'_n	u'_n e θ'_n
Estimador	μ	u'_n e μ	θ'_n e μ	(u'_n, θ'_n) e μ
	σ	u'_n e σ	θ'_n e σ	(u'_n, θ'_n) e σ
	R	u'_n e R	θ'_n e R	(u'_n, θ'_n) e R

Tabela 2 – Tabela do segundo grupo de hipóteses

O grupo de hipóteses em azul é o de mais pronta determinação por necessitar apenas dos limites superior e inferior de uma amostra de disparos.

O grupo de hipóteses em amarelo necessita do registro dos dados dos disparos e subsequente processamento.

Quanto ao grupo de hipóteses em vermelho: este é de difícil equacionamento e, no máximo, só seria possível inferir sobre ele após avaliadas as hipóteses em amarelo e azul. Portanto, qualquer exploração desse grupo de hipóteses nesta peça será limitado.

As taxas dos deslocamentos por sua vez, tem relação com a resposta harmônica esperada, que faz a evolução dos deslocamentos e de suas taxas serem qualitativamente equivalentes.

3 METODOLOGIA

A presente seção visa explicar o refino e adequação das teorias anteriores para o problema em questão. Assim como sua equiparação com rotinas numéricas do ambiente *Matlab*® , fundamentação do MEF, razão de escolha do método de Runge-Kutta utilizado em ambiente computacional, substanciação do carregamento periódico, descrição do fenômeno da dispersão e seus critérios de avaliação.

3.1 Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos consiste em uma técnica numérica utilizada na solução de problemas de valores de contorno para equações diferenciais ordinárias ou equações diferenciais parciais. Seu diferencial deve-se à capacidade de converter um então problema analítico em numérico. O Método dos Elementos Finitos é notável por permitir análise estática, dinâmica modal e dinâmica transiente de um sistema.

Em (19), consta a dedução completa do tratamento de domínios e foi realizada a análise modal da aplicação do mesmo método em uma viga, ou tubo de armamento, com uma extremidade engastada e a outra em balanço. O autor modela, ainda, um tubo de armamento com seção transversal variável. Esta formulação permite a obtenção das frequências naturais do tubo do armamento.

Com o intuito de refinar o modelo e possibilitar o uso de geometrias complexas de tubo de armamentos como entradas com maior grau de precisão, opta-se por utilizar do MEF unidimensional na extensão tubo.

3.1.1 Matrizes Inércia e Rigidez de um Elemento Finito

Como passo primeiro, toma-se um corpo contínuo e se executa a discretização via elementos finitos unidimensionais de mesmo comprimento l . Tal que l satisfaça a Equação 3.1.

$$L = n l \tag{3.1}$$

Onde L é o comprimento total da viga original.

Ao particionar a viga em n elementos de igual comprimento, temos como resultado $n + 1$ nós. Ainda, para este elemento, são definidos dois tipos de movimento para cada nó, o movimento transversal denotado por u e o movimento angular denotado por θ . Tal configuração fornece um EF com quatro GDL, totalizando um total de n elementos e

$2n + 2$ variáveis para o sistema. Sem perda de generalidade, a Figura 6 mostra as variáveis de interesse que residem sob os nós do primeiro elemento.

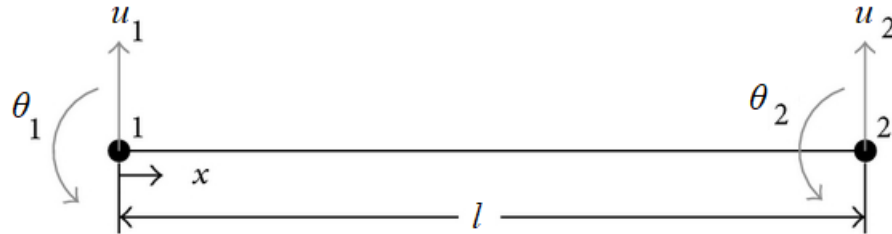


Figura 6 – Elemento de viga e variáveis de interesse.

Para a elaboração das matrizes de inércia e rigidez do elemento, faz-se uso de funções de interpolação apropriadas. Embora existam diferentes maneiras para a determinação do polinômio interpolador de Lagrange, uma solução analítica adequada é imprimir deformação elástica no elemento de viga com deslocamento unitário. As matrizes de inércia e de rigidez para o elemento em questão são expressas pelas Equações 3.2 e 3.3 respectivamente.

$$[M]_E = \begin{bmatrix} \frac{156\rho Al}{420} & \frac{22\rho Al}{420} & \frac{54\rho Al}{420} & \frac{-13\rho Al}{420} \\ \frac{22\rho Al}{420} & \frac{4\rho Al^2}{420} & \frac{13\rho Al}{420} & \frac{-3\rho Al^2}{420} \\ \frac{54\rho Al}{420} & \frac{13\rho Al}{420} & \frac{156\rho Al}{420} & \frac{-22\rho Al}{420} \\ \frac{-13\rho Al}{420} & \frac{-3\rho Al^2}{420} & \frac{-22\rho Al}{420} & \frac{4\rho Al^2}{420} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$[K]_E = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3.1.2 Matrizes Inércia e Rigidez Globais

As matrizes de inércia e de rigidez globais para o sistema em questão podem ser expressas pela superposição das matrizes com respeito aos nós comuns como enuncia a Figura 7 ou, ainda, pelas Equações 3.4 e 3.5 respectivamente.

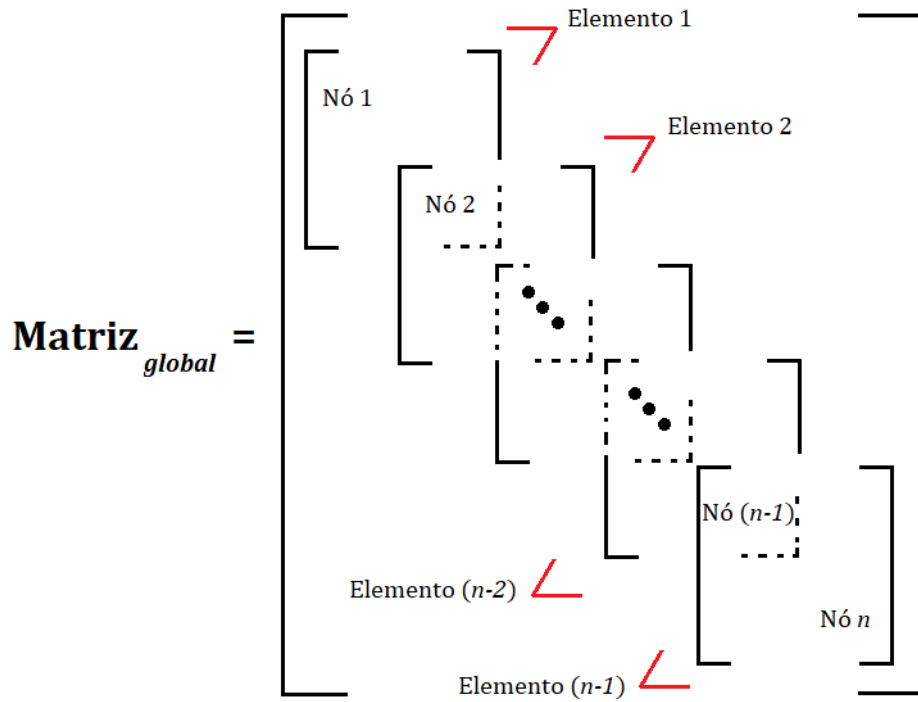


Figura 7 – Ilustração do método de superposição das matrizes dos elementos para obtenção das matrizes globais

$$[M]_G = \begin{bmatrix}
 M_{11 E1} & M_{12 E1} & M_{13 E1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 M_{21 E1} & M_{22 E1} & M_{23 E1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 M_{31 E1} & M_{32 E1} & M_{33 E1} + M_{11 E2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & M_{44 E_n} + M_{22 E_{n+1}} & M_{23 E_{n+1}} & M_{24 E_{n+1}} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & M_{32 E_{n+1}} & M_{33 E_{n+1}} & M_{34 E_{n+1}} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & M_{42 E_{n+1}} & M_{43 E_{n+1}} & M_{44 E_{n+1}}
 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$[K]_G = \begin{bmatrix} K_{11 \ E1} & K_{12 \ E1} & K_{13 \ E1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ K_{21 \ E1} & K_{22 \ E1} & K_{23 \ E1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ K_{31 \ E1} & K_{32 \ E1} & K_{33 \ E1} + K_{11 \ E2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{44 \ E_n} + K_{22 \ E_{n+1}} & K_{23 \ E_{n+1}} & K_{24 \ E_{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{32 \ E_{n+1}} & K_{33 \ E_{n+1}} & K_{34 \ E_{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{42 \ E_{n+1}} & K_{43 \ E_{n+1}} & K_{44 \ E_{n+1}} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

3.1.3 Amortecimento Global com Coeficientes de Rayleigh

Como mencionado anteriormente, caso o sistema seja dotado de amortecimento, é possível estabelecer a hipótese de amortecimento proporcional ao modelo. Retomando-se os coeficientes de amortecimento de Rayleigh na Equação 2.7 e ajustando para o sistema em nível global, temos a Equação 3.6:

$$[C]_G = \alpha [M]_G + \beta [K]_G \quad (3.6)$$

Sendo possível atribuir valores de α e β por ajuste de mínimos quadrados, vide literaturas anteriores (45, 48), através das seguintes hipóteses:

- Amortecimento relativo de 2% para o 1º harmônico da estrutura; e
- Amortecimento relativo de 3% para o 8º harmônico da estrutura.

Auxiliado por uma calculadora modal como a desenvolvida e validada em (19), é possível extrair a frequência de um n-ésimo harmônico desejado e implementá-lo na seguinte equação:

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2f_i} + \frac{\beta f_i}{2} \quad (3.7)$$

Portanto, dispo de duas condições de amortecimento relativo e a frequência correspondente de cada, está definido um sistema linear com duas equações linearmente independentes e duas variáveis de interesse α e β , configurando um sistema possível e determinado.

3.1.4 Análise Modal

Ao longo do trabalho enunciado em (19), é validado o uso desta formulação para se obter a frequência natural (f_n) de uma viga (sob condição de amortecimento nulo), então

tratada como tubo de armamento. O processo demanda – evidentemente – que o tensor de forças ($\underline{F}(t)$) tenha todos seus componentes iguais à zero como consta na Equação 3.8.

$$[M]_G \underline{\ddot{u}}(t) + [K]_G \underline{u}(t) = \underline{0} \quad (3.8)$$

Uma vez determinadas as matrizes globais de rigidez, de inércia e consideradas as CC que a viga esteja sujeita, resta estabelecer os demais forçamentos externos que regem o lado direito da Equação 3.11.

3.1.5 Adequação às Condições de Contorno

Visto que o tubo do armamento trata-se de uma viga engastada em sua extremidade esquerda, as matrizes de inércia e de rigidez globais para o sistema são corrigidas para as Equações 3.9 e 3.10 respectivamente, toma-se também a liberdade de ajustar índices de acordo com definições para análise da dispersão em passagens por vir.

$$[M]_G = \begin{bmatrix} M_{33E1} + M_{11E2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & M_{44 \text{ } En} + M_{22 \text{ } En+1} & M_{23 \text{ } En+1} & M_{24 \text{ } En+1} \\ 0 & \dots & M_{32 \text{ } En+1} & M_{33 \text{ } En+1} & M_{34 \text{ } En+1} \\ 0 & \dots & M_{42 \text{ } En+1} & M_{43 \text{ } En+1} & M_{44 \text{ } En+1} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$[K]_G = \begin{bmatrix} K_{33 \text{ } E1} + K_{11 \text{ } E2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & K_{44 \text{ } En} + K_{22 \text{ } En+1} & K_{23 \text{ } En+1} & K_{24 \text{ } En+1} \\ 0 & \dots & K_{32 \text{ } En+1} & K_{33 \text{ } En+1} & K_{34 \text{ } En+1} \\ 0 & \dots & K_{42 \text{ } En+1} & K_{43 \text{ } En+1} & K_{44 \text{ } En+1} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Novamente, ao substituírmos a Equação 2.7 com as matrizes globais ajustadas para as condições de contorno na Equação 2.4 e corrigimos os índices para manter a estrutura, obtemos a seguinte expressão:

$$[M]_G \underline{\ddot{u}}(t) + [\alpha[M]_G + \beta[K]_G] \underline{\dot{u}}(t) + [K]_G \underline{u}(t) = \underline{F}(t) \quad (3.11)$$

Onde, \underline{u} e \underline{F} são as correções correspondentes considerado o engaste com índices ajustados definidos como:

$$\underline{u}(t) = \left[u_1(t) \quad \theta_1(t) \quad u_2(t) \quad \theta_2(t) \quad \dots \quad u_{n-1}(t) \quad \theta_{n-1}(t) \quad u_n(t) \quad \theta_n(t) \right]^T \quad (3.12)$$

$$\underline{F}(t) = \left[F_1(t) \quad T_1(t) \quad F_2(t) \quad T_2(t) \quad \dots \quad F_{n-1}(t) \quad T_{n-1}(t) \quad F_n(t) \quad T_n(t) \right]^T \quad (3.13)$$

3.2 Implementação dos Efeitos Envolvidos.

Esta seção visa elucidar e equacionar os diversos efeitos que a viga é submetida.

3.2.1 Inclusão do Peso distribuído da Viga

A função força distribuída do peso da viga é particionada conforme os elementos finitos. A função é então descrita nas coordenadas de um elemento ficando em função de sua posição local, com as forças e torques enunciadas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_d = -g\rho(x_G)A(x_G) \\ F_{d1_{Ei}}(t) = \int_0^{L_{Ei}} f_{d_{Ei}}(t) \psi_1(x_{m_{Ei}}) dx_{m_{Ei}} \\ F_{d2_{Ei}}(t) = \int_0^{L_{Ei}} f_{d_{Ei}}(t) \psi_2(x_{m_{Ei}}) dx_{m_{Ei}} \\ F_{d3_{Ei}}(t) = \int_0^{L_{Ei}} f_{d_{Ei}}(t) \psi_3(x_{m_{Ei}}) dx_{m_{Ei}} \\ F_{d4_{Ei}}(t) = \int_0^{L_{Ei}} f_{d_{Ei}}(t) \psi_4(x_{m_{Ei}}) dx_{m_{Ei}} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Portanto, o tensor global de forçamento do peso distribuído da viga é calculado de acordo com a Equação 3.15, onde o tensor é invariante com o tempo e age por toda extensão

da viga. Consideradas as condições de contorno conforme enunciado anteriormente, temos:

$$\underline{F}_{dG}(t) = \begin{bmatrix} F_{1G}(t) \\ \vdots \\ F_{iG}(t) \\ F_{i+1G}(t) \\ F_{i+2G}(t) \\ F_{i+3G}(t) \\ \vdots \\ F_{2nG}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{d1E_1}(t) \\ \vdots \\ F_{d3E_{i-1}}(t) + F_{d1E_i}(t) \\ F_{d4E_{i-1}}(t) + F_{d2E_i}(t) \\ F_{d1E_{i+1}}(t) + F_{d3E_i}(t) \\ F_{d2E_{i+1}}(t) + F_{d4E_i}(t) \\ \vdots \\ F_{d4E_{2n}}(t) \end{bmatrix} = g\rho A \begin{bmatrix} -\frac{L_{E_1}}{2} \\ \vdots \\ -\frac{L_{E_i}}{2} - \frac{L_{E_{i-1}}}{2} \\ \frac{L_{E_{i+1}}^2}{12} - \frac{L_{E_{i+2}}^2}{12} \\ -\frac{L_{E_{i+2}}}{2} - \frac{L_{E_{i+1}}}{2} \\ \frac{L_{E_{i+3}}^2}{12} - \frac{L_{E_{i+4}}^2}{12} \\ \vdots \\ \frac{L_{E_{2n}}^2}{12} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

3.2.2 Força Periódica na Ponta do Armamento

O equacionamento via carga móvel, embora fidedigno, é complexo, computacionalmente extenso e de difícil registro dos dados de cada disparo. Somado ao fato de que esta operação deve ser repetida várias vezes para explorar as diferentes cadências de tiro, uma simplificação é então proposta.

Dada a natureza da perturbação a qual o tubo do armamento, aqui tratado como viga, está submetido, a substituição da coletânea de esforços por uma força periódica de excitação é implementada. Visto que os esforços diversos tem periodicidade em conformidade com a cadência de tiro e que o ponto de interesse é o último nó obtido através Método dos Elementos Finitos, uma força periódica é posta a excitar a boca do armamento.

Por fim, o equacionamento pode então ser reescrito como:

$$[M] \underline{\ddot{u}}(t) + [C] \underline{\dot{u}}(t) + [K] \underline{u}(t) = \underline{F}_{dG} + \underline{F}_{periódica}(t) \quad (3.16)$$

Vale ressaltar que a peridiocidade dos esforços com a qual a viga fica submetida aos esforços tem como elemento principal a frequência de tiro. Portanto, na própria AMCP, é definido o termo razão de frequências como(3) :

$$Ratio_f = \frac{f_n}{f_{fire}} \quad (3.17)$$

Tal definição é a escolhida e implementada como domínio para elaboração da curva de dispersão, matéria de estudo desta peça.

3.3 Método de Runge-Kutta

A resolução do fenômeno pode ser alcançada de duas formas distintas: o a analítica e a numérica. Atualmente, dispondo de melhores ferramentas computacionais do que as disponíveis na época de produção da AMCP 706-252, a resolução numérica é, portanto, a escolhida.

Dentre os possíveis métodos para tal abordagem, temos, como exemplo, o de Newmark, utilizado para sistemas de segunda ordem. No entanto, embora o método de Newmark seja interessante para modelos governados por EDO de 2^a ordem, o método de Runge-Kutta já consta na biblioteca do Matlab[®], não sendo necessário programar o de Newmark. Inclusive, quando considerada a linearidade das equações, o método de Runge-Kutta é considerado suficiente.

Para a implementação do método de Runge-Kutta é necessário reduzir a ordem do sistema. Tal medida dobra o número de GDL a serem determinados para sua resolução. Apesar disso, mantida a linearidade do sistema, o aumento no número de GDL não é um grande problema do ponto de vista computacional. O equacionamento resultante transforma um PVI definido por um sistema de EDO de 2^a ordem em um equivalente de 1^a ordem, este sim adequado para o método de Runge-Kutta.

Com efeito, o advento de ferramentas computacionais modernas favorece o uso do método de solução numérica para o fenômeno proposto. Ademais, esse tipo de ferramenta permite maior flexibilidade para cada caso analisado através de simulações. A ferramenta *Matlab*[®] foi escolhida para o desenvolvimento do presente trabalho e obtenção dos resultados, pois possibilita diversas simulações com integração numérica de variáveis ao longo do tempo mediante rotinas – ancoradas em métodos matemáticos já validados – como o Método de Runge-Kutta, a exemplo da rotina ODE 45 em ambiente *Matlab*[®] vista no capítulo anterior.

Antes de implantar a rotina ODE 45 propriamente dita, faz-se necessário uma mudança quanto a EDO proposta. Tal transformação consiste em adotar a seguinte notação:

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) = \underline{y}(t) \\ [M] \underline{y}'(t) = -[C] \underline{y}(t) - [K] \underline{u}(t) + \underline{F}(t) \end{cases} \quad (3.18)$$

Os equacionamentos acima descritos são a base do código que será empregado em ambiente *Matlab*[®] para determinação dos movimentos transversal e angular dos pontos da viga para cada instante.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são explorados os resultados obtidos pelo trabalho. Foi estudado o comportamento de um tubo hipotético no calibre 0,50 pol com perfil da seção reta uniforme ao longo de seu comprimento. O foco foi posto no regime permanente, no qual utilizou-se da simplificação via excitação periódica na boca do armamento.

O modelo em questão, limita-se à amplitude (R) como estimador pois o carregamento periódico descaracteriza o uso dos demais estimadores (μ e σ). Para as variáveis de interesse, como dito anteriormente, toma-se a oscilação dos últimos dois graus de liberdade e suas derivadas primeiras, isto é: deslocamento transversal (u_n), deslocamento angular (θ_n), velocidade transversal (u'_n) e velocidade angular (θ'_n).

4.1 Dados de Entrada

Quanto à geometria implementada no código, e as propriedades do material, foram utilizados dados devidamente listados na Tabela 3 abaixo:

Geometria	Raio Interno	Raio Externo	Comprimento	Área Transversal
Valores	0.5"	1.4 "	40.0 "	Constante
Propriedades	Módulo de Young	Coeficiente de Poisson	Massa Específica	Material
Valores	200GPa	0.3	$7860kg\ m^{-3}$	Homogêneo
Carregamento	Nº de disparos	Amplitude	Duração	Frequência
Valores	40	$4.905\ 10^{-2}\ N$	$12\ 10^{-3}s$	600Hz

Tabela 3 – Tabela de geometria, propriedades e carregamento

4.2 Teste de Convergência

Após o tubo estar determinado, é realizada uma breve análise de convergência em função do número de elementos utilizados na discretização. Os resultados desta etapa constam na Tabela 4.

Número de Elementos	Valor médio de θ_n	Ganho percentual
4	$-2.3 \cdot 10^{-6}$ rad	N/A
8	$-0.25 \cdot 10^{-6}$ rad	89.1%
12	$-0.06 \cdot 10^{-6}$ rad	97.4%
16	$-0.01 \cdot 10^{-6}$ rad	99.6%

Tabela 4 – Tabela de ganhos para convergência via acréscimo de elementos.

A variável θ_n é acima utilizada pois, dentre todas, é a que demandou mais elementos para sua convergência em torno do ponto de equilíbrio. Portanto, o uso de 16 elementos é suficiente para uma convergência satisfatória; o uso de mais elementos mostrou-se computacionalmente exigente ao percorrer o domínio da frequência, que é passo seguinte.

4.3 Variáveis de Interesse e Amplitude no Domínio da Frequência

Para as análises seguintes, foram extraídos os dados de ambos regime permanente e regime total para fins de comparação. A frequência de disparos máxima foi de 9000 disparos por minuto e um passo fixo de 75 disparos por minuto.

As Figuras 8 e 9 apresentam o comportamento das variáveis de interesse e o estimador amplitude no domínio da frequência para o regime permanente.

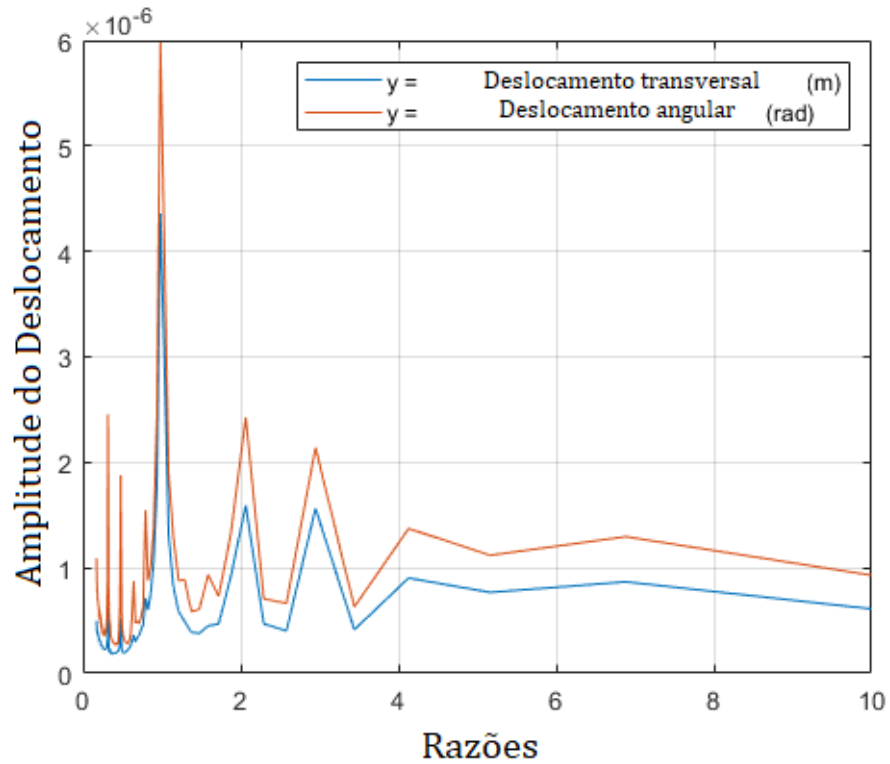


Figura 8 – Relação entre a amplitude de u_n e θ_n no domínio da frequência em regime permanente.

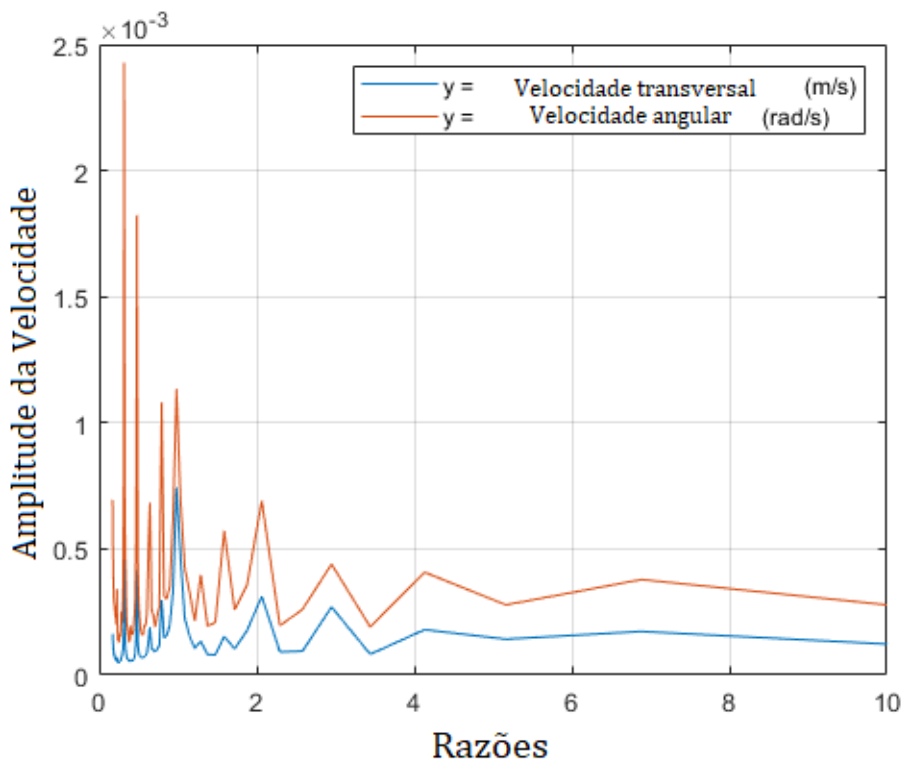


Figura 9 – Relação entre a amplitude de u'_n e θ'_n no domínio da frequência em regime permanente.

Como mencionado anteriormente, é esperada na resposta harmônica que a evolução dos deslocamentos e de suas taxas sejam qualitativamente equivalentes, fenômeno evidenciado nos gráficos.

Há a existência de picos menos caracterizados nas regiões entre 0 e 1 devido ao registro de valores do fim do regime transiente adentrarem os dados como resultado direto da dificuldade em estabelecer critério único, para extração do regime permanente, para toda a faixa de razão de frequências.

As informações de ambos regimes e suas divergências percentuais são apresentadas na Tabela 5. Onde as razões iguais a 1(um), 2(dois) e 3(três), são denominados picos. Note que as derivadas do deslocamentos transversal e angular apresentam picos na região antes da razão 1(um). A determinação de um critério único de regime permanente para toda a extensa faixa frequências em nível computacional é complexa, ocasionando em valores do fim do regime transiente a serem registrados para razões inferiores a 1(um).

Variável	Picos	Regime Total	Regime Permanente	Diferença Percentual
u_n	1°Pico	$4.40 \cdot 10^{-6}m$	$4.35 \cdot 10^{-6}m$	-1,14%
	2°Pico	$1.79 \cdot 10^{-6}m$	$1.58 \cdot 10^{-6}m$	-11,73%
	3°Pico	$1.61 \cdot 10^{-6}m$	$1.54 \cdot 10^{-6}m$	-4,35%
θ_n	1°pico	$6.0 \cdot 10^{-6}rad$	$6.0 \cdot 10^{-6}rad$	0%
	2°Pico	$2.74 \cdot 10^{-6}rad$	$2.48 \cdot 10^{-6}rad$	-9.49%
	3°Pico	$2.31 \cdot 10^{-6}rad$	$2.18 \cdot 10^{-6}rad$	-5,63%
u'_n	1°Pico	$7.48 \cdot 10^{-4}ms$	$7.48 \cdot 10^{-4}ms$	0%
	2°Pico	$3.62 \cdot 10^{-4}ms$	$3.13 \cdot 10^{-4}ms$	-13,54%
	3°Pico	$2,88 \cdot 10^{-4}ms$	$2,69 \cdot 10^{-4}ms$	-6,60%
θ'_n	1°Pico	$1,15 \cdot 10^{-3}rad$	$1.12 \cdot 10^{-3}rad$	-2.61%
	2°Pico	$0.77 \cdot 10^{-3}rad$	$0.67 \cdot 10^{-3}rad$	-14.29%
	3°Pico	$0.46 \cdot 10^{-3}rad$	$0.43 \cdot 10^{-3}rad$	-6.52%

Tabela 5 – Comparação entre amplitude das variáveis nos regimes

4.4 Comparação com a AMCP 706-252

Por fim, é realizada uma comparação entre o gráfico original fornecido pela AMCP 706-252. A Figura 10 é o gráfico original como consta na AMCP 706-252.

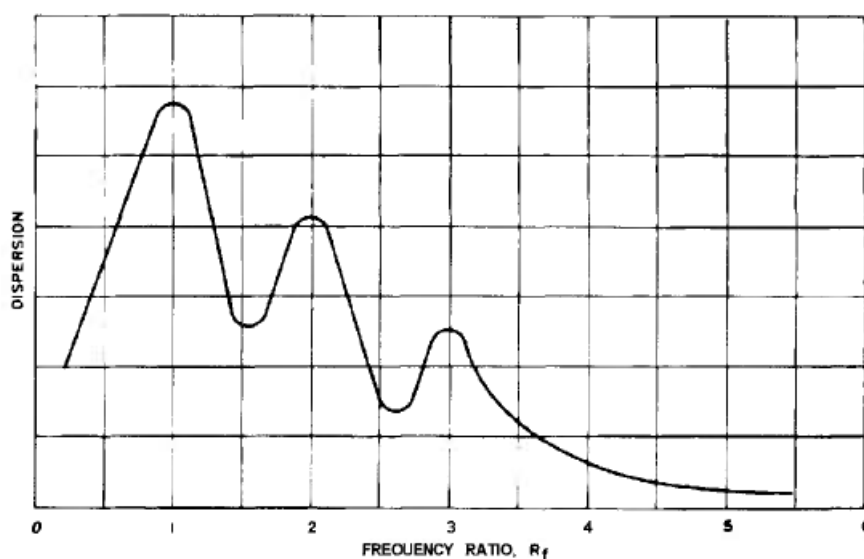


Figura 10 – Gráfico original da dispersão em função de razão de frequências da AMCP 706-252 (3)

Finalmente, a Tabela 6 tece a comparação entre o gráfico original e os resultados de amplitude obtidos para as quatro variáveis de interesse no domínio da frequência como proposto em parte do conjunto de hipóteses aqui estabelecidas. Parametrizam-se os picos 2(dois) e 3(três) em função do pico 1(um) de cada gráfico.

Variável	Picos	AMCP 706-252	Curvas Obtidas	Diferença Percentual
u_n	1°Pico	100%	100%	0%
	2°Pico	72%	44.74%	-27.26%
	3°Pico	44%	44.74%	+0.74%
θ_n	1°pico	100%	100%	0%
	2°Pico	72%	46.43%	-25.57%
	3°Pico	44%	42.86%	- 1.14%
u'_n	1°Pico	100%	100%	0%
	2°Pico	72%	45.0%	-27%
	3°Pico	44%	40.0%	-4%
θ'_n	1°Pico	100%	100%	0%
	2°Pico	72%	60.0%	-12%
	3°Pico	44%	40.0%	-4%

Tabela 6 – Comparação entre a curva original da AMCP 706-252 e curvas obtidas.

Através das diferenças os gráficos, dentro do conjunto de hipóteses, temos as seguintes observações:

- Para todas as variáveis de interesse, o estimador amplitude acusou maior desvio da AMCP 706-252 no 2º pico. É razoável supor que, nesta região há mais graus de liberdade - aqui não explorados - tendo forte influência na dispersão;
- A região do 3º Pico é a mais correlata para todas as variáveis, tal como no item anterior, é razoável supor que desta região em diante, quaisquer que sejam os graus de liberdade não explorados, não desempenham papel significativo para razões de frequências superiores a 3 (considerado o gráfico da AMCP 706-252 somente);
- Apesar da AMCP 706-252 atestar que uma razão de frequências superior a 3 vezes e meia seja dita como suficiente para atenuar em definitivo a dispersão, os dados obtidos apontam o oposto: há regiões não desprezíveis em termos de dispersão, ainda que menores, logo após o indicado; e
- Há nas curvas obtidas uma correlação entre as variáveis de interesse, de tal forma que, ainda que a dispersão seja uma combinação não trivial destas, é possível qualitativamente inferir sobre a mesma. As regiões de elevada amplitude obtidas são pariáveis com a dispersão esperada, mesmo que a expressão exata não esteja definida.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram propostas técnicas de estimação do fenômeno da influência da dinâmica do tubo na dispersão como função da razão de frequências. É apresentado um conjunto de hipóteses para o governo do fenômeno da dispersão e, mediante simplificações de interesse, avaliadas o conjunto de hipóteses com respeito ao estimador Amplitude e sua relação com as variáveis de interesse supracitadas. Os resultados de dispersão no domínio da frequência aqui obtidos indicam uma correspondência o que consta na AMCP 706-252.

A metodologia aqui proposta pode ser usada para avaliar a influência de outros fatores na validade do valor de 3,5 como parâmetro de funcionamento para os tubos com diferentes configurações geométricas. Há a ressalva de que o critério de regime permanente utilizado também pode ser responsável por distorções em altas cadências de tiro.

Para trabalhos futuros, recomendam-se:

- Estabelecer um modelo via carga móvel - não recorrendo ao uso do carregamento periódico aqui realizado - onde considere as condições das variáveis de interesse no momento exato(ou mais próximo possível pelo passo computacional) em que a munição de fato abandona a boca do armamento.
- Repetir a análise para tubos com diferentes configurações geométricas
- Resolver problema inverso para ajustar o amortecimento de forma a buscar reproduzir a curva da AMCP.

REFERÊNCIAS

- 1 LOHMAN, T. *Which Shotgun Choke Is The Most Open? How To Choose The Proper Choke*. 2019. Disponível em: <<https://www.outdoorhole.com/which-shotgun-choke-is-the-most-open/>>.
- 2 N/A. *Deutsches Panzermuseum Munster - 105mm Royal Ordnance L7 tank gun Cut model*. 2005. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/Panzermuseum_Munster>.
- 3 AMCP, A. P. Of materiel. p. 8–21, 1944.
- 4 MICHELON, M. A. *Vibrações em Tubos Flexíveis de Armamentos Ocasionalmente pelo Disparo*. 116 p. Mestrado em Engenharia Mecânica — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2018. 18 dez. de 2018.
- 5 ASSEMBLY, U. G. *Report of the Panel of Governmental Experts on Small Arms*. [S.l.], 1997.
- 6 ROSE, A. *American rifle: a biography*. [S.l.]: Delacorte Press, 2008.
- 7 WENTE, D. An investigation of the effects of natural frequency of vibration of the barrel upon the dispersion of an automatic weapon. *U. S. Army Ordnance Experimental Station, Purdue University*, v. 311.
- 8 AYRE, R. S.; JACOBSON, L.; HSU, C. S. Transverse vibration of one and twospan beams under the action of a moving mass load. In: *Proceedings of the 1st US National Congress on Applied Mechanics*. [S.l.: s.n.], 1951. p. 11–16.
- 9 LANGHAAR, H. L.; MILLER, R. E.; BORESI, A. P. Excitation of a gun barrel due to firing. *JUR YJYW SIN IN BOYNA-MICS* Z, 1978.
- 10 AHMED, N.; BROWN, R. D.; HAMEED, A. Finite element modelling and simulation of gun dynamics using "ansys". In: IEEE. *Tenth international conference on computer modeling and simulation (uksim 2008)*. [S.l.], 2008. p. 18–22.
- 11 SIMKINS, T. E. Transverse response of gun tubes to curvature-induced load functions. In: *Proceedings of the Second US Army Symposium on Gun Dynamics*. [S.l.: s.n.], 1978. p. 1–66.
- 12 DORMAND, J. R.; PRINCE, P. J. A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of computational and applied mathematics*, Elsevier, v. 6, n. 1, p. 19–26, 1980.
- 13 TAWFIK, M. Dynamics and stability of stepped gun-barrels with moving bullets. *Advances in Acoustics and vibration*, Hindawi, v. 2008, 2008.
- 14 CRONEMBERGER, P.; JR, E. L.; GOIS, J.; CALDEIRA, A. Theoretical and experimental study of the interior ballistics of a rifle 7.62. *Revista de Engenharia Térmica*, v. 13, n. 2, p. 20–27, 2014.

- 15 LEITE, T. M. J. *Modelagem da dinâmica de um canhão de carro de combate durante o tiro*. Monografia (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2015.
- 16 KOÇ, M. A.; ESEN, İ.; ÇAY, Y. Tip deflection determination of a barrel for the effect of an accelerating projectile before firing using finite element and artificial neural network combined algorithm. *Latin American Journal of Solids and Structures*, SciELO Brasil, v. 13, n. 10, p. 1968–1995, 2016.
- 17 FERREIRA, A. A. G. *Análise do comportamento dinâmico do canhão-projétil de carrode combate durante o tiro*. Mestrado em Engenharia Mecânica — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2017.
- 18 CARLUCCI, D. E.; JACOBSON, S. S. *Ballistics: theory and design of guns and ammunition*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- 19 BRITO, G. D. D. C. de. *Métodos para Análise Modal de Tubos de Armamento Automático*. 76 p. Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica e de Armamento) — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2019.
- 20 RODRIGUES, M. P. Força de resistência na modelagem balística interna pelo método dos parâmetros concentrados. Rio de Janeiro, 2020.
- 21 BAER, P. G.; FRANKLE, J. M. *The simulation of interior ballistic performance of guns by digital computer program*. [S.l.], 1962.
- 22 CRONEMBERGER, P. d. O. *Problema inverso de estimativa de parâmetros de propelentes a partir da balística interna de uma arma*. Tese (Doutorado) — Dissertação, 2012, 84p—Departamento de Ciência e Tecnologia—Instituto . . . , 2012.
- 23 STANISIC, M.; EULER, J.; MONTGOMERY, S. On a theory concerning the dynamical behavior of structures carrying moving masses. *Ingenieur Archiv*, v. 43, n. 5, 1974.
- 24 SADIKU, S.; LEIPHOLZ, H. On the dynamics of elastic systems with moving concentrated masses. *Ingenieur-archiv*, Springer, v. 57, n. 3, p. 223–242, 1987.
- 25 MICHALTSOS, G.; SOPHIANOPOULOS, D.; KOUNADIS, A. The effect of a moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam. *Journal of sound and Vibration*, Elsevier, v. 191, n. 3, p. 357–362, 1996.
- 26 FODA, M. A.; ABDULJABBAR, Z. A dynamic green function formulation for the response of a beam structure to a moving mass. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 210, n. 3, p. 295–306, 1998.
- 27 MICHALTSOS, G.; KOUNADIS, A. The effects of centripetal and coriolis forces on the dynamic response of light bridges under moving loads. *Journal of Vibration and Control*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 7, n. 3, p. 315–326, 2001.
- 28 BILELLO, C.; BERGMAN, L. A.; KUCHMA, D. Experimental investigation of a small-scale bridge model under a moving mass. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 130, n. 5, p. 799–804, 2004.

- 29 SCHNEIDER, H.-J.; ELF, H.; KÖLLE, P. Modeling of travelling-loads and time-dependent masses with adina. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 17, n. 5-6, p. 749–755, 1983.
- 30 CIFUENTES, A. O. Dynamic response of a beam excited by a moving mass. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, v. 5, n. 3, p. 237–246, 1989.
- 31 FRÝBA, L. *Vibration of solids and structures under moving loads*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 1.
- 32 IWANKIEWICZ, R.; ŚNIADY, P. Vibration of a beam under a random stream of moving forces. *Journal of Structural Mechanics*, Taylor & Francis, v. 12, n. 1, p. 13–26, 1984.
- 33 GBADEYAN, J.; ONI, S. Dynamic behaviour of beams and rectangular plates under moving loads. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 182, n. 5, p. 677–695, 1995.
- 34 OGUAMANAM, D.; HANSEN, J.; HEPPLER, G. Dynamic response of an overhead crane system. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 213, n. 5, p. 889–906, 1998.
- 35 HILAL, M. A.; ZIBDEH, H. Vibration analysis of beams with general boundary conditions traversed by a moving force. *Journal of Sound and vibration*, Elsevier, v. 229, n. 2, p. 377–388, 2000.
- 36 SAVIN, E. Dynamic amplification factor and response spectrum for the evaluation of vibrations of beams under successive moving loads. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 248, n. 2, p. 267–288, 2001.
- 37 LIN, Y.-H.; TRETHERWEY, M. Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamic loads. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 136, n. 2, p. 323–342, 1990.
- 38 MACKERTICH, S. Response of a beam to a moving mass. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 92, n. 3, p. 1766–1769, 1992.
- 39 MOFID, M.; AKIN, J. E. Discrete element response of beams with traveling mass. *Advances in Engineering Software*, Elsevier, v. 25, n. 2-3, p. 321–331, 1996.
- 40 WU, J.-J. Transverse and longitudinal vibrations of a frame structure due to a moving trolley and the hoisted object using moving finite element. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 50, n. 4, p. 613–625, 2008.
- 41 ESEN, I. Dynamic response of a beam due to an accelerating moving mass using moving finite element approximation. *Mathematical and Computational Applications*, Association for Scientific Research, v. 16, n. 1, p. 171–182, 2011.
- 42 RIEKER, J. R.; LIN, Y.-H.; TRETHERWEY, M. W. Discretization considerations in moving load finite element beam models. *Finite elements in analysis and design*, Elsevier, v. 21, n. 3, p. 129–144, 1996.
- 43 HUA, H.; LIAO, Z.; SONG, J. Vibration reduction and firing accuracy improvement by natural frequency optimization of a machine gun system. *Journal of Mechanical Science and Technology*, Springer, v. 29, n. 9, p. 3635–3643, 2015.

-
- 44 H, P. *Mechanical engineering: Principles of armament design*. [S.l.]: Trafford, 2004.
- 45 BASSI, A. A. *Análise Dinâmica do Tiro de Armamento Pesado*. 86 p. Mestrado em Engenharia Mecânica — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2009. 19 jan. de 2009.
- 46 SHAMPINE, L. F.; REICHEL, M. W. The matlab ode suite. *SIAM journal on scientific computing*, SIAM, v. 18, n. 1, p. 1–22, 1997.
- 47 SERIES, B. *Nterdr ballistics of guns*. 1965.
- 48 KANDGE, G. M. *Influence of mode dependent rayleigh damping on transient stress response*. 2007.