

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

(Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho, 1792)

Modelagem e simulação de trajetória de projéteis ar-terra

Orientador:

Prof. Vitor Santoro Santiago

Orientado:

Daniel Neri Nogueira do Nascimento

Rio de Janeiro

2019

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Daniel Neri Nogueira do Nascimento

Modelagem e simulação de trajetória de Projéteis ar-terra

Projeto de Fim de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica e de Armamento do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção de graus em Engenharia Mecânica e de Armamento.

Orientadora: Prof. Vitor Santoro Santiago

Rio de Janeiro

2019

CIP - Catalogação na Publicação

Neri Nogueira do Nascimento, Daniel
Modelagem e simulação de trajetória de projéteis
ar-terra / Daniel Neri Nogueira do Nascimento. –
Rio de Janeiro, 2019.
53 f.

Orientador: Vitor Santoro Santiago.

Projeto Final de Curso (graduação) – Instituto
Militar de Engenharia, Bacharel em Engenharia
Mecânica e de Armamento, 2019.

1. Prodas. 2. bomba mk-82. 3. modelagem e
simulação. I. Santoro Santiago, Vitor, orient. II.
Título

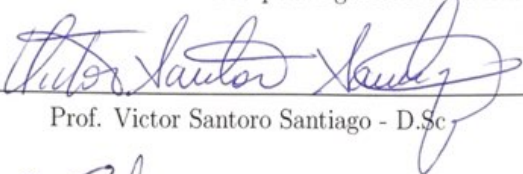
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Daniel Neri Nogueira do Nascimento
Modelagem e simulação de trajetória de Projéteis ar-terra

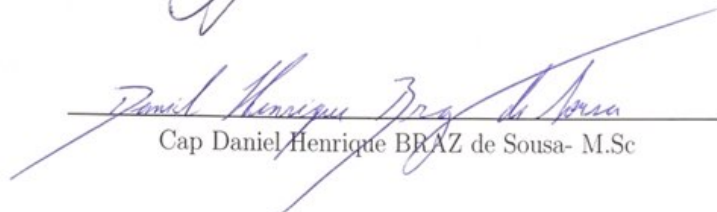
Projeto de Fim de Curso apresentado como requisito para conclusão do curso de graduação no Instituto Militar de Engenharia e obtenção do título de Engenheiro com habilitação em Mecânica e Armamento.

Orientador:
Prof. Victor Santoro Santiago

Aprovado em 07 de outubro de 2019 pela seguinte Banca Examinadora:


Prof. Victor Santoro Santiago - D.Sc


Ten Cel Maurício GRUZMAN - D.Sc


Cap Daniel Henrique BRAZ de Sousa- M.Sc

Rio de Janeiro

2019

Conteúdo

Lista de Figuras	6
Lista de Tabelas	7
1 INTRODUÇÃO	10
1.1 Problema físico	10
1.2 Modelo Matemático	10
1.3 Solução Numérica	11
1.4 Programas empregados	11
1.5 Objetivos	11
1.6 Revisão Bibliográfica	12
2 Modelagem de trajetórias balísticas	14
2.1 Conceitos fundamentais	15
2.1.1 Número de Mach	17
2.1.2 Coeficientes aerodinâmicos	18
2.2 Modelagem do ambiente e efeitos aerodinâmicos	18
2.2.1 Velocidade do vento atmosférico e da granada	18
2.2.2 Massa específica do ar	19
2.2.3 Temperatura	19
2.3 Forças e momentos aerodinâmicos que agem em projeteis	20
2.3.1 Gravidade	20
2.3.2 Força de Coriolis	21
2.3.3 Força de arrasto	21

2.3.4	Momento de amortecimento da rotação	23
2.3.5	Momento de rolagem para projeteis aletados	23
2.3.6	Momento de viragem	24
2.3.7	Força de sustentação	24
3	Modelo matemático	26
3.1	Trajectoria com o modelo de seis graus de liberdade	26
3.2	Modelo massa ponto modificado	29
3.3	Equacionamento do modelo massa-ponto modificado	29
4	Modelo numérico	34
4.1	Runge-kutta 4 ^a ordem	34
4.2	Desenvolvimento computacional	35
5	Levantamento dos coeficientes aerodinâmicos	36
5.1	Modelagem da bomba MK-82	36
5.1.1	Corpo da bomba	36
5.1.2	Aletas	37
5.1.3	Propriedades de massa	39
6	Validação dos coeficientes e da trajetória	42
6.1	Coeficientes aerodinâmicos	42
6.2	Trajectoria	44
6.3	Tabela balística	48
7	Conclusão	50

Lista de Figuras

2.1	Lançamento (KASPER; WRENN, 1966).	15
2.2	Referencial.	16
2.3	Movimentos do projétil adaptada de (CARLUCCI; JACOBSON, 2013).	16
2.4	Ângulo total de guinada adaptada de (CARLUCCI; JACOBSON, 2013).	17
2.5	Força de arrasto adaptada de (MCCOY, 1999).	22
2.6	Força de sustentação adaptada de (MCCOY, 1999).	25
5.1	Modelo da granada MK-82 gerado no PRODAS.	37
5.2	Elemento 4 da aleta.	38
5.3	Elemento 5 da Aleta.	38
5.4	Elemento 6 da aleta.	39
5.5	Elemento 7 da aleta.	39
5.6	Propriedades de massa.	40
5.7	Propriedades de massa.	41
6.1	Curvas dos coeficientes de força axial.	42
6.2	Curva dos coeficiente de força normal.	43
6.3	Curva dos coeficientes de momento de arfagem.	44
6.4	Situação de lançamento 1.	45
6.5	Situação de lançamento 2.	46
6.6	Situação de lançamento 3.	46
6.7	Situação de lançamento 4.	47

Lista de Tabelas

5.1	Resultados PRODAS	41
6.1	Situações de lançamento	45
6.2	Alcance e Tempo da trajetória	47
6.3	Comparação dos alcances e tempos	47
6.4	Tabela de lançamento gerada no MATLAB para ângulo de 10 graus. . . .	48
6.5	Tabela de lançamento gerada no MATLAB para ângulo de 20 graus. . . .	48
6.6	Tabela de lançamento gerada no MATLAB para ângulo de 30 graus. . . .	49

RESUMO

No atual cenário tecnológico, torna-se proveitosa e eficiente uma análise preliminar computacional anterior aos testes reais de armamentos, de forma a reduzir custos e evitar situações de elevado risco. Dessa forma, uma análise preliminar computacional, permite otimizar o desenvolvimento do projeto de armamentos.

O presente trabalho visa modelar, em um software, uma bomba MK-82 de aviação para o levantamento de seus coeficientes aerodinâmicos e compará-los aos coeficientes obtidos experimentalmente e gerados em software por outras literaturas, além de realizar o cálculo de sua trajetória e validá-la com tabelas balísticas existentes.

Palavras Chave: PRODAS, Modelagem e Simulação, Bomba MK-82.

ABSTRACT

In the current technological scenario, a preliminary computational analysis prior to the actual weapons tests becomes useful and efficient, in order to reduce costs and avoid high risk situations. Thus, a preliminary computational analysis allows to optimize the development of the armaments project.

The present work aims to model, in a software, an aviation pump MK-82 for the survey of its aerodynamic coefficients and to compare them to the coefficients obtained experimentally and generated in software by other literatures, besides performing the calculation of its trajectory and validating it with existing ballistic tables.

Keywords: PRODAS, Modeling and simulation, Bomb MK-82.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Problema físico

O problema físico em questão é o lançamento de uma bomba modelo MK-82 de um avião em movimento. Para tanto, todo o desenvolvimento da trajetória, bem como o levantamento dos coeficientes aerodinâmicos, de forma simplificada, leva em consideração aspectos físicos da interação do projétil com o escoamento e geométricos da bomba em análise.

Dessa forma, existem forças devidas ao escoamento do ar no projétil, interação entre a massa do projétil e a massa da Terra, dentre outras. Soma-se aos fatores que afetam a trajetória de um projétil, a variação de algumas propriedades como temperatura e umidade em razão da altitude em que o mesmo se encontra.

1.2 Modelo Matemático

O modelo físico mais simples, e o primeiro a ser abordado matematicamente, chama-se de Trajetória no Vácuo. Este modelo considera que todas as forças e momentos aerodinâmicos são zero. Embora simples, serve como base para modelos mais aprofundados.

Consequente a esse modelo, tem-se a Trajetória de um corpo Massa-Ponto. Este modelo considera a variação da densidade do ar, temperatura e o coeficiente de arrasto, além da força gravitacional. Dessa maneira, este modelo reduz o problema físico ao concentrar toda a massa em um ponto, o que retira da formulação diversas forças e momentos, permitindo a sua modelagem por um sistema de equações diferenciais ordinárias, representando a primeira solução para a Trajetória Massa-Ponto, e fornecendo uma boa aproximação da trajetória apenas para pequenos ângulos de guinada.

Consecutivo ao modelo Massa-Ponto, tem-se o modelo mais completo de obtenção da trajetória de um projétil, o modelo denominado Seis-Graus de Liberdade, que abrange projéteis rígidos e rotacionalmente simétricos, providos de todas as forças e momentos aerodinâmicos, além dos fatores levados em consideração em modelos mais simples, além de representar uma ótima aproximação da trajetória para qualquer ângulo de guinada.

O modelo matemático que será utilizado para abordar o problema físico em estudo e para desenvolver a trajetória balística é o Modelo Massa-Ponto Modificado. Este modelo, utilizado para projéteis rígidos e rotacionalmente simétricos, representa uma boa aproximação analítica da solução do modelo de seis graus de liberdade, para pequenos ângulos de guinada e curtos segmentos da trajetória. O modelo Massa-Ponto Modificado

extrai a solução particular e negligencia a solução epicíclica transiente, preservando assim a guinada de repouso, a deriva e, pelo menos, o efeito de arrasto de guinada.

1.3 Solução Numérica

No desenvolvimento da solução numérica da trajetória, que mais adiante será demonstrado através de equações diferenciais ordinárias (EDO's) representativas do problema físico em foco, o recurso empregado é o já consagrado Método de Runge-Kutta de 4ª ordem que pode gerar soluções numéricas precisas. Este método é de passo simples e requer apenas derivadas de primeira ordem.

1.4 Programas empregados

Na obtenção dos coeficientes aerodinâmicos pertinentes à solução do equacionamento físico, foi utilizado o software PRODAS. Para tanto fez-se necessário desenhar um modelo que representasse a bomba MK-82, bem como especificar o material da camada externa, representar suas aletas e inserir sua parte ogival. Este modelo serviu de entrada para a simulação realizada pelo PRODAS.

A modelagem matemática do problema físico conduz a um sistema de seis equações diferenciais que requer uma solução numérica. Para tanto foi escolhido o software MATLAB pelo fato da Seção de Engenharia Mecânica do IME possuir a licença institucional, e pelo software possibilitar o desenvolvimento do programa numérico para o cálculo da trajetória, bem como a possibilidade de gerar gráficos que representem a trajetória da bomba em questão.

1.5 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo o levantamento dos coeficientes aerodinâmicos da bomba Mk-82 pelo software PRODAS, sendo necessário para isso a modelagem da geometria da mesma no software, além de gerar um programa com o método numérico de Runge-Kutta 4ª ordem que calcule a trajetória da bomba, e compará-lo a outras soluções numéricas existentes. Para que esta solução possibilite gerar tabelas balísticas.

1.6 Revisão Bibliográfica

(BARANOWSKI; FRANT, 2017) comparam dois métodos para obtenção dos coeficientes aerodinâmicos do míssil não guiado de 122 mm. Para tanto, utilizam um método teórico-experimental através do software PRODAS, e um método teórico utilizando o software ANSYS, em que, através das equações de Navier-Stokes e do entendimento físico envolvido, utilizaram CFD (“computational fluid dynamics”) para a solução. Dessa maneira, o trabalho chega à conclusão de que os valores obtidos dos coeficientes aerodinâmicos, pelos dois métodos, ficaram limitados ao máximo de 10% de diferença.

(SU et al., 2007) fazem a comparação entre os coeficientes aerodinâmicos obtidos do projétil 155mm M864 a partir de testes em túnel de vento de um modelo de dimensões de 50% do original, e estimativas realizadas por simulações em programas empíricos e por métodos CFD. Desta maneira, o PRODAS e o DATCOM, que são baseados em métodos empíricos são utilizados para determinação preliminar dos coeficientes, e o ANSYS/FLUENT é o software escolhido para utilizar o método CFD. Como resultado, os quatro caminhos utilizados obtiveram bons resultados, dentro da faixa de 10% de diferença, sendo o DATCOM o que mais destoou dos demais apresentando a única exceção para o coeficiente de força axial, C_A de 25%.

(DUPUIS, 2001) estimam os coeficientes aerodinâmicos a partir de três modelos empíricos-teóricos e um modelo CFD, para posteriormente serem utilizados em um programa que aborda a trajetória em um modelo de seis graus de liberdades (6-DOF) para prever e comparar performance com os resultados de voo livre. Neste artigo, a análise foi feita sobre a granada MK-82 com números de Mach variando entre 0.6 e 1.5. Para o estudo em questão, são utilizados modelos em escala de 18,6% para redução de custos de produção e teste dos voos livres. Como conclusão dos resultados obtidos foi verificado que somente um método, por vezes, pode destoar consideravelmente da realidade, pois com a variação do número de Mach, os resultados extraídos do PRODAS, DATCOM e AP95 não correspondem aos resultados de voo livre para toda a faixa do número de Mach. No entanto, se empregados em conjunto podem obter resultados bem confiáveis.

(ATTALLAH et al., 2015) trabalham com o modelo e simulação de uma granada não guiada. O trabalho tem como objetivo contribuir com a trajetória da granada e obtenção dos coeficientes aerodinâmicos a partir do programa “MISSELI DATCOM”, para se ter maior precisão na soltura de granadas ar-terra. Para a obtenção da trajetória foi escolhido o método de seis graus de liberdade (6-DOF) solucionado no software livre MATLAB. O trabalho conseguiu extrair das simulações a importância de levar em consideração os efeitos do vento na precisão da soltura da bomba.

(BOZZA; GANDUR; BRITO, 2018) realizam os cálculos da trajetória de uma munição 105mm de artilharia de campanha, a partir de coeficientes aerodinâmicos extraídos do programa PRODAS, já existentes no mesmo. Para isso implementam uma rotina numérica no “software” livre OCTAVE, através do método numérico de Runge-kutta de 4ª ordem para solução das equações desenvolvidas. Além disso, o trabalho realiza uma comparação entre a trajetória gerada pelo PRODAS com a obtida pelos autores no OCTAVE.

(BARBOSA; BLANCO, 2005) fazem a análise da trajetória balística do projétil M1 105mm a partir de três abordagens diferentes: Modelo massa-ponto; modelo massa-ponto modificado; e o modelo de seis graus de liberdade (6-DOF), a partir de dados aerodinâmicos e das propriedades de massa já existentes no PRODAS. Com isso, para diferentes situações de lançamento, são feitas comparações entre os resultados obtidos por cada modelo de abordagem da trajetória.

2 Modelagem de trajetórias balísticas

A partir de (KASPER; WRENN, 1966), extrai-se o entendimento de como se dá o lançamento de uma bomba mk-82, que leva em consideração na determinação da altitude de lançamento (A), a altitude de mergulho do avião, além da altitude de retirada da bomba dada por D , sendo, a seguir, formulada a altitude de lançamento (A), além da figura que ilustra como ocorre um lançamento da bomba:

$$A = V.T.\text{sen}(\theta) + D + H \quad (2.1)$$

Onde:

A = altitude de lançamento

V = velocidade do avião

T = tempo de demora do início da retirada da bomba, pelo piloto, para o efetivo instante de soltura (estimado em 2.25 s)

θ = ângulo de mergulho do avião

D = altitude de recuperação do avião

H = altitude de retirada

Na modelagem da trajetória de artefatos ar-terra, o momento no qual inicia-se a contagem do tempo é o instante em que o piloto inicia o mergulho da aeronave, contando este tempo e o momento no qual a bomba é solta do avião, a partir do qual a mesma estará livre para sofrer a influência da força de gravidade e da resistência do ar, dando-se assim a sua trajetória. A trajetória será desenvolvida a partir de referenciais pré-estabelecidos e conceitos físicos e dinâmicos da Mecânica Clássica.

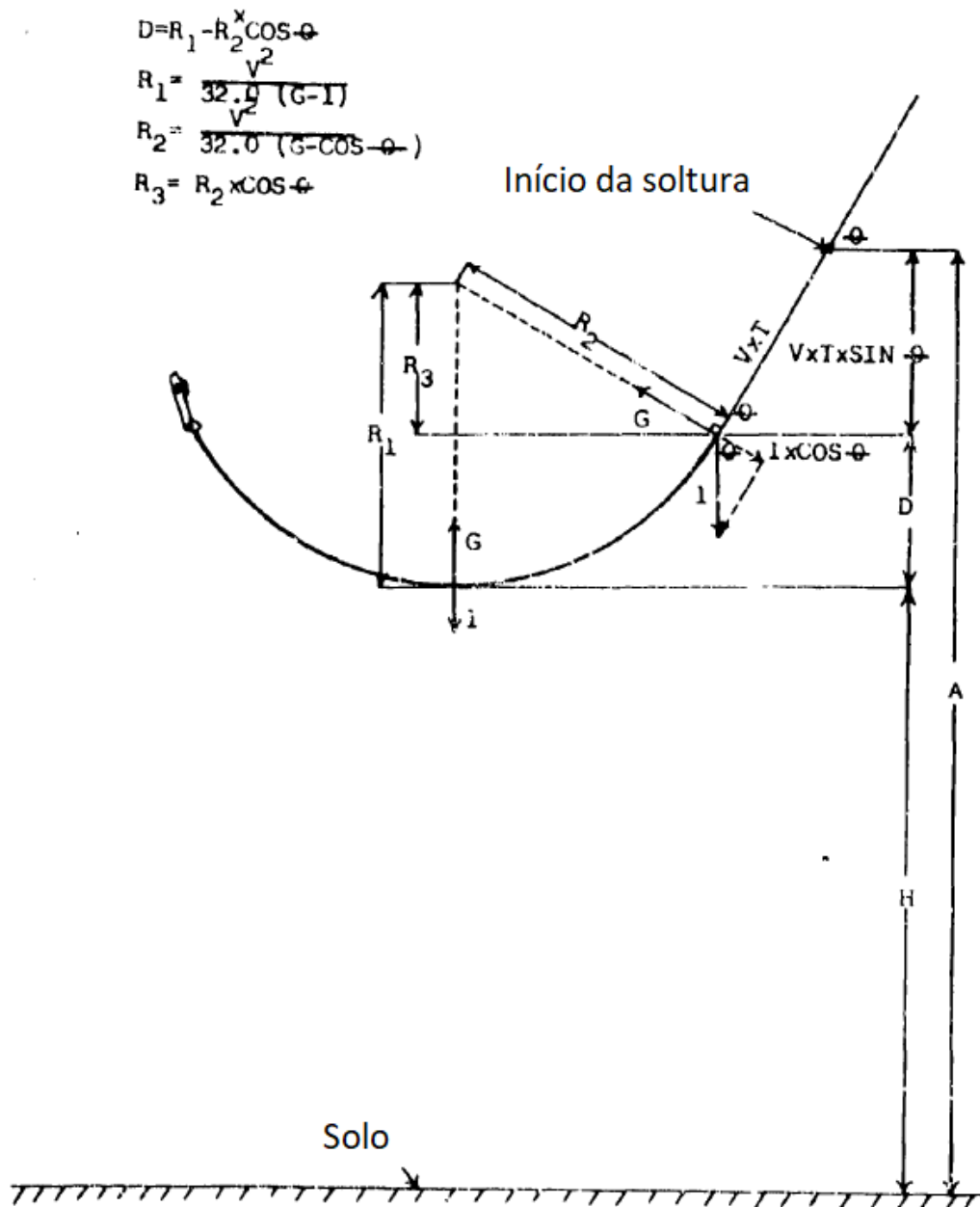


Figura 2.1: Lançamento (KASPER; WRENN, 1966).

2.1 Conceitos fundamentais

É utilizado um referencial para poder definir as posições, velocidades e acelerações, sendo o referencial fixo, a posição no momento de soltura da bomba (imaginário) que por sua vez é fixo à Terra. É adotado um triedro positivo formado pelos eixos OX, OY e OZ. O plano XZ é horizontal e serve de referência para a determinação do ângulo de elevação ϕ . Já o plano XY corresponde à referência para o ângulo de deriva Θ .

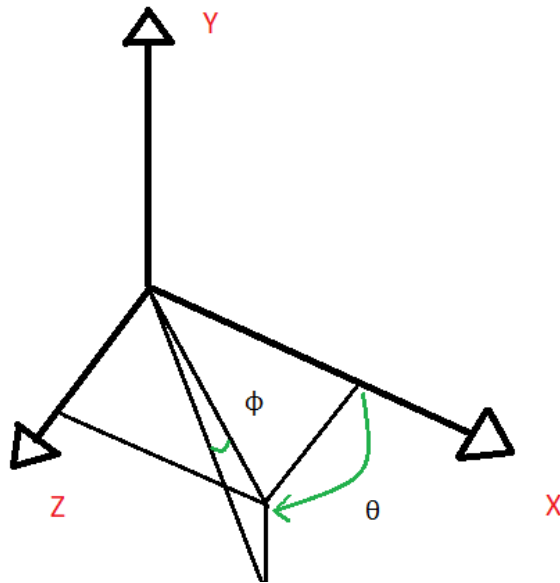


Figura 2.2: Referencial.

Alguns conceitos fundamentais para a balística externa são os movimentos de guinada, arfagem e rotação, como segue na figura 2.3:

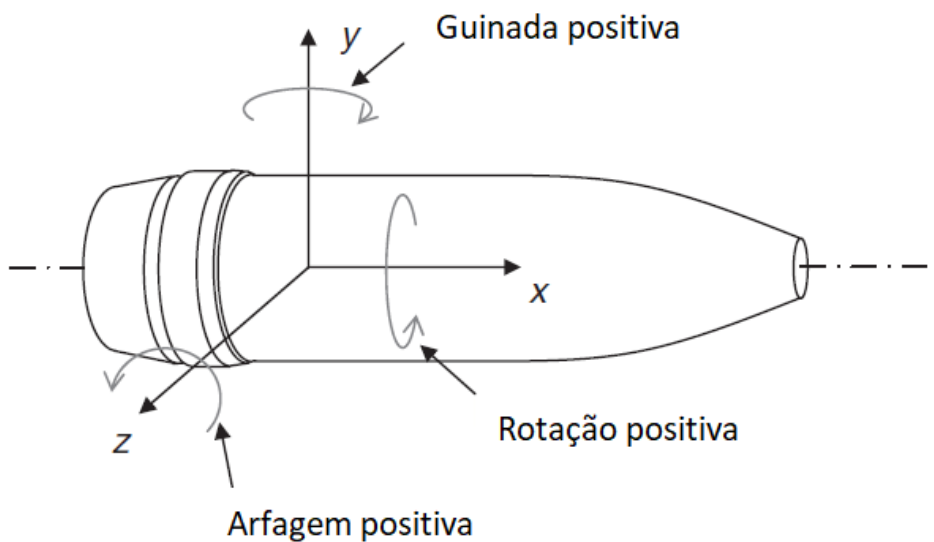


Figura 2.3: Movimentos do projétil adaptada de (CARLUCCI; JACOBSON, 2013).

Além disso, uma definição importante é a do ângulo total de guinada, α_t . Este ângulo é uma composição dos ângulos de guinada (α) e arfagem (β) em relação ao vetor velocidade (\mathbf{V}), como visto na figura a seguir de (CARLUCCI; JACOBSON, 2013):

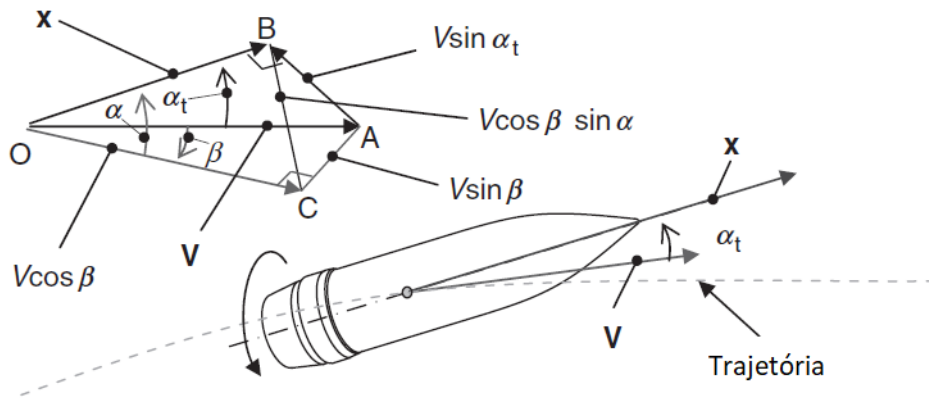


Figura 2.4: Ângulo total de guinada adaptada de (CARLUCCI; JACOBSON, 2013).

2.1.1 Número de Mach

O número de Mach é definido como a razão entre a velocidade do escoamento, V , e a velocidade do som, c , no meio (PRITCHARD; MITCHELL; LEYLEGIAN, 2016). Sua determinação, dada pela Eq. 2.2, é importante pois no estudo das trajetórias balísticas é necessário o conhecimento sobre o escoamento, de forma que o escoamento pode ser supersônico, $Mach > 1$ ou subsônico, $Mach < 1$. Em escoamentos supersônicos, os efeitos de compressibilidade não são desprezíveis, alterando drasticamente as equações.

$$M = \frac{V}{c} \quad (2.2)$$

Além disso, a velocidade do som não é constante, a mesma pode variar para diferentes temperaturas e meios gasosos da seguinte maneira:

$$c = \sqrt{kRT} \quad (2.3)$$

onde:

k = Razão dos calores específicos;

R = Constante do gás;

T = Temperatura absoluta.

Considerando V como a velocidade da bomba e W a velocidade do ar, define-se M no presente trabalho da seguinte maneira:

$$M = \frac{\vec{V} - \vec{W}}{c} \quad (2.4)$$

2.1.2 Coeficientes aerodinâmicos

Os coeficientes aerodinâmicos são números adimensionais que traduzem o comportamento do escoamento sobre a superfície de um corpo. Desta maneira os coeficientes podem ser de arrasto, C_d , de amortecimento do momento de rolagem, C_{l_p} , de sustentação C_{l_α} , de força normal, C_{N_α} , de força axial, C_X , de momento de viragem, C_{M_α} , de força Magnus, $C_{N_{p\alpha}}$, de momento Magnus, $C_{M_{p\alpha}}$, de amortecimento da força de viragem, $(C_{N_q} + C_{N_\alpha})$, e de amortecimento do momento de viragem, $(C_{M_q} + C_{M_\alpha})$.

Como objetivo do presente trabalho, tais coeficientes serão obtidos do programa PRODAS, a partir do desenvolvimento da bomba MK-82 neste software, porém será dada ênfase aos coeficientes pertinentes ao modelo de trajetória estabelecido.

2.2 Modelagem do ambiente e efeitos aerodinâmicos

O ambiente é um grande influenciador na balística externa. Dessa forma alguns fatores são levados em consideração no desenvolvimento físico como a velocidade do vento, resistência do ar, gravidade, massa específica e a temperatura do ar. Dessa forma, estes fatores serão explorados nesta seção.

2.2.1 Velocidade do vento atmosférico e da granada

A velocidade do vento e a velocidade da granada são decompostas em suas componentes unitárias da seguinte forma (MCCOY, 1999):

$$\vec{V} = V_x \vec{I} + V_y \vec{J} + V_z \vec{K} \quad (2.5)$$

$$\vec{W} = W_x \vec{I} + W_y \vec{J} + W_z \vec{K} \quad (2.6)$$

onde:

\vec{I} é um vetor unitário ao longo do eixo X;

\vec{J} é um vetor unitário ao longo do eixo Y;

\vec{K} é um vetor unitário ao longo do eixo Z;

V_x, V_y, V_z são componentes da velocidade da granada;

W_x, W_y, W_z são componentes da velocidade do vento.

2.2.2 Massa específica do ar

A redução da densidade do ar com o aumento da altitude, para altitudes moderadas, é descrita da seguinte maneira (MCCOY, 1999):

$$\rho(Y) = \rho_o e^{-hY} \quad (2.7)$$

onde:

ρ_o = Densidade do ar local;

Y = Altitude da granada;

$\rho(Y)$ = Densidade do ar para a altitude da granada;

h = Fator de decaimento da densidade do ar.

2.2.3 Temperatura

A temperatura é obtida a partir dos dados meteorológicos, e caso seja necessário ou caso se deseje, a equação pode ser convertida em graus Celsius, objetivando os cálculos.

$$T(Y) = [T_o(^{\circ}F) + 459.67]e^{KY} - 459.67 \quad (2.8)$$

onde:

$T_o(^{\circ}F)$ = Temperatura do ar padrão local;

Y = Altitude da granada;

$T(Y)$ = Temperatura do ar na altitude da granada;

K = Fator de decaimento da temperatura.

2.3 Forças e momentos aerodinâmicos que agem em projeteis

2.3.1 Gravidade

A força peso é a força de origem gravitacional e surge da interação mútua entre dois corpos. Sendo a Terra possuidora de uma massa muito maior que a de um objeto como uma granada, desconsidera-se, frente a grandeza da Terra, a força gravitacional da granada sobre a Terra, sendo levado em consideração apenas a força gravitacional sobre a granada. No cálculo desta força é necessário saber o raio da Terra, a altitude da granada em relação a superfície da Terra e a latitude. Sendo a aceleração gravitacional na direção Y expressa da seguinte maneira (MCCOY, 1999):

$$\vec{F}_g = m \vec{g} \quad (2.9)$$

$$\vec{g} = 9.81[1 - 0.0026\cos(2L)](1 - \frac{2R_z}{R}) \quad (2.10)$$

onde:

\vec{F}_g = Vetor força gravitacional

m = Massa da granada

\vec{g} = Vetor aceleração da gravidade

L = Latitude

R_z = Altitude

R = Raio médio da Terra [$R = 6356766$ m, segundo (MCCOY, 1999)]

2.3.2 Força de Coriolis

A aceleração de Coriolis surge como consequência da observação do movimento de um objeto num sistema de coordenadas não inercial, isto é, um sistema de coordenadas fixo sobre a superfície, que gira com ela. Dessa forma, a superfície é a Terra, que possui velocidade de rotação constante de forma a alterar o movimento do objeto para a direita, no hemisfério Norte, e para a esquerda, no hemisfério Sul.

O vetor aceleração de Coriolis é descrito da seguinte maneira:

$$\vec{\Lambda} = 2\Omega \begin{bmatrix} -V_y \cos(L) \operatorname{sen}(AZ) - V_z \operatorname{sen}(L) \\ V_x \cos(L) \operatorname{sen}(AZ) + V_z \cos(L) \cos(AZ) \\ V_x \operatorname{sen}(L) - V_y \cos(L) \cos(AZ) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

onde:

$\vec{\Lambda}$ = Vetor aceleração de Coriolis

$\Omega = 0.00007292$ rad/s; [velocidade angular da Terra, sobre seu eixo polar]

V_x, V_y, V_z são componentes da velocidade da granada;

W_x, W_y, W_z são componentes da velocidade do vento.

L = Latitude

R_z = Altitude

AZ = Azimute

2.3.3 Força de arrasto

A força de arrasto aerodinâmica se opõe à velocidade do projétil em função das forças de contato na superfície, sendo composta pelo arrasto de forma (pressão) e de superfície (viscosidade), independentemente da direção para qual ele aponta (MCCOY, 1999) como ilustrado na figura 2.5:

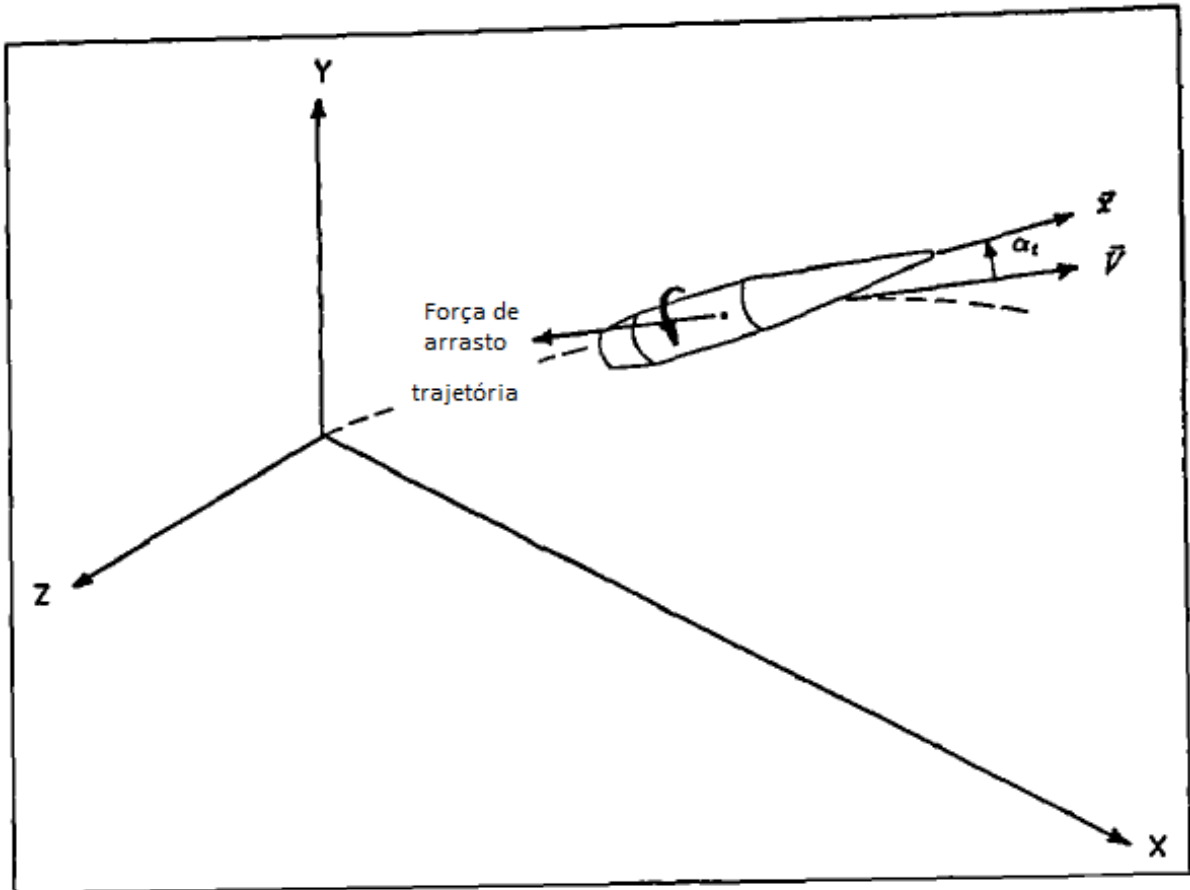


Figura 2.5: Força de arrasto adaptada de (MCCOY, 1999).

Forma vetorial e escalar da força de arrasto:

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\rho S C_D V^2 \vec{i} \quad (2.12)$$

$$F_D = -\frac{1}{2}\rho S C_D V^2 \quad (2.13)$$

onde:

ρ = densidade do ar;

\vec{V} = Vetor velocidade;

V = Magnitude do vetor velocidade;

\vec{i} = Vetor unitário na direção do vetor velocidade;

S = Projeção da área de referencia;

C_D = Coeficiente de arrasto.

2.3.4 Momento de amortecimento da rotação

O momento de amortecimento da rotação, como o próprio nome sugere, é um momento que se opõe à rotação do projétil, de forma a reduzir sua velocidade de rotação. Sua formulação matemática fica da seguinte forma:

$$\text{Vetor momento de amortecimento da rotação} = \frac{1}{2}\rho V^2 S d \left(\frac{pd}{V}\right) C_{l_p} \vec{x} \quad (2.14)$$

onde:

ρ = Densidade do ar

V = Velocidade do projétil

S = Projeção da área de referência

d = Diâmetro de referência

p = rotação [rad/s]

C_{l_p} = Coeficiente de momento de amortecimento da rotação

\vec{x} = Vetor unitário ao longo do eixo de simetria do projétil.

2.3.5 Momento de rolagem para projeteis aletados

Devido às aletas inclinadas, um momento de rolagem no projétil tende a aumentar sua velocidade de rotação ao longo da trajetória, de forma a se contrapor ao momento de amortecimento da rotação. Com isso o projétil se aproxima de um estado estacionário de rotação, instante em que estes momentos se equilibram, dando ao projétil, como consequência, uma rotação constante (MCCOY, 1999). Sua formulação matemática é:

$$\text{Vetor momento de rolagem} = \frac{1}{2}\rho V^2 S d \delta C_{l_{\delta F}} \vec{x} \quad (2.15)$$

onde:

ρ = densidade do ar;

V = Velocidade do projétil;

S = Projeção da área de referencia;

d = Diâmetro de referência;

δ_F = Ângulo de inclinação da aleta;

C_{l_δ} = Coeficiente do momento de rolagem;

\vec{x} = Vetor unitário ao longo do eixo de simetria do projétil.

2.3.6 Momento de viragem

O momento de viragem é o momento aerodinâmico associado à força de sustentação ou normal (MCCOY, 1999). Seu valor varia com o seno do ângulo total de guinada. Para projeteis com aletas na cauda, a sustentação causada por elas é superior se comparada à gerada pelo nariz do projétil, resultando dessa forma em um coeficiente de momento de viragem ($C_{M\alpha}$) negativo. Sua formulação matemática é:

$$\text{Vetor momento de viragem} = \frac{1}{2}\rho S d C_{M\alpha} V^2 (\vec{i} \times \vec{x}) \quad (2.16)$$

ou na forma escalar:

$$\text{Momento de viragem} = \frac{1}{2}\rho S d C_{M\alpha} V^2 \sin(\alpha_t) \quad (2.17)$$

2.3.7 Força de sustentação

Força de sustentação aerodinâmica é uma força perpendicular à trajetória do projétil tendendo a levantar o projétil na direção em que seu nariz está apontando (MCCOY, 1999), caso o nariz esteja para baixo, então seria a força que impulsionaria o projétil para baixo. A Força de sustentação é definida como se segue:

$$\vec{F}_L = \frac{1}{2} S C_{L\alpha} [\vec{V} \times (\vec{x} \times \vec{V})] = \frac{1}{2} \rho S C_{L\alpha} V^2 [\vec{i} \times (\vec{x} \times \vec{i})]; \quad (2.18)$$

ou na forma escalar:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{L\alpha} \sin \alpha_t \quad (2.19)$$

onde:

ρ = densidade do ar;

V = Velocidade do projétil;

S = Projeção da área de referencia;

C_{l_α} = Coeficiente do momento de rolagem;

α_t = ângulo total de guinada.

A força de sustentação cessa apenas para valores do ângulo de guinada iguais a zero, pois sua força é proporcional ao seno do ângulo total de guinada.

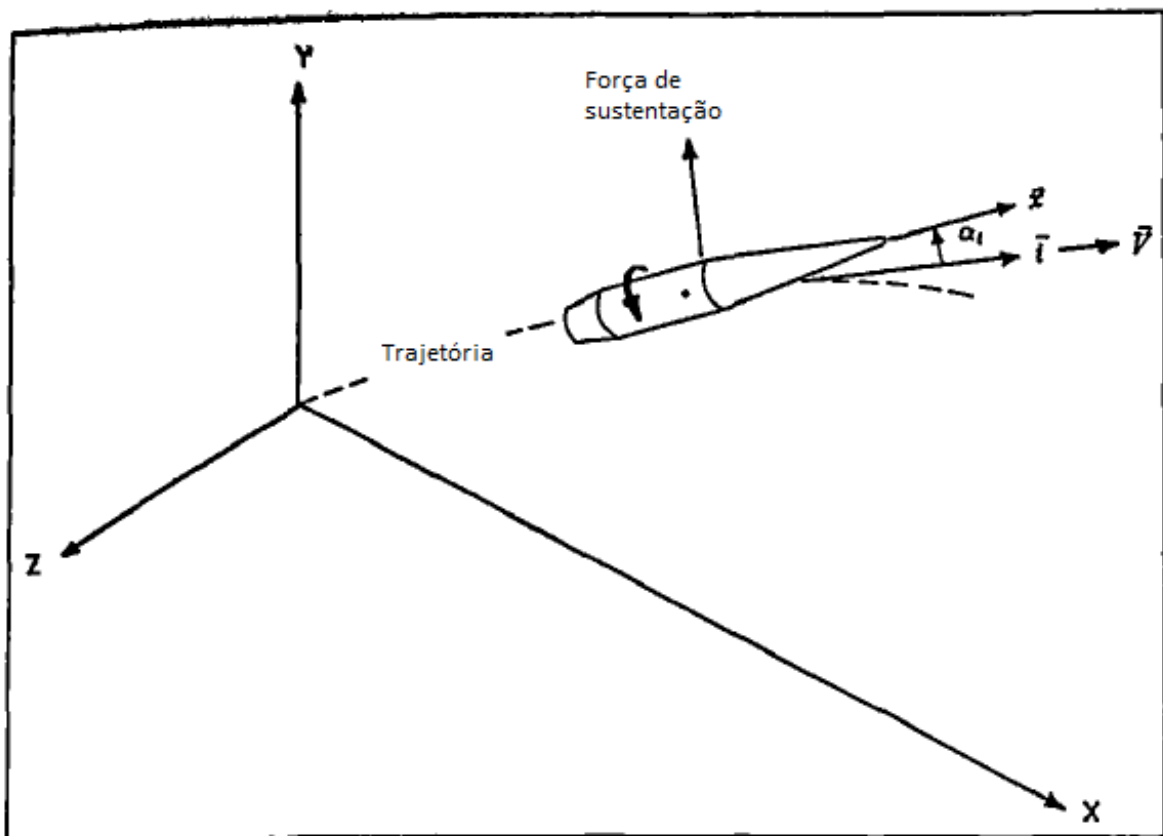


Figura 2.6: Força de sustentação adaptada de (MCCOY, 1999).

3 Modelo matemático

3.1 Trajetória com o modelo de seis graus de liberdade

O equacionamento da trajetória do modelo de seis graus de liberdade inicia-se com todas as forças e momentos atuantes que podem existir sobre um projétil, dito isso, a partir da equação de Newton, sendo aplicada a um projétil tem-se:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F} + m \vec{g} + m \vec{\Lambda} + \text{Forças de impulsão de foguete} \quad (3.1)$$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum \vec{M} + \text{Momentos de impulsão de foguete} \quad (3.2)$$

onde:

$\sum F$: soma das forças aerodinâmicas

\vec{V} : velocidade do projétil em relação ao solo

$\vec{\Lambda}$: vetor aceleração de Coriolis

O vetor unitário \vec{x} está direcionado ao longo do eixo do projétil, sendo positivo no sentido da calda para o nariz. Além disso o projétil é considerado axissimétrico e rígido, ou seja, não flexível.

O vetor velocidade angular total perpendicular ao eixo do projétil é dado pelo seguinte produto vetorial $A = \left(\vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right)$.

O momento angular tem duas componentes. A componente em \vec{x} seu valor é $I_x p \vec{x}$, já sua segunda componente, perpendicular a primeira é $B = I_y \left(\vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right)$.

Dessa forma, o momento angular total \vec{H} é dado por:

$$\vec{H} = I_x p \vec{x} + I_y \left(\vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right) \quad (3.3)$$

Onde:

I_x : momento de inércia axial

I_y : momento de inércia transversal

p : rotação axial [rad/s]

Definindo \vec{h} como $\vec{h} = \frac{\vec{H}}{I_y}$ e dividindo ambos os lados da equação 3.3 por I_y tem-se:

$$\vec{h} = \frac{I_x p}{I_y} \vec{x} + \left(\vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right) \quad (3.4)$$

A taxa de variação do momento angular dividido por I_y é:

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{I_x \dot{p}}{I_y} + \frac{I_x p}{I_y} \frac{d\vec{x}}{dt} + \left(\vec{x} \times \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \right) \quad (3.5)$$

Tem-se ainda os produtos escalar e vetorial de \vec{h} por \vec{x} :

$$\left(\vec{h} \cdot \vec{x} \right) = \frac{I_x p}{I_y} \quad (3.6)$$

$$\left(\vec{h} \times \vec{x} \right) = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (3.7)$$

As equações diferenciais do modelo de seis graus de liberdade para um projétil rígido, axissimétrico, sujeito a todas as forças e momentos aerodinâmicos apresentados em 2.3, além das forças de gravidade e Coriolis, são representadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} = & -\frac{\rho v S C_D}{2m} \vec{v} + \frac{\rho S C_{L\alpha}}{2m} [v^2 \vec{x} - (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v}] \\ & - \frac{\rho S d C_{Np\alpha}}{2m} \left(\frac{I_y}{I_x} \right) \left(\vec{h} \cdot \vec{x} \right) (\vec{x} \times \vec{v}) \\ & + \frac{\rho v S d (C_{Nq} + C_{N\alpha})}{2m} (\vec{h} \times \vec{x}) + \vec{g} \\ & + \vec{\Lambda} + \frac{gT}{m} \vec{x} + \left(\frac{I_y}{mr_t} - \frac{\dot{m}r_e}{m} \right) (\vec{h} \times \vec{x}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{h}}{dt} = & \frac{\rho v S d^2 C_{lp}}{2I_x} (\vec{h} \cdot \vec{x}) \vec{x} + \frac{\rho v^2 S d \delta_F C_{l\delta}}{2I_y} \vec{x} + \frac{\rho v S d C_{M\alpha}}{2I_x} (\vec{v} \times \vec{x}) \\
& + \frac{\rho S d^2 C_{Mp\delta}}{2I_x} (\vec{h} \cdot \vec{x}) [\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{x}] \\
& + \frac{\rho v S d^2 (C_{Mq} + C_{M\alpha})}{2I_y} [\vec{h} - (\vec{h} \cdot \vec{x}) \vec{x}] \\
& + \frac{g T_s}{I_y} \vec{x} - \left(\frac{\dot{I}_y - \dot{m} r_e r_t}{I_y} \right) [\vec{h} - (\vec{h} \cdot \vec{x}) \vec{x}]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

A equação 3.8 descreve a equação diferencial do movimento do centro de massa projétil. A equação 3.9 apresentada, descreve o momento angular do projétil (rolagem, arfagem e guinada).

Onde:

\vec{h} : vetor momento angular dividido pelo momento de inércia transversal I_y

t : tempo

C_D : coeficiente de arrasto

$C_{L\alpha}$: coeficiente de sustentação

$C_{Np\alpha}$: coeficiente da força Magnus

$(C_{Nq} + C_{N\alpha})$: coeficiente de amortecimento da força de arfagem

C_{lp} : coeficiente do momento de amortecimento de rotação

$C_{l\delta}$: coeficiente do momento de rolagem devido ao ângulo de aleta

δ_F : ângulo de canto da aleta

$C_{M\alpha}$: coeficiente do momento de arfagem

$C_{Mp\alpha}$: coeficiente do momento Magnus

$\vec{\Lambda}$: vetor aceleração de Coriolis

T : força de impulso foguete

T_s : momento de rolagem devido ao torque de giro do foguete

r_t : distância do centro de massa do projétil até nariz do mesmo

r_e : distância do centro de massa à calda do projétil

$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$: taxa de variação da massa do projétil

$\dot{I}_y = \frac{dI_y}{dt}$: taxa de variação do momento inercial transversal do foguete

As equações 3.8 e 3.9 estão acopladas de forma que devem ser resolvidas simultaneamente, o que resulta numa maior complexidade na solução numérica.

3.2 Modelo massa ponto modificado

A solução das equações 3.8 e 3.9, para o modelo de seis graus de liberdade trata não apenas do regime “permanente” da solução, como também trata do regime “transiente”. Sendo assim, o movimento epicíclico, bem como o movimento de guinada fazem parte da solução das equações. A solução numérica do modelo 6GL requer um passo no tempo muito pequeno para capturar o movimento epicíclico de alta frequência.

O modelo massa-ponto modificado aborda um projétil rotacionalmente simétrico, o que faz com que o equacionamento do movimento de giro (“spinning moment” ou “rolling moment”) seja desacoplado do equacionamento do movimento de arfagem e guinada ao longo da trajetória por ser muito pequeno. Além disso, a simplificação para este modelo desconsidera o movimento epicíclico, que corresponde a uma resposta transiente do movimento, de forma a considerar um ângulo de ataque de repouso α_R . Assim, para que esta abordagem tenha boa representatividade, o problema físico em estudo deve apresentar pequenos movimentos de guinada ao longo da trajetória.

Sendo assim, este modelo, também chamado de 4 graus de liberdade, possui como variáveis as coordenadas de posição (x, y e z) além do seu vetor guinada de repouso, α_R .

3.3 Equacionamento do modelo massa-ponto modificado

Com todas as forças devidas a impulsão de foguete negligenciadas, bem como os momentos, aliados a uma força de amortecimento de arfagem também negligenciada, pois para o caso do lançamento de bomas estes esforços e momentos negligenciados não têm preponderância, tem-se das equações 3.8 e 3.9:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = - [\tilde{C}_D] \vec{v} + [\tilde{C}_{l\alpha}] [\vec{v} \times (\vec{x} \times \vec{v})] + [\tilde{C}_{Np\alpha}] (\vec{v} \times \vec{x}) + \vec{g} + \vec{\Lambda} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{h}}{dt} = & \left([\tilde{C}_{lp}] + [\tilde{C}_{l\delta}] \right) \vec{x} + [\tilde{C}_{M\alpha}] (\vec{v} \times \vec{x}) \\ & + [\tilde{C}_{Mp\alpha}] [\vec{x} \times (\vec{v} \times \vec{x})] + [\tilde{C}_{Mq}] \left(\vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

O vetor \vec{x} é sempre perpendicular a sua derivada, ou seja, o produto escalar entre ambos é zero. Tomando o produto escalar de \vec{x} com a equação 3.11 e multiplicando ambos os lados por (I_y/I_x) , sendo p a velocidade de rotação, tem-se:

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{I_y}{I_x} \right) \left([\tilde{C}_{Lp}] + [\tilde{C}_{L\delta}] \right) \quad (3.12)$$

A equação 3.12 demonstra a consequência do projétil ser rotacionalmente simétrico. O movimento de rotação é independente dos movimentos de arfagem e guinada. Assim, substituindo a equação 3.12 em 3.11 obtém-se a equação 3.13 que juntamente com as equações 3.10 e 3.12 formam a solução de seis graus de liberdade, com todas as forças e momentos de impulsão de foguete negligenciados, bem como as forças de amortecimento de arfagem:

$$\begin{aligned} \frac{I_x p}{I_y} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right) + \left(\vec{x} \times \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \right) = & [\tilde{C}_{M\alpha}] (\vec{v} \times \vec{x}) + [\tilde{C}_{Mp\alpha}] [\vec{x} \times (\vec{v} \times \vec{x})] \\ & + [\tilde{C}_{Mq}] (\vec{x} \times \vec{x}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde:

$$[\tilde{C}_D] = \frac{\rho v S C_D}{2m}$$

$$[\tilde{C}_{L\alpha}] = \frac{\rho S C_{L\alpha}}{2m}$$

$$[\tilde{C}_{Np\alpha}] = \frac{\rho S d C_{Np\alpha p}}{2m}$$

$$[\tilde{C}_{lp}] = \frac{\rho v S d^2 C_{lp p}}{2I_y}$$

$$[\tilde{C}_{l\delta}] = \frac{\rho v^2 S d_F C_{l\delta}}{2I_y}$$

$$[\tilde{C}_{M\alpha}] = \frac{\rho v S d C_{M\alpha}}{2I_y}$$

$$\left[\tilde{C}_{Mp\alpha} \right] = \frac{\rho S d^2 C_{Mp\alpha p}}{2I_y}$$

$$\left[\tilde{C}_{Mq} \right] = \frac{\rho v S d^2 (C_{Mq} + C_{M\alpha})}{2I_y}$$

Esta abordagem do modelo massa-ponto modificado para pequenos ângulos de guinada e segmentos curtos da trajetória possui solução analítica aproximada, a qual descreve o movimento de arfagem e guinada de um artefato rígido e rotacionalmente simétrico, a qual contempla uma parcela relativa ao movimento epicíclico, e outra parcela que representa a trajetória com um ângulo de ataque permanente denominado ângulo de ataque de repouso α_R .

O vetor guinada de repouso α_R tem magnitude de $(\text{sen}\alpha_t)$, onde α_t é o ângulo total de ataque e possui direção perpendicular à trajetória. Sua definição e a sua equação diferencial no tempo são:

$$\vec{\alpha}_R = \vec{i} \times (\vec{x} \times \vec{i}) \approx \vec{x} - (\text{cos}\alpha_t) \vec{i} \quad (3.14)$$

$$\frac{d\vec{\alpha}_R}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} - (\text{cos}\alpha_t) \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right) + (\text{sen}\alpha_t) \vec{i} \quad (3.15)$$

onde:

$\vec{i} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$: vetor unitário na direção da velocidade

Para ângulos pequenos de guinada, tem-se que $\text{sen}\alpha_t \ll \text{cos}\alpha_t$. Além disso, $\frac{d\vec{\alpha}_R}{dt}$ é negligenciado em comparação com α_R de forma que:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} \approx (\text{cos}\alpha_t) \frac{d\vec{i}}{dt} \quad (3.16)$$

Diferenciando a equação 3.16 tem-se:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \approx (\text{cos}\alpha_t) \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} \quad (3.17)$$

Da solução da equação 3.14 em \vec{x} tem-se:

$$\vec{x} \approx \vec{\alpha}_R + (\text{cos}\alpha_t) \vec{i} \quad (3.18)$$

Com isso desenvolve-se o modelo massa-ponto modificado, a partir das equações 3.16 a 3.18 aplicadas às equações 3.10 e 3.13, o que conduz a:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = - [\tilde{C}_D] v \vec{i} + [\tilde{C}_{L\alpha}] v^2 \vec{\alpha}_R + [\tilde{C}_{Np\alpha}] v (\vec{i} \times \vec{\alpha}_R) + \vec{g} + \vec{\Lambda} \approx \dot{V} \vec{i} + V \frac{d\vec{i}}{dt} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \Gamma \frac{I_x P}{I_y} \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right) + \gamma \left(\vec{\alpha}_R \times \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} \right) &= [\tilde{C}_{M\alpha}] v (\vec{i} \times \vec{\alpha}_R) - [\tilde{C}_{Mp\alpha}] v [\gamma \vec{\alpha}_R - (\text{sen}^2 \alpha) \vec{i}] \\ &+ \gamma [\tilde{C}_M] \left[(\vec{\alpha}_R + \gamma \vec{i}) \times \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Onde: $\gamma = (\vec{i} \cdot \vec{x}) = \cos \alpha_t$

Assim, após negligenciar o termo de Coriolis por ser muito pequeno em comparação a gravidade (\vec{g}), bem como ($\text{sen}^2 \alpha_t$) em comparação com γ por ser muito pequeno, desenvolve-se a solução do sistema para α_R em um projétil estabilizado pela rotação:

$$\alpha_R = \frac{-2I_x C_{L\alpha} p \left(\vec{v} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right) - 2m d^2 p C_{Mp\alpha} \left[\vec{v} \times \left(\frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{g} \right) \right]}{\rho S d v^2 [v^2 C_{L\alpha} C_{M\alpha} + p^2 d^2 C_{N\alpha} C_{Mp\alpha}]} \quad (3.21)$$

São levadas em consideração neste trabalho apenas as forças de arrasto e sustentação, pois uma vez que a rotação é próxima a zero todos as forças e momentos de rotação serão desprezados, bem como a aceleração de Coriolis por representar pouca variação no alcance, conforme explicitado nas tabelas que relacionam o seu efeito em (MCCOY, 1999). Assim, equacionadas segundo à lei de Newton, e após substituir α_R em 3.10 chega-se a:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \vec{g} - \frac{\rho S c_D}{2} |\vec{V} - \vec{W}| (\vec{V} - \vec{W}) + \frac{\rho S c_{L\alpha}}{2} |\vec{V} - \vec{W}|^2 \alpha_R \quad (3.22)$$

Onde o vetor guinada de repouso, α_R , será utilizado como segue na referência (MCCOY, 1999), para a simplificação abordada na referência sobre foguetes sem rotação e estabilizados por aletas, por ser entendido como o modelo mais próximo ao caso em desenvolvimento:

$$\vec{\alpha}_R = \left(\frac{C_{M_q} d}{C_{M_\alpha} V^4} \right) [\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{g})] \quad (3.23)$$

Desta forma, para obter-se as componentes da aceleração basta decompor a equação 3.22 nas componentes x, y e z, e dividir a mesma por m, permitindo escrever a equação 3.24.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{\rho S c_D}{2m} |\vec{V}_x - \vec{W}_x| (\vec{V}_x - \vec{W}_x) + \frac{\rho S c_{L\alpha}}{2m} |\vec{V}_x - \vec{W}_x|^2 \alpha_R \\ \vec{g} - \frac{\rho S c_D}{2m} |\vec{V}_y - \vec{W}_y| (\vec{V}_y - \vec{W}_y) + \frac{\rho S c_{L\alpha}}{2m} |\vec{V}_y - \vec{W}_y|^2 \alpha_R \\ -\frac{\rho S c_D}{2m} |\vec{V}_z - \vec{W}_z| (\vec{V}_z - \vec{W}_z) + \frac{\rho S c_{L\alpha}}{2m} |\vec{V}_z - \vec{W}_z|^2 \alpha_R \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

4 Modelo numérico

As EDO's, são equações que envolvem uma função desconhecida e suas derivadas ordinárias. Estas equações são de grande interesse nas ciências exatas e em outras áreas do conhecimento, uma vez que muitas leis e relações físicas podem ser formuladas matematicamente por meio de uma equação diferencial ordinária. No entanto, encontrar métodos eficazes para a solução de grandes sistemas de EDO's de forma analítica pode ser muito trabalhoso e por vezes impossível. Como uma alternativa à solução das EDO's, existem os métodos de Runge-Kutta com passos variáveis, que apresentam erros muito pequenos em comparação às soluções analíticas e a outros métodos numéricos, em pre-mazia o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Portanto, este método será utilizado na solução da Equação Diferencial Ordinária dada pela equação 3.24, sendo discretizado no tempo.

4.1 Runge-kutta 4ª ordem

É um método iterativo explícito para a resolução numérica de soluções de equações diferenciais ordinárias. Consiste na estimativa do valor de uma função em vários pontos intermediários. O ponto desejado será a média ponderada entre esses pontos intermediários. O método é baseado na série de Taylor e sua ordem será definida pela ordem da série de Taylor (FRANCO, 2006).

A formulação matemática para 4ª ordem é:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.1)$$

onde:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

A função f é uma função de x e y que depende indiretamente de f e do tamanho do passo h . Além disso, para o presente trabalho, h , que é o passo do método, é o tempo.

4.2 Desenvolvimento computacional

O programa no MATLAB foi desenvolvido com base na teoria exposta na seção 3. As principais ferramentas matemáticas utilizadas no código são a interpolação e o método de Runge-Kutta 4ª ordem. A interpolação é uma ferramenta muito utilizada, pois os coeficientes aerodinâmicos utilizados embora contemplem um grande conjunto de valores de velocidade, não foram discretizados para cada instante de tempo solicitado, assim a medida que a velocidade varia para cada instante de tempo, um valor absoluto da velocidade é calculado e com isso, extraído o valor do número de Mach daquele instante. Com este valor é feita a interpolação de todos os coeficientes aerodinâmicos essenciais ao desenvolvimento da trajetória proposta.

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem é utilizado na solução da equação 3.24 por se tratar de uma equação diferencial ordinária. Dessa forma, as velocidades e posições são encontradas para cada instante da trajetória.

5 Levantamento dos coeficientes aerodinâmicos

5.1 Modelagem da bomba MK-82

O PRODAS é um programa empírico-teórico, que utiliza ferramentas iterativas para o “design” e análise de vários aspectos de armamentos, e neste caso, de bombas ou projeteis. Este programa contempla análises de aletas estabilizadoras, propriedades de massa, estimação de coeficientes aerodinâmicos, análise de estabilidade, balística interna e externa, simulação de trajetória, etc.

Inicialmente o presente trabalho apresenta o desenvolvimento da bomba MK-82 no PRODAS, como forma preliminar à obtenção dos coeficientes aerodinâmicos. Para tanto, é extraído do artigo (DUPUIS, 2001) o desenho técnico básico necessário ao progresso do modelo no programa.

O qual utiliza como referência o calibre (273 mm), em escala (1:1), para o cálculo de todas as dimensões fornecidas, tanto para o corpo como para as aletas. Dessa maneira, pode-se constatar a similaridade entre o modelo desenvolvido com o já existente em referências.

5.1.1 Corpo da bomba

Devido à carência de informações detalhadas do interior da bomba, para o cálculo do corpo da mesma são arbitrados valores relativos à espessura do corpo, bem como diâmetro da ogiva. Além disso, o material utilizado também foi arbitrado. Com isso, obtêm-se o seguinte modelo representado pela figura 5.1:

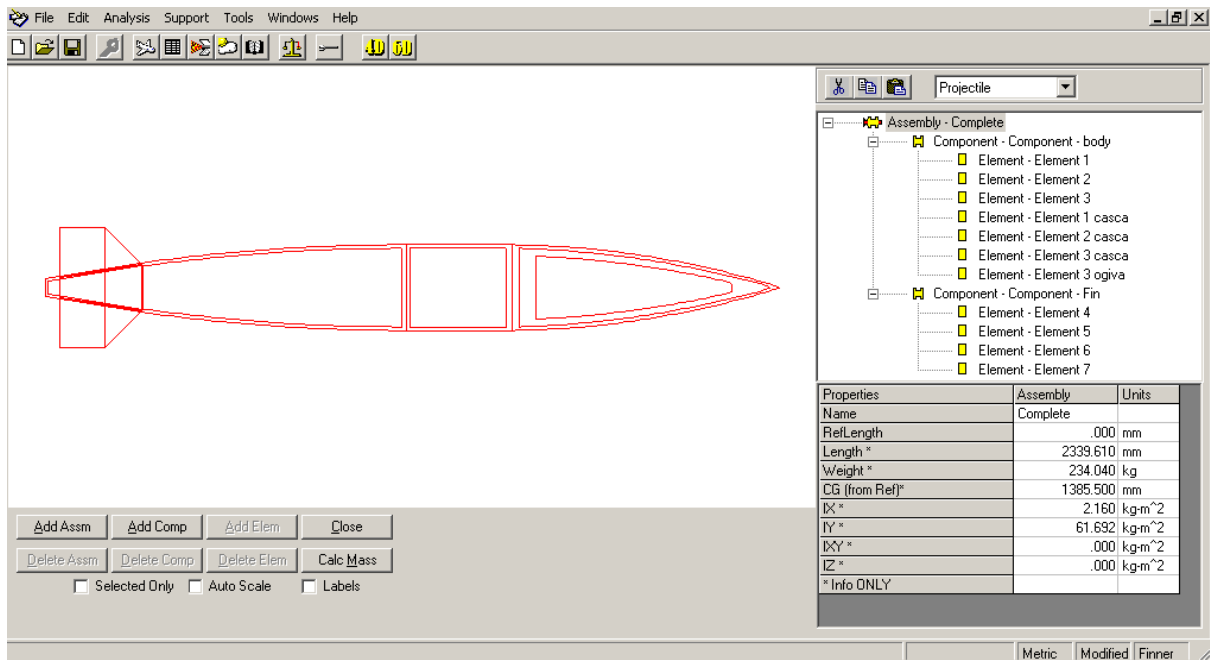


Figura 5.1: Modelo da granada MK-82 gerado no PRODAS.

5.1.2 Aletas

Uma vez que o artigo (DUPUIS, 2001) possui maior riqueza de informações sobre as aletas, o desenvolvimento da mesma é mais preciso. As dimensões geométricas utilizados no Prodas estão nas figuras do Anexo A. Além disso, uma descrição do desenvolvimento da geometria externa da aleta fica explicitado pelas figuras 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5.

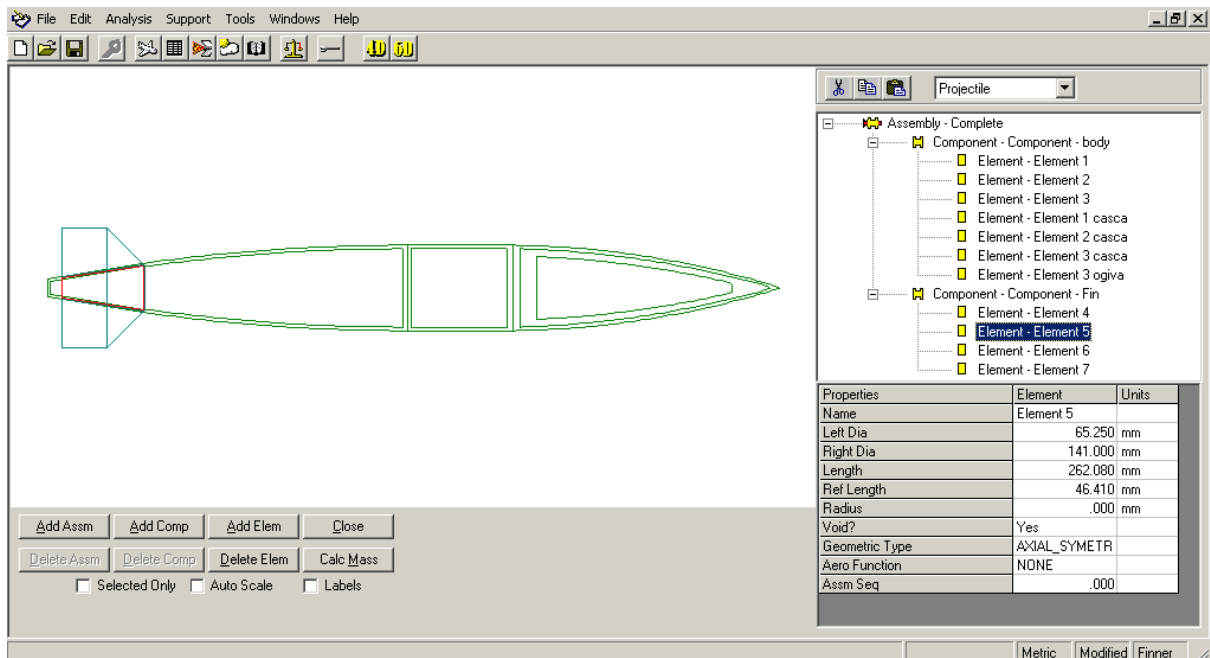


Figura 5.2: Elemento 4 da aleta.

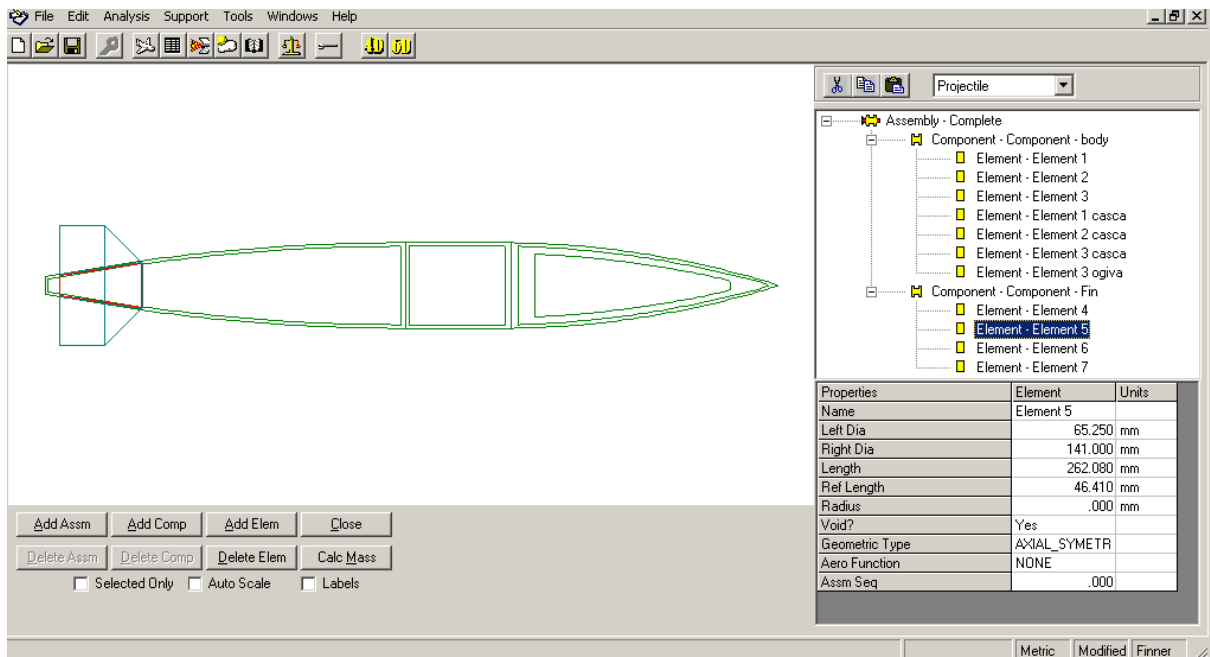


Figura 5.3: Elemento 5 da Aleta.

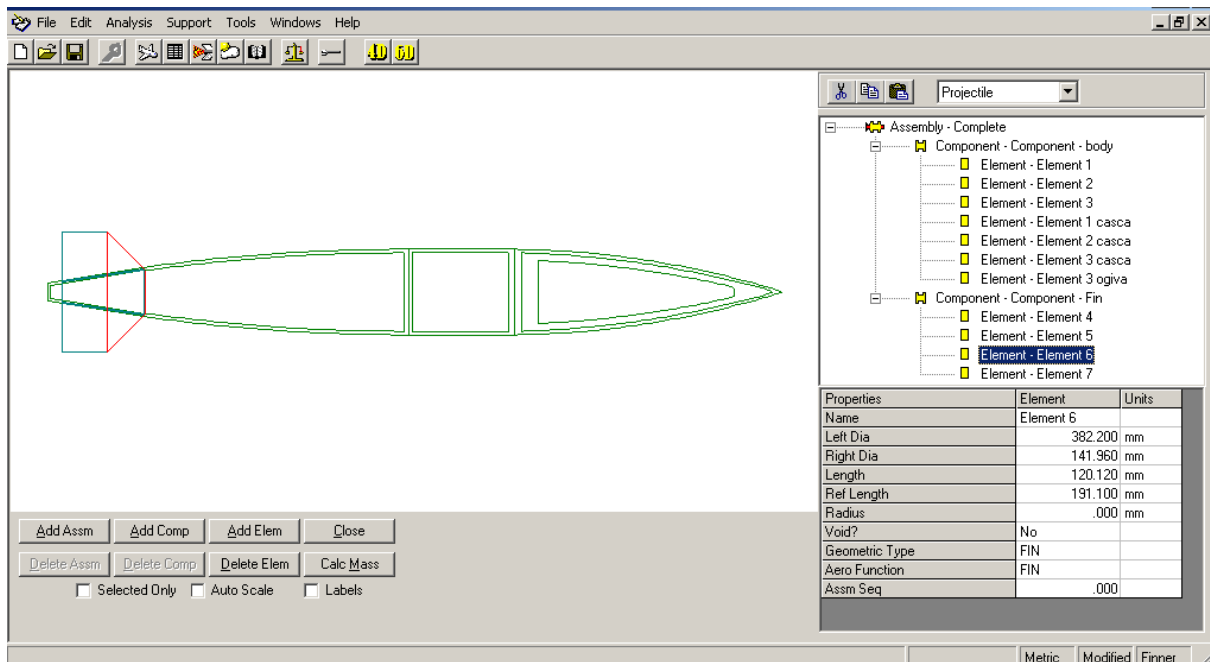


Figura 5.4: Elemento 6 da aleta.

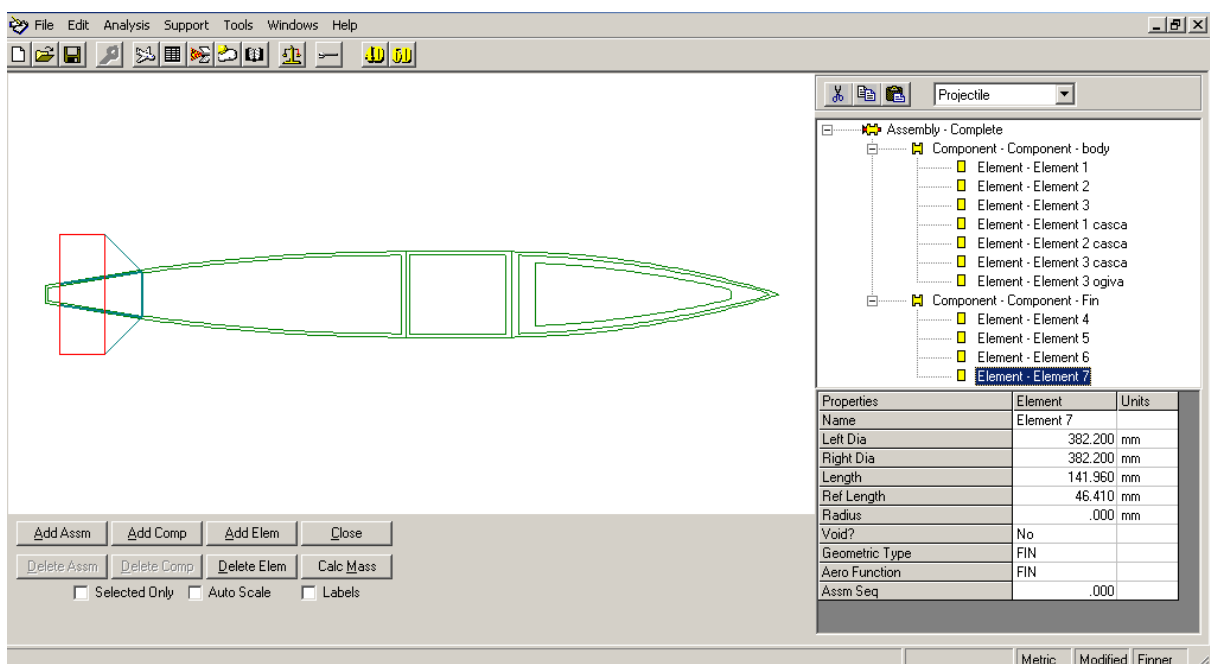


Figura 5.5: Elemento 7 da aleta.

5.1.3 Propriedades de massa

A partir da geometria construída, e dos materiais dos componentes selecionados, o programa permite gerar as propriedades de massa do projétil em questão. Dessa

forma são obtidos os valores de: massa, momentos de inércia axial e transversal e o centro de gravidade. No entanto, o Prodas permite que o usuário utilize dados obtidos previamente para o fim desejado, de forma que os valores das propriedades de massa são utilizados como parâmetros para comparar a geometria desenvolvida com a geometria de referência. Uma vez verificada a coerência das geometrias, pode-se utilizar os dados obtidos previamente, convenientemente, para o desenvolvimentos da balística externa, interna, levantamento de coeficientes aerodinâmicos e estabilidade aerodinâmica.

Assim, os resultados gerados na tabela da esquerda da figura 5.6 são os obtidos da geometria desenvolvida a partir da referência (DUPUIS, 2001). Por sua vez, os dados da direita são extraídos da mesma referência para uma bomba real. Esses valores são importantes pois são parâmetros de entrada utilizados na obtenção dos coeficientes aerodinâmicos.

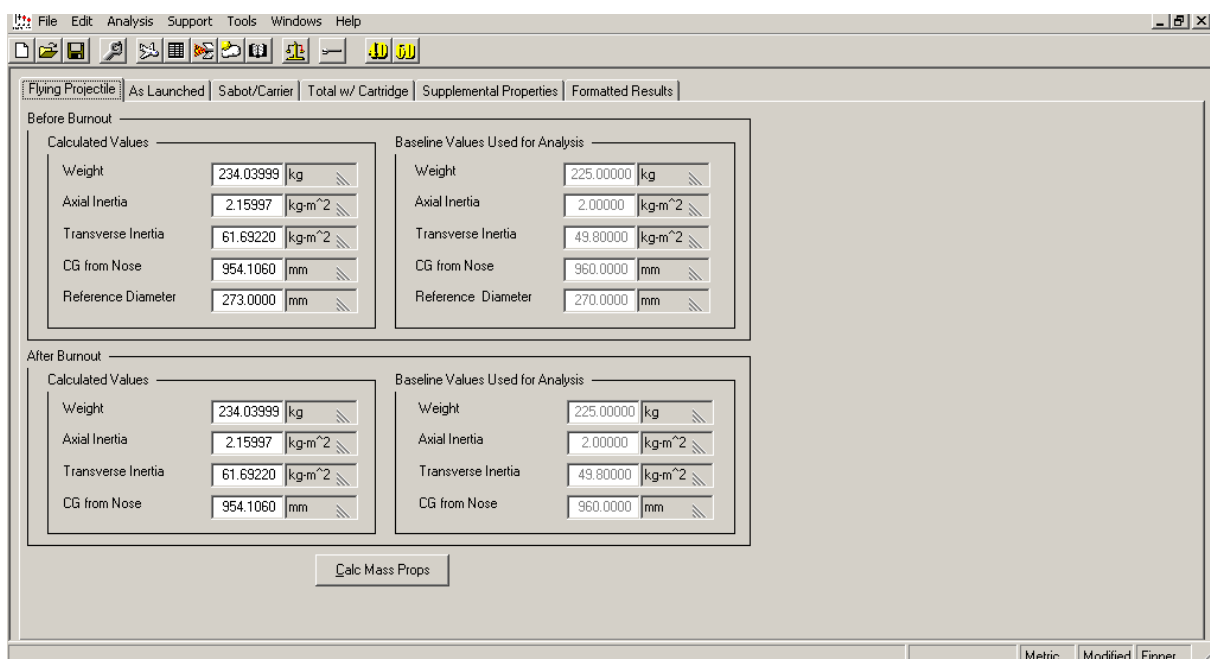


Figura 5.6: Propriedades de massa.

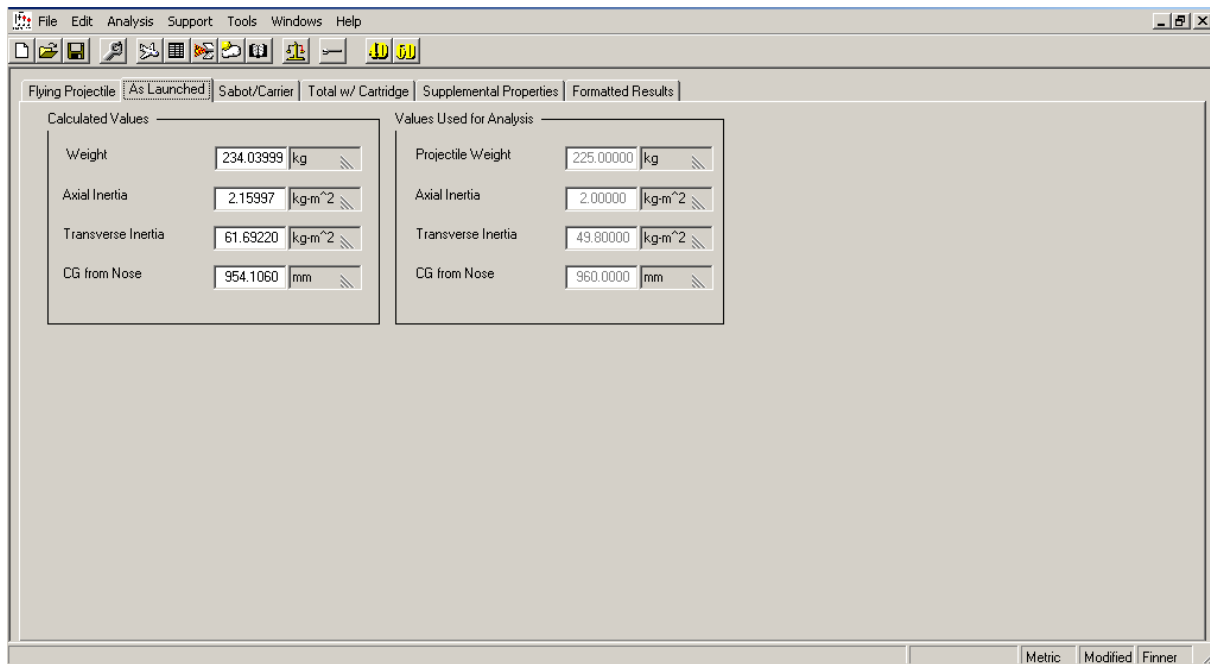


Figura 5.7: Propriedades de massa.

Deste modelo pôde ser obtido os momentos de inércia e centro de massa. Os resultados de momento de inércia diferiram consideravelmente do modelo real adotado como pode ser observado na tabela 5.1, mas isso se deve ao fato de não se ter os dados reais dos propelentes na ogiva, bem como do material que é feito a bomba. No entanto, após algumas simulações, a massa e o centro de massa obtidos ficaram satisfatórios, dentro de uma margem de 1%.

Tabela 5.1: Resultados PRODAS

	Real	Prodás
Massa (kg)	240.9	240.147
$I_x (kg.m^2)$	2	2.16
$I_y (kg.m^2)$	49.8	61.692
$I_z (kg.m^2)$	49.8	61.692
CG (mm)	960	954.106

6 Validação dos coeficientes e da trajetória

6.1 Coeficientes aerodinâmicos

Os coeficientes aerodinâmicos são gerados no PRODAS, com base nos resultados expostos nas figuras 5.6 e 5.7 referentes às propriedades de massa obtidas e da geometria de escoamento. Os coeficientes obtidos, diferem pouco dos expostos em (DUPUIS, 2001), e a diferença se deve a falta de detalhamento da geometria utilizada pela literatura, que pode interferir significativamente na superfície de escoamento, bem como a falta de descrição na realização da simulação de levantamento dos coeficientes, devido ao mesmo depender de características das aletas e da superfície de escoamento.

Dito isso, os coeficientes aerodinâmicos aqui explorados são os mesmos analisados pela literatura (CX_0 , CNA , CMA) em (DUPUIS, 2001), de forma a ter um parâmetro de comparação. Dessa forma, as curvas com subscrito “PRODAS” são as levantadas neste trabalho, as curvas com subscrito “literatura” são as curvas obtidas pela referência (DUPUIS, 2001) no Prodas, e as curvas com subscrito “experimental” são as curvas obtidas por método experimental.

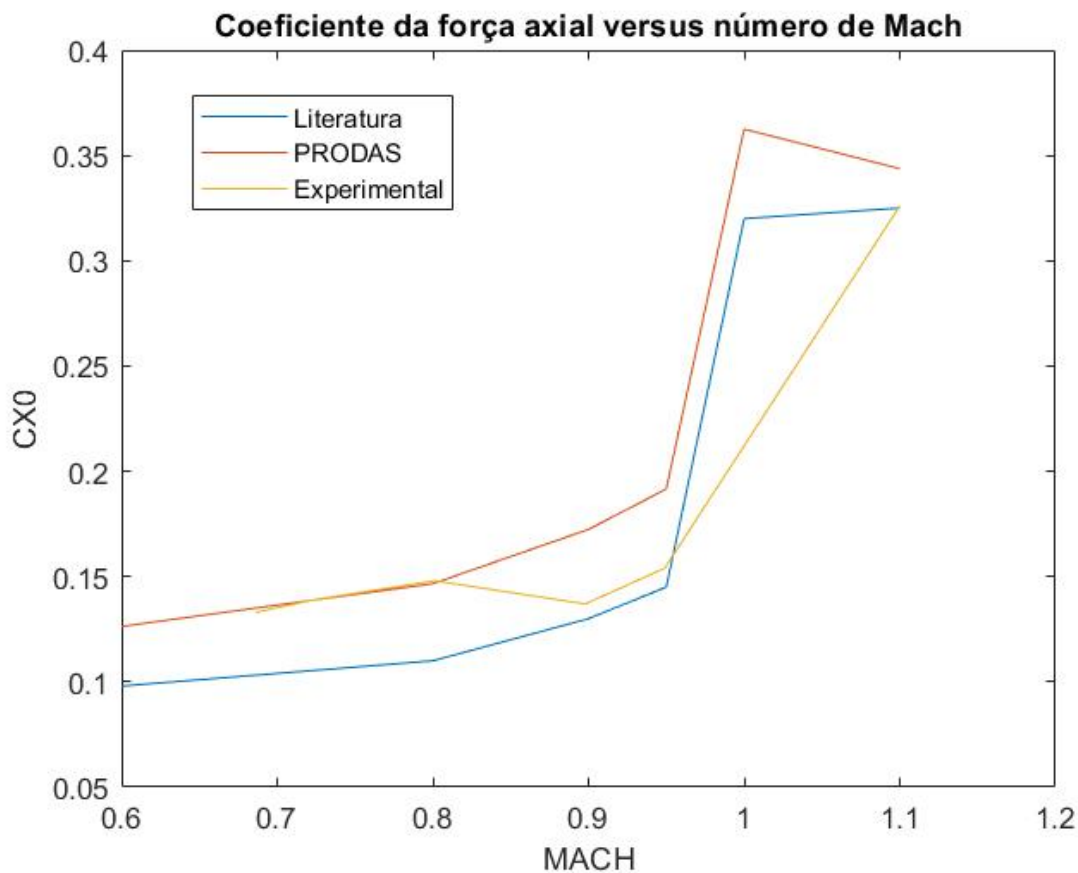


Figura 6.1: Curvas dos coeficientes de força axial.

As curvas obtidas por ambos os trabalhos no Prodas têm uma similaridade, embora os valores diverjam. Os valores são muito próximos para valores de Mach entre 0.6 e 0.95.

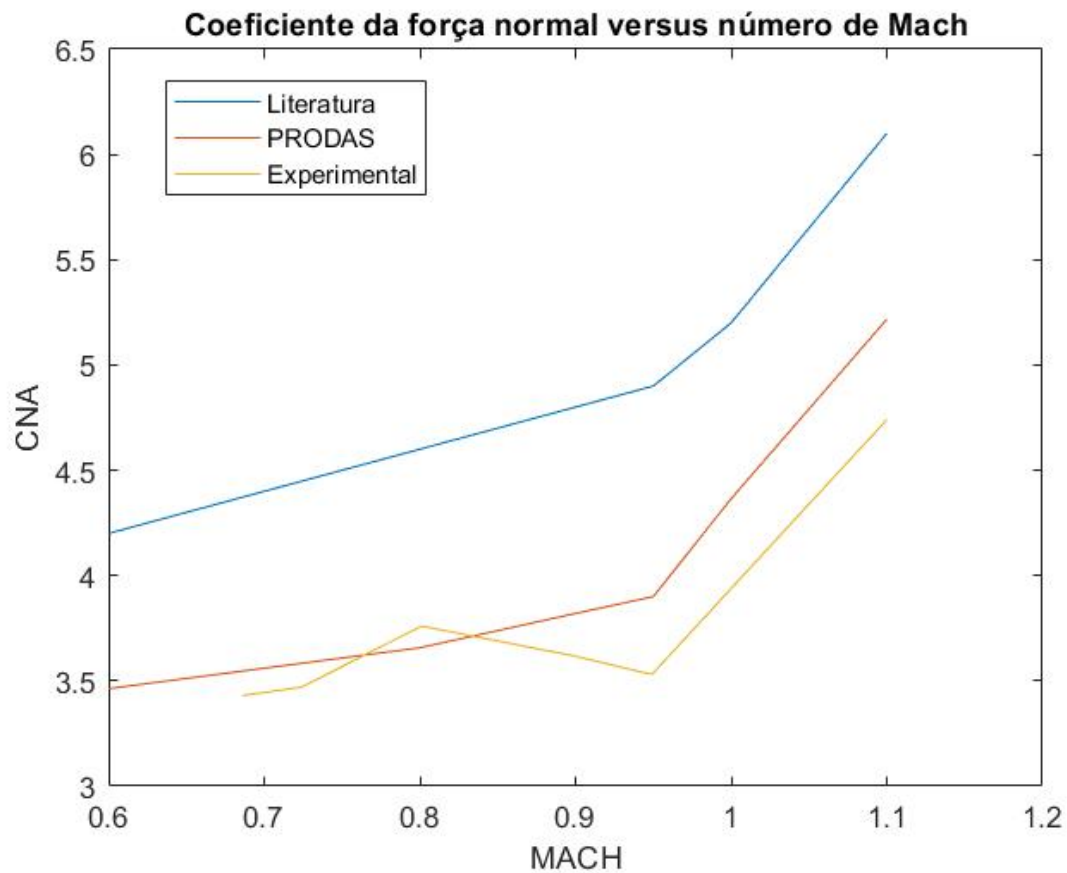


Figura 6.2: Curva dos coeficiente de força normal.

As curvas para o coeficiente de força normal apresentam mesmo comportamento, embora difiram na ordem de 25%.

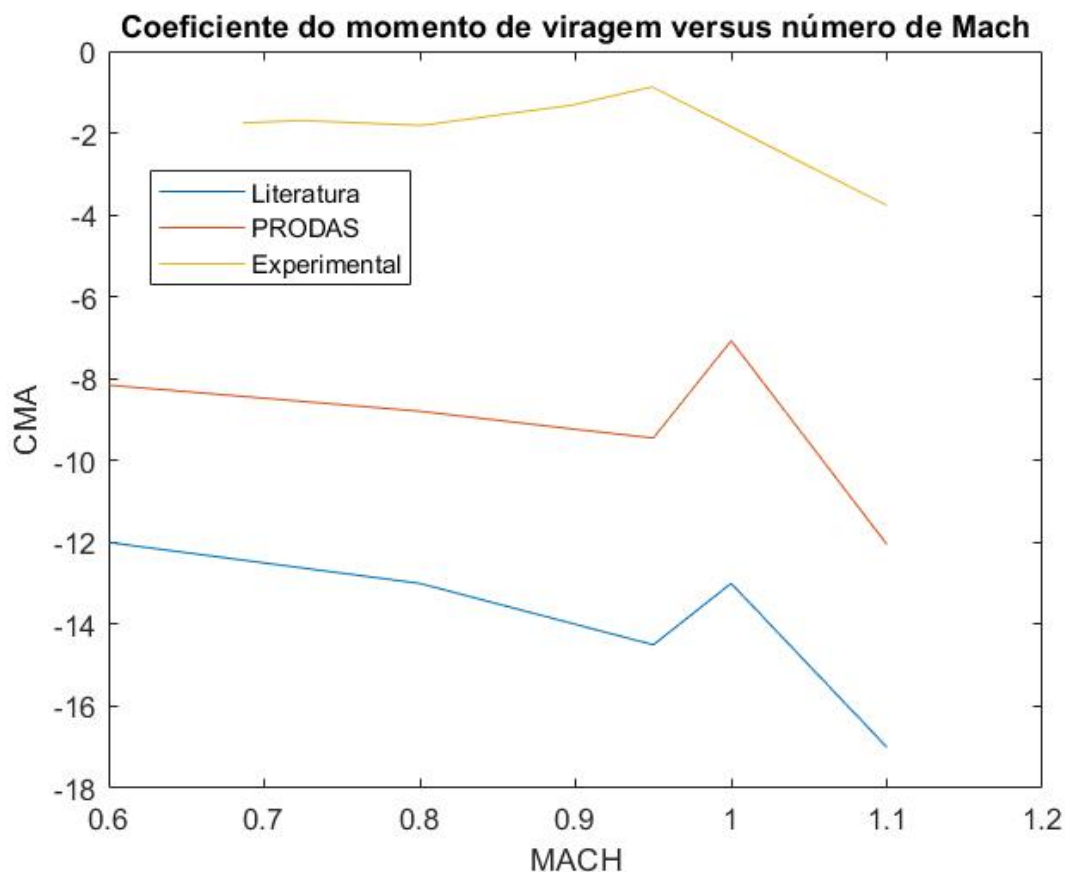


Figura 6.3: Curva dos coeficientes de momento de arfagem.

Similarmente aos coeficientes anteriores, o comportamento das curvas é similar entre si, e a diferença deve-se ao detalhamento da geometria utilizada para o escoamento, sendo a geometria fornecida pela referência bem simplória, o que limita o desenvolvimento da superfície de escoamento no PRODAS.

6.2 Trajetória

De forma a validar o programa desenvolvido no MATLAB para o cálculo da trajetória da bomba MK-82, faz-se necessário comparar os resultados das trajetórias extraídas do PRODAS com as obtidas pelo programa para diferentes situações de lançamento, inclusive comparar com as curvas (altitude x alcance) de (KASPER; WRENN, 1966). Cabe ressaltar que, ambas as trajetórias simuladas representam o caso de voo livre, ou seja, não é levado em consideração as etapas reais do lançamento da bomba, como o tempo de mergulho do avião e o tempo de resposta do piloto para a efetiva soltura da bomba, já enunciados na Introdução deste trabalho.

Sendo assim, a partir de quatro situações distintas de lançamento, conforme

explicitado na tabela 6.1, e seguindo os modelos exemplos do artigo (KASPER; WRENN, 1966), os resultados gerados pelo Prodas e pelo programa serão comparados com a literatura a fim de validar a trajetória.

Tabela 6.1: Situações de lançamento

Situação	Velocidade de ejeção (m/s)	Velocidade do avião (m/s)	Altitude do lançamento (m)	Ângulo de mergulho do avião (°)
1	3.048	231.5	1219.2	10
2	3.048	231.5	1219.2	20
3	3.048	231.5	1828.8	10
4	3.048	231.5	1828.8	20

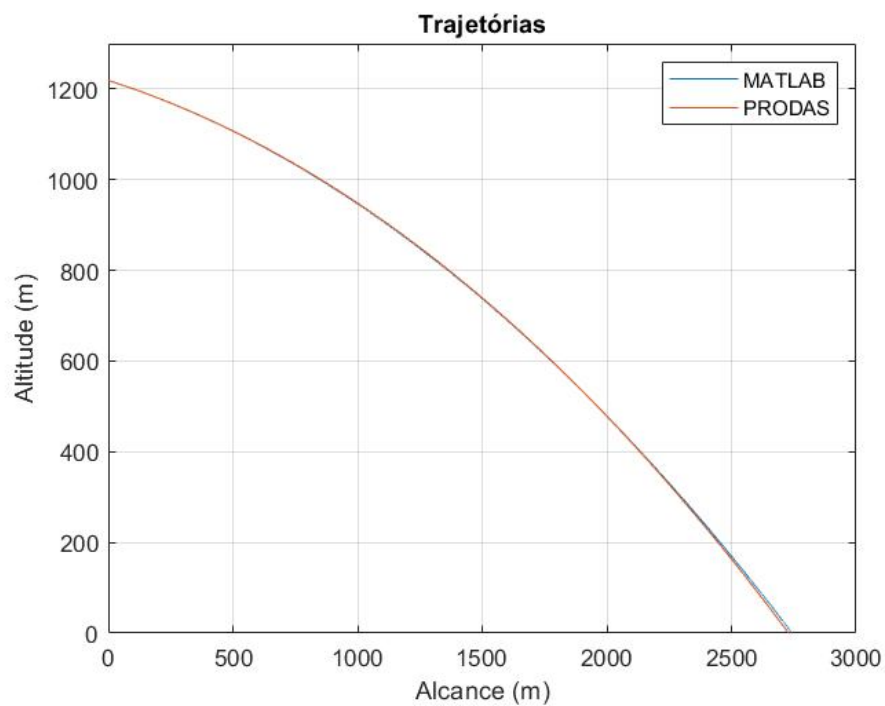


Figura 6.4: Situação de lançamento 1.

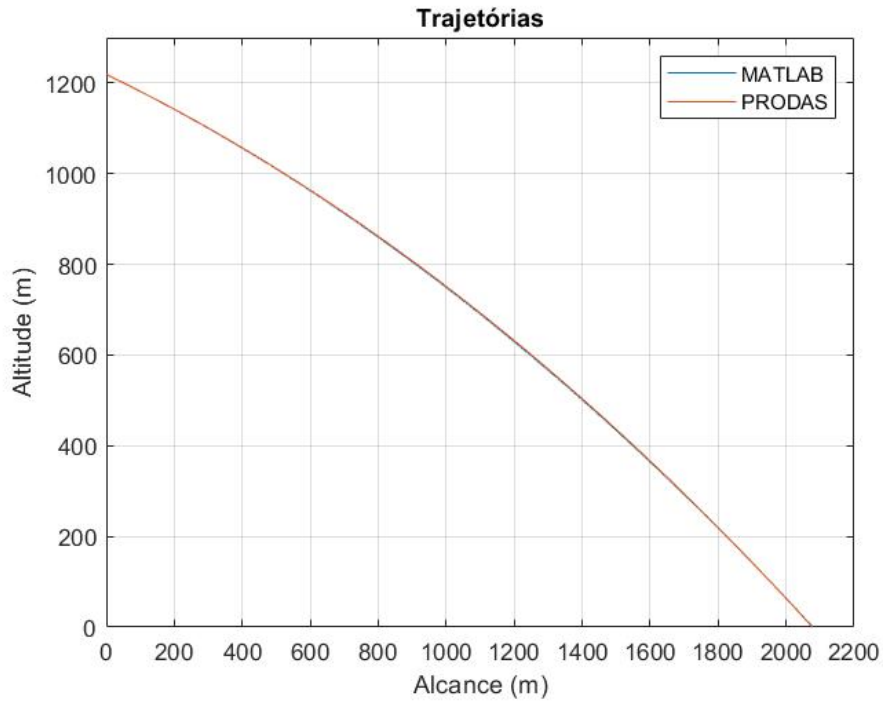


Figura 6.5: Situação de lançamento 2.

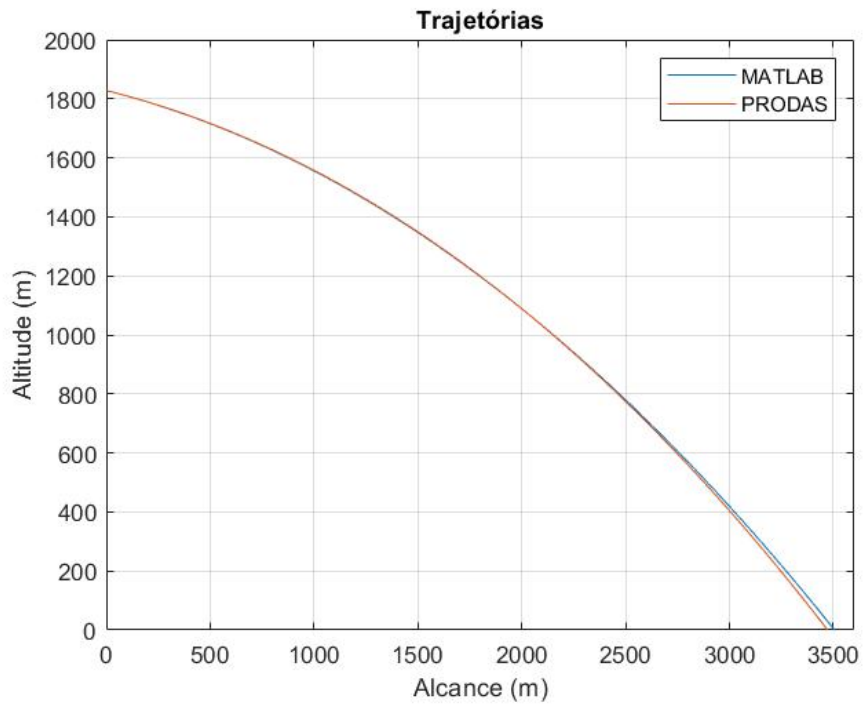


Figura 6.6: Situação de lançamento 3.

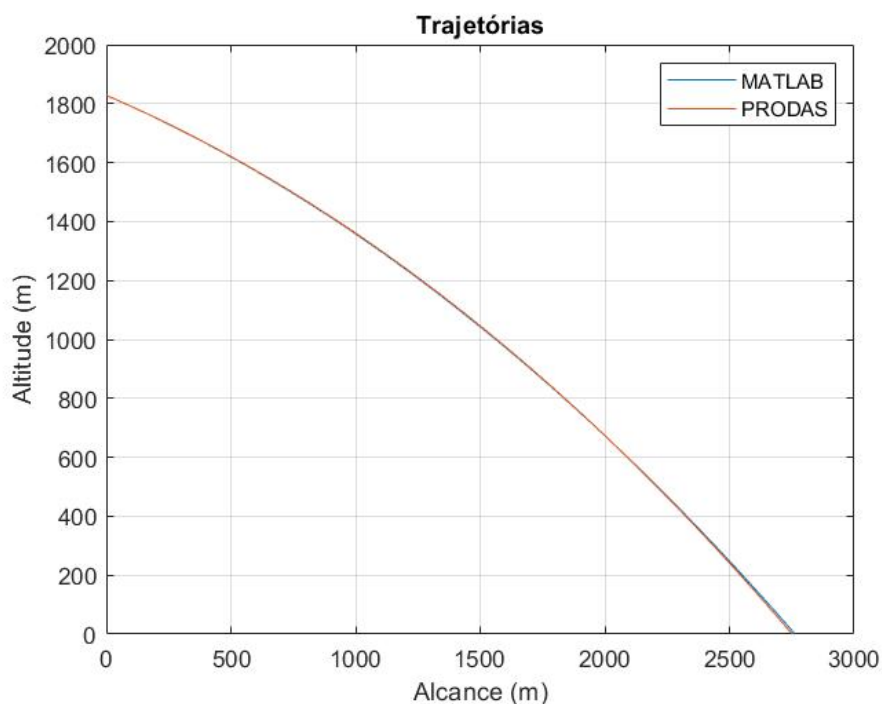


Figura 6.7: Situação de lançamento 4.

Para essas quatro situações expostas, gera-se uma tabela 6.2 com os valores obtidos do alcance e tempo, além de outra tabela 6.3 com as diferenças percentuais dos resultados extraídos de ambos os programas.

Tabela 6.2: Alcance e Tempo da trajetória

Situação	Tempo (s)	Tempo (s) PRODAS	Alcance (m)	Alcance (m) PRODAS	Alcance (m) Literatura
1	12.3435	12.5094	2744	2728	2652
2	9.7625	9.8718	2082	2077	2012
3	15.884	16.1440	3497	3472	3353
4	13.0535	13.2614	2768	2752	2682

Tabela 6.3: Comparação dos alcances e tempos

Situação	Diferença de tempo PRODAS (%)	Diferença de alcance PRODAS (%)	Diferença de alcance literatura (%)
1	1.34	0.58	3.47
2	1.11	0.24	3.48
3	1.61	0.72	4.29
4	1.57	0.58	3.20

Com estes resultados, pode-se constatar que, em relação ao PRODAS, a maior

diferença de alcance teve um erro inferior a 1%, o que representa uma boa aproximação do programa utilizado nesse trabalho. No entanto, para (KASPER; WRENN, 1966) a diferença foi maior, isso decorre por não serem utilizados os mesmos coeficientes da literatura, por não serem disponibilizados. Como estes valores, estão dentro do raio de ação da bomba, que possui raio de ação de centenas de metros do ponto de impacto (AOAV, 2016), o programa cumpre seu objetivo proposto neste tópico. Não pode-se realizar a comparação do tempo com a literatura, pois a mesma seria muito imprecisa de ser extraída dos gráficos. Entretanto, a comparação com o PRODAS tem bons resultados na faixa de (1.1% - 1.61%).

6.3 Tabela balística

De posse do programa atual, pode-se desenvolver uma tabela balística. Os ângulos e altitudes utilizados não abrangem toda as possibilidades de emprego da bomba MK-82. O objetivo no entanto é demonstrar os resultados gerados, tendo como base altitudes e ângulos utilizados pela literatura (KASPER; WRENN, 1966).

Tabela 6.4: Tabela de lançamento gerada no MATLAB para ângulo de 10 graus.

Altitude de lançamento (m)	Ângulo de lançamento (°)	Alcance (m)	Tempo (s)
1000	10	2425.0217	10.8765
1500	10	3114.4055	14.0570
2000	10	3697.5578	16.7740
2500	10	4211.8717	19.1860
3000	10	4677.2004	21.3780
3500	10	5105.4104	23.4005
4000	10	5504.3698	25.2860

Tabela 6.5: Tabela de lançamento gerada no MATLAB para ângulo de 20 graus.

Altitude de lançamento (m)	Ângulo de lançamento (°)	Alcance (m)	Tempo (s)
1000	20	1802.0919	8.4290
1500	20	2413.2131	11.3570
2000	20	2941.5294	13.9135
2500	20	3413.1453	16.2120
3000	20	3843.1891	18.3190
3500	20	4240.8288	20.2740
4000	20	4612.7053	22.1055

Tabela 6.6: Tabela de lançamento gerada no MATLAB para ângulo de 30 graus.

Altitude de lançamento (m)	ângulo de lançamento (°)	Alcance (m)	Tempo (s)
1000	30	1343.5877	6.7965
1500	30	1853.5953	9.4295
2000	30	2305.5853	11.7850
2500	30	2715.2803	13.9355
3000	30	3092.5565	15.9270
3500	30	3444.0402	17.7895
4000	30	3774.5457	19.5455

7 Conclusão

Este trabalho apresenta a modelagem de uma bomba MK-82 no PRO-DAS para levantamento dos seus coeficientes aerodinâmicos e posterior cálculo da trajetória. Este último foi feito no MATLAB e utilizou-se o PRO-DAS para validar o programa juntamente com curvas de (altitude x alcance) extraídos de (KASPER; WRENN, 1966).

Dito isso, conclui-se que a fim de extrair coeficientes aerodinâmicos, o PRO-DAS apresenta-se como um bom programa para uma análise preliminar dos mesmos, de forma a otimizar tempo e recursos, contudo, é indispensável um ensaio real em túnel de vento, ao passo que um projeto avance, para valores mais condizentes com a realidade.

No que tange a trajetória, após o estudo e desenvolvimento do programa, foi possível concluir que a elaboração de tabelas de tiro envolvem uma série de parâmetros que não podem ser intuídos pelo operador na hora do disparo, de forma que essas tabelas devem ser confiáveis e retratar fielmente a realidade.

A conclusão mais importante deste trabalho se diz respeito ao cálculo da trajetória, que de forma prática pode ser obtida através da solução de equações diferenciais ordinárias desenvolvidas a partir de conceitos físicos da mecânica clássica.

Referente à trajetória, o programa apresentou boa aproximação dos resultados extraídos do PRO-DAS e da literatura (KASPER; WRENN, 1966), como explicitado neste trabalho, o que demonstra que através de um software como o MATLAB, pode-se desenvolver programas de balística externa que trabalhem com trajetória de projéteis. Dessa forma, este trabalho pode servir como base para o desenvolvimento de trajetórias de bombas MK-82. Contudo, para se alcançar resultados cada vez mais preciso, deve-se aprimorar a abordagem feita neste trabalho de forma a expandir o modelo para seis graus de liberdade e levar em consideração os parâmetros aqui negligenciados.

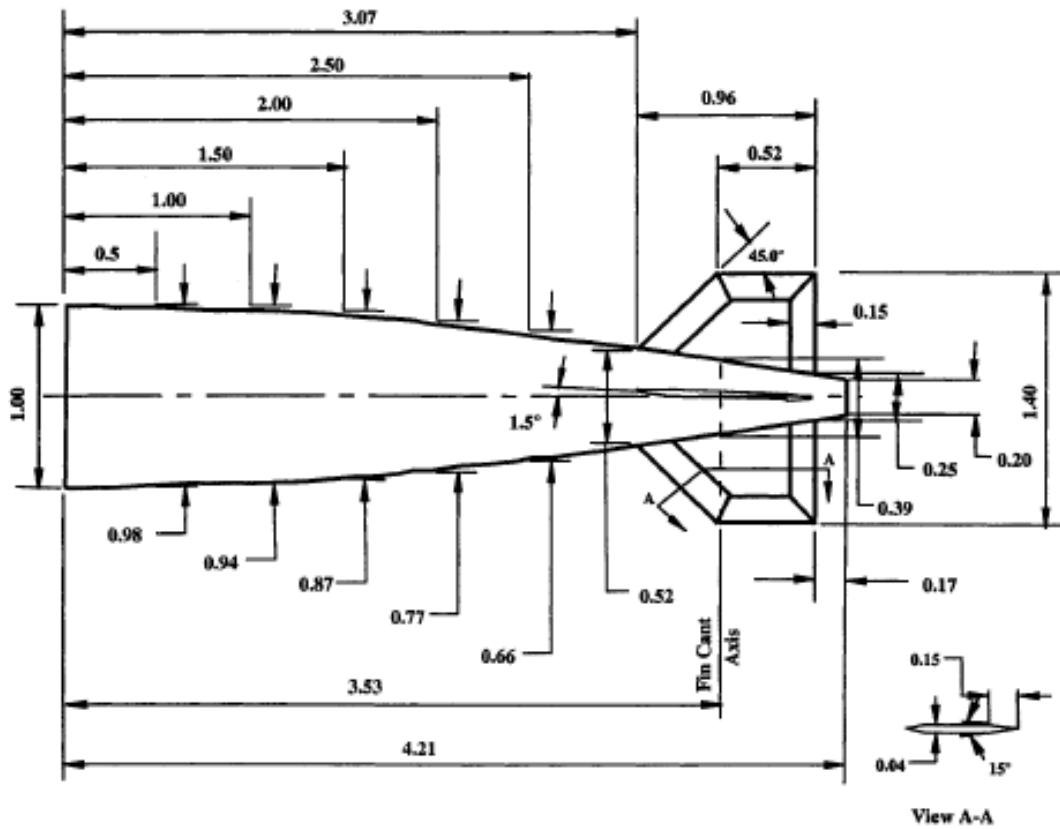
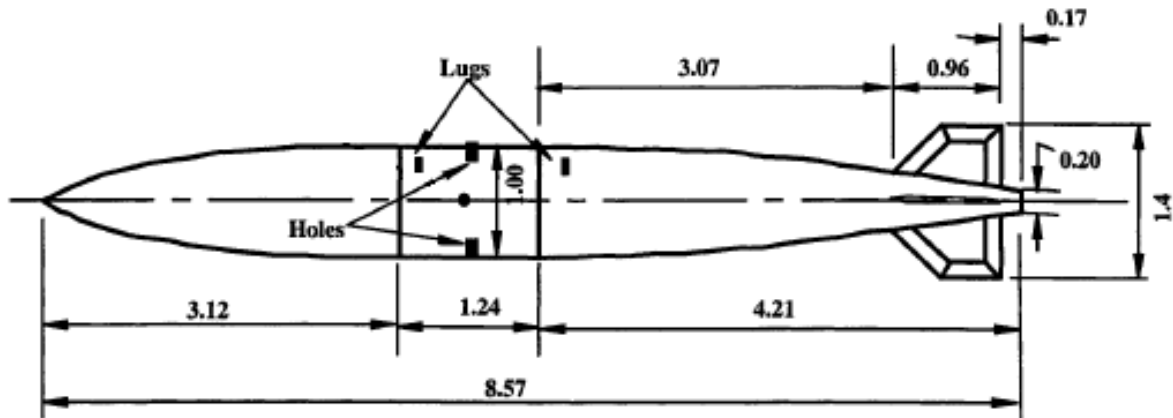
Referências

- AOAV. *Aoav*. 2016. 17 setembro de 2019. Disponível em: <https://aoav.org.uk/2016/large-destructive-radius-air-dropped-bombs-the-mark-80-series-and-pave-way-attachments/>.
- ATTALLAH, A. S. et al. Modeling and simulation for free fall bomb dynamics in windy environment. *ASAT-16, May*, 2015.
- BARANOWSKI, L.; FRANT, M. Calculation of aerodynamic characteristics of flying objects using prodas and fluent environments. 2017.
- BARBOSA; BLANCO. A critical evaluation of three models of external ballistics. *ABCM*, 2005.
- BOZZA; GANDUR; BRITO. Trajetória de projéteis de artilharia de campanha. 2018.
- CARLUCCI, D. E.; JACOBSON, S. S. *Ballistics: theory and design of guns and ammunition*. [S.l.]: CRC Press, 2013.
- DUPUIS, A. Aerodynamic characteristic and analysis of a mk82 bomb configuration from free-flight tests. In: *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 4325.
- FRANCO, N. B. *Cálculo numérico*. [S.l.]: Pearson, 2006.
- KASPER, M.; WRENN, A. *MK 81 and MK 82 Bomb Release Curves*. [S.l.], 1966.
- MCCOY, R. *Modern exterior ballistics: The launch and flight dynamics of symmetric projectiles*. [S.l.]: Schiffer Pub., 1999.
- PRITCHARD, P. J.; MITCHELL, J. W.; LEYLEGIAN, J. C. *Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics, Binder Ready Version*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2016.
- SU, W.-J. et al. Aerodynamic characterization of a canard guided artillery projectile. In: *45th AIAA aerospace sciences meeting and exhibit*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 672.

ANEXO A

BOMBA UTILIZADA NA SIMULAÇÃO

(DUPUIS, 2001)



ANEXO A - Continuação

(DUPUIS, 2001)

