

MINISTÉRIO DA DEFESA
COMANDO DO EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
SEÇÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA – SE/4

CAP GABRIEL DINOÁ DUARTE CARDOSO DE BRITO

MÉTODOS PARA A ANÁLISE MODAL DE TUBOS DE ARMAMENTO
AUTOMÁTICO

Rio de Janeiro

2019

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

CAP GABRIEL DINOÁ DUARTE CARDOSO DE BRITO

MÉTODOS PARA A ANÁLISE MODAL DE TUBOS PARA ARMAMENTO AUTOMÁTICO

Projeto de Fim de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica e de Armamento do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção de título de Engenheiro Mecânico.

Orientadores:

Prof Maj Achille Arantes Bassi – D. Sc.

Prof Cel Paulo Henriques –Eng

Rio de Janeiro

2019

c2019

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha
Rio de Janeiro – RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e do orientador.

Dinoá Duarte Cardoso de Brito, Gabriel
Métodos para a análise modal de tubos de
armamento automático / Gabriel Dinoá Duarte Cardoso
de Brito. – Rio de Janeiro, 2019.
79 f.

Orientador: Achille Arantes Bassi

Projeto Final de Curso (graduação) – Instituto Militar de
Engenharia, Bacharel em Engenharia Mecânica e de
Armamento, 2019.

1. Análise Modal. 2. Tubos. 3. Elementos Finitos. 4.
Stodola. 5. Frequência. I. Arantes Bassi, Achille, orient.
II. Título

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

CAP GABRIEL DINOÁ DUARTE CARDOSO DE BRITO

MÉTODOS PARA A ANÁLISE MODAL DE TUBOS DE ARMAMENTO AUTOMÁTICO

Projeto de Fim de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica e de Armamento do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção de título de Engenheiro Mecânico.

Orientadores:

Prof Maj Achille Arantes Bassi – D. Sc.

Prof Cel Paulo Henriques – Eng

Aprovado em 10 de Outubro de 2019 pela seguinte Banca Examinadora:



Prof. Maj Achille Arantes Bassi - D. Sc do IME-Presidente



Prof. Paulo Henriques-Eng do IME



Prof. TC Carlos Frederico de Matos Chagas - D. Sc do IME

Rio de Janeiro

2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelas graças concedidas ao longo da minha vida pessoal e profissional, à minha esposa Flávia, pelo amor, abnegação e compreensão, aos meus pais e à minha irmã, pelo apoio incondicional ao longo da jornada.

Agradeço também ao Instituto Militar de Engenharia, na figura de meus professores, pelos ensinamentos colhidos, aos meus amigos e companheiros, pela convivência diária.

Aos meus orientadores, Cel Henriques e Major Arantes, pela confiança em mim depositada e pela condução paciente e atenciosa desde o primeiro dia desse trabalho.

Sumário

1	INTRODUÇÃO.....	12
1.1	Conceito de tubo	12
1.2	Fenômenos que ocorrem no tiro	13
1.3	Objetivos	15
2	MÉTODO DE STODOLA	16
2.1	Exemplo de aplicação na AMCP	19
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	26
3.1	Emprego do método na obtenção das matrizes de inércia e de rigidez 27	
3.2	Matrizes de rigidez e inércia locais	32
3.3	Obtenção das matrizes de rigidez e de inércia globais	33
3.4	Programa Calculador modal.....	40
3.5	Uso do ANSYS.....	42
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	43
4.1	Sequência de testes realizados	43
4.2	Teste de Implementação do Método da AMCP	45
4.3	Emprego do ANSYS e do Calculador Modal com os dados da AMCP	46
4.4	Tubo uniforme maciço.....	47
4.5	Tubo uniforme oco	49
4.6	Tubo cônico.....	51
4.7	Tubo .50	53
4.8	Sumário de resultados	55
4.9	Discussões.....	56
5	CONCLUSÃO	59
5.1	Sugestão para Trabalhos Futuros	60
6	REFERÊNCIAS	61
7	APÊNDICE 1	62
8	ANEXOS.....	65
8.1	Implementação do Método da AMCP (Diagrama de Momentos Reduzidos).....	65
8.2	Calculador Modal	70
8.3	Input Data.....	74
8.4	APDL.....	75

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

$[K]$ - matriz de rigidez

$[M]$ - matriz de massa

$[y]$ - vetor de deslocamentos

ω - frequência angular

f_n - frequência natural

m - massa

g - aceleração da gravidade

W - força peso de um segmento

Rf - razão de frequência

$I_{A,B,C}$ - momentos de inércia dos segmentos A, B ou C

L - comprimento

y - deslocamento

y_{max} - magnitude do deslocamento

E - módulo de elasticidade

T - momento fletor no elemento de viga

P - esforço cortante no elemento de viga

v - deslocamento vertical do elemento

θ – deslocamento angular do elemento

Ω - domínio de uma função

Ω^e - subdomínio de uma função

ρ - massa específica do material

A - área da seção transversal

R - resíduo

$p(x)$ - função peso

ψ - função de interpolação

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Perfil de um tubo da AMCP	13
Figura 1.2 Dispersão por razão de frequência (baseada na Fig 11 da AMCP, que se refere ao trabalho de D. E. Wentz, et al, 1955)	14
Figura 2.1 Exemplo de tubo em segmentos baseada na AMCP (em polegadas)	19
Figura 2.2 Análise de momento na seção c	20
Figura 2.3 Diagrama M/l.....	21
Figura 2.4 Cálculo do momento de área	21
Figura 3.1 Elemento de viga unidimensional.....	27
Figura 3.2 Elemento infinitesimal da viga	27
Figura 3.3 Exemplo de problema do método de Ritz	28
Figura 3.4 Subdivisão do domínio	29
Figura 3.5 Elemento de viga.....	32
Figura 3.6 Funções de interpolação	32
Figura 3.7 Corpo discretizado	34
Figura 3.8 Forçamento em corpo discretizado	34
Figura 3.9 Elemento de barra.....	36
Figura 3.10 Deslocamento no segundo nó.....	37
Figura 3.11 Elementos isolados	38
Figura 3.12 Matriz global.....	40
Figura 4.1 Tubo usado na AMCP	45
Figura 4.2 Desvios nas frequências do exemplo da AMCP pelos métodos do Diagrama de Momentos (AMCP) e do Calculador Modal em relação ao ANSYS	46
Figura 4.3 Desvios da velocidade angular do tubo maciço nos três métodos em relação ao método analítico	48
Figura 4.4 Linhas elásticas de tubo maciço	48
Figura 4.5 Diferença entre as linhas elásticas obtidas pelo ANSYS e Calculador Modal em relação á solução exata.....	49
Figura 4.6 Desvios da velocidade angular do tubo oco dos três métodos em relação ao método analítico	50
Figura 4.7 Tubo cônico.....	51
Figura 4.8 Diagrama de momento para tubo cônico	51
Figura 4.9 Desvios da velocidade angular do tubo cônico em relação ao método do ANSYS	52
Figura 4.10 Linhas elásticas para tubo cônico	53
Figura 4.11 Tubo modelado em SolidWorks a partir das dimensões obtidas no Laboratório de Armamento.....	53
Figura 4.12 Detalhe do desenho contendo as dimensões posteriores do tubo	54
Figura 4.13 Detalhe da região central do tubo com suas dimensões.....	54
Figura 4.14 Região frontal do tubo	54
Figura 4.15 Linhas elásticas do Calculador Modal e ANSYS	55
Figura 7.1 Modelo massa-mola	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Cálculo de M/I para condições estáticas	20
Tabela 2 Momento de área em condição estática.....	22
Tabela 3 Parâmetros de frequência natural para condição estática.....	23
Tabela 4 Cálculo de M/I para condições dinâmicas	24
Tabela 5 Momento de área em condição dinâmica.....	24
Tabela 6 Parâmetros de frequência natural para condição dinâmica.....	25
Tabela 7 Sumário de teste realizados	43
Tabela 8 Velocidades angulares em Hz.....	56

RESUMO

A análise modal é um ramo da Dinâmica que tem aplicação em diversos campos da engenharia, dentre os quais pode-se citar a obtenção das frequências naturais em tubos de armamentos, leves ou pesados. O cálculo da frequência natural tem importância fundamental no projeto de armas com alta cadência de tiro, pois nessas armas, a cadência pode se aproximar da frequência natural, acarretando possivelmente em danos estruturais decorrentes de vibração e ressonância e no aumento da dispersão dos disparos.

Nesse trabalho se busca o cálculo da primeira frequência natural de tubos de armamento. São desenvolvidas diferentes abordagens para a obtenção dessas frequências. Com diferentes ferramentas, são avaliadas diferentes metodologias para a obtenção das frequências naturais, sendo estes métodos comparados entre si e com o método da AMCP, que é consagrado na literatura.

Foi demonstrado que a metodologia da AMCP, baseado na metodologia de Stodola, é capaz de apresentar resultados adequados, mas foi possível concluir que existem programas modernos que a substituem com vantagens na precisão e no fornecimento de mais parâmetros de projeto, como o ANSYS e o programa que foi desenvolvido neste trabalho.

ABSTRACT

Modal analysis is a branch of dynamics that has application in various fields of engineering, among which one can cite the obtaining of natural frequencies in light or heavy armament tubes, since the tubes can be modeled as crimped beams and analyzed. Obtaining the natural frequency is of fundamental importance in high-rate firing weapons, since in these weapons the rate can approach natural frequency, possibly resulting in structural damage due to vibration and resonance and increased dispersion of fire. There are few analytical methods available for simple forms and without many practical applications. However, they are useful for validating implementations of different modal analysis approaches.

Thus, engineering practice employs numerical methods to overcome these existing problems in the analytical solution. Thus, in the specific case of this work, which seeks to calculate the first natural frequency of armament tubes, different approaches are developed to obtain these frequencies. With the help of different tools, different numerical approaches for obtaining natural frequencies are evaluated, and these methods are compared with each other and with the AMCP method, which is established in the literature.

The AMCP method, based on the Stodola method, has the inherent advantages and disadvantages at the time it was conceived, so it is important to check for more modern and effective alternatives and such alternatives should be validated before the possible replacement of the AMCP method.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Conceito de tubo

O tubo de qualquer armamento requer cuidados especiais em seu projeto, emprego e manutenção. Ele é uma das partes mais importantes de qualquer armamento, uma vez que é o responsável por permitir que a expansão gasosa resultante da queima da carga propelente transfira parte de sua energia ao projétil, no seu deslocamento no interior do tubo.

Seu emprego e processos de fabricação costumam variar conforme suas dimensões de calibre e comprimento, além do material usado nesses processos. A nomenclatura **tubo** é, geralmente, usada em armamentos pesados, de diâmetro superior a 0,6 polegadas, como morteiros, canhões e obuseiros, sendo reservado às armas leves o sinônimo **cano**, como pistolas, fuzis de assalto e metralhadoras. Nesse trabalho, utiliza-se tubo indistintamente do tipo de armamento.

Seus comprimentos normalmente são medidos em números de calibres para se permitir a sua classificação doutrinária. Sua alma pode ser raiada ou lisa. O que define essencialmente tal característica são os efeitos esperados na munição e no tipo de tiro, podendo ser direto ou indireto sobre o alvo.

Por suportar grandes pressões provenientes da queima da carga de projeção, os tubos precisam possuir grandes valores de tensão de escoamento, elevada tenacidade e resistência a ciclos térmicos adversos. Um outro fenômeno que ocorre nos tubos é a vibração, causada tanto pela passagem de um projétil no seu interior e pela quantidade de disparos por unidade de tempo (cadência de tiro), esta, sobretudo, nas armas automáticas.

Segundo (USAMC, 1964), os tubos se comportam como vasos de pressão, fechados na sua culatra e abertos na sua boca, excetuando-se aqueles das armas sem recuo. Os tubos fornecem as condições de contorno dos eventos iniciais do projétil, tanto antes como durante e depois da deflagração da carga de projeção. Antes do disparo, o tubo acomoda o tiro completo e, durante o disparo, restringe os graus de liberdade da expansão dos gases, o que força os gases na base do projétil em sua aceleração até a saída do mesmo pela boca. Por fim, pode-se afirmar que o objetivo do tubo é determinar a direção da trajetória do projétil em direção ao seu alvo, com uma velocidade de boca e uma cadência especificadas no projeto.

Normalmente um tubo é dividido em quatro regiões principais: a parte anterior ou alma na qual o projétil se desloca; a parte posterior ou câmara que aloja o tiro antes do disparo; a bucha da culatra, que fecha a retaguarda do tubo e a boca, localizada na extremidade da região anterior do tubo.

A Figura 1.1 indica um desenho de perfil básico de tubo.

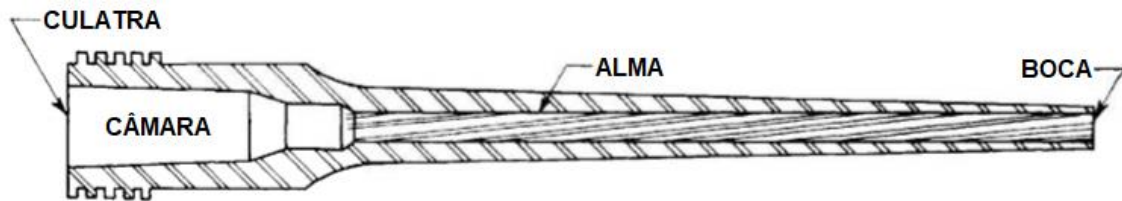


Figura 1.1 Perfil de um tubo da AMCP

No início do disparo, a munição encontra-se com sua região posterior na câmara, enquanto a sua região anterior, a frente da cinta de forçamento, se encontra na alma. Após o disparo, geralmente ocorre uma obturação à retaguarda do projétil, de forma a forçar os gases no sentido correto de projeto. É comum a existência de cones de forçamento nos projetos de tubos e de uma série de outros artifícios para assegurar o correto desenvolvimento da balística interna do armamento.

Em seu deslocamento no tubo, cuja superfície interna é um cilindro circular reto e a superfície externa podendo adotar diversos perfis, o projétil vai sendo acelerado pela pressão dos gases, podendo girar caso haja raias no tubo, para permitir uma maior estabilidade aerodinâmica em voo livre. Por fim, o projétil emerge pela boca do armamento, que pode possuir acessórios, como quebra-chamas, freios de boca e outros. Nessa região desenvolve-se a balística intermediária, que surge pela descontinuidade existente no escoamento dos gases ao saírem da boca da arma.

1.2 Fenômenos que ocorrem no tiro

Como foi dito, uma das funções do tubo é conduzir o projétil na direção correta e com a velocidade especificada no projeto. Para tanto, é necessário conhecer quais fenômenos que interferem no disparo. O disparo completo é um processo extremamente rápido, com duração da ordem de poucos milissegundos, nos quais se desenvolvem tensões e temperaturas extremamente altas e forças de inércia. Além disso, no caso de armas automáticas, a cadência de tiro, aliada ao deslocamento do projétil na alma, fazem a arma vibrar, o que deve ser considerado num projeto. Todos os fenômenos de tiro podem ser reunidos em três tipos principais: carregamento mecânico, transferência de calor e erosão do armamento.

No carregamento mecânico, os efeitos são mais previsíveis que os efeitos de transferência de calor e erosão. São causados pela pressão dos gases propelentes, por efeitos do projétil, forças de recuo e vibração.

A pressão dos gases é uma grande preocupação dos engenheiros de armamento, do ponto de vista estrutural, de tal forma que, uma vez dado o calibre, a espessura do tubo é calculada de forma a suportar as tensões alcançadas. Os efeitos do projétil estão relacionados ao torque, em caso de almas raiadas, ao deslocamento do mesmo no tubo e ao atrito entre a alma e o projétil. O movimento da massa recuante é controlado pelo mecanismo de recuo, que possui a finalidade de prover um deslocamento controlado e garantir a volta em bateria e manutenção da arma na posição em bateria, conforme (USAMC, 1964).

A vibração, em armas automáticas, tem como causa fundamental a cadência de tiro, com todas as suas fases de carregamento, disparo, abertura, fechamento etc. influenciando diretamente o movimento da arma. Outras fontes de vibração são a ação dos gases propelentes, o movimento do projétil na alma, a rotação do projétil, as forças de recuo, o golpe de boca e o movimento do tubo, que é influenciado, entre outras coisas, pela massa do tubo. Dessa forma, observa-se que o carregamento mecânico como um todo é o responsável pela vibração da arma. Os fenômenos de transferência de calor e erosão não tem influência significativa na vibração.

Geralmente, em armamentos pesados, de cadência de tiro lenta, o intervalo entre um tiro e outro permite um bom amortecimento dos fenômenos de vibração, sendo então tal fenômeno mais sério em armas automáticas, cujas altas cadências podem se tornar um problema no projeto, sobretudo na precisão e na integridade estrutural do tubo. Em armas leves, esse problema é ainda mais importante, pois sua estrutura é mais afetada pelas forças desenvolvidas no disparo.

No caso limite de ressonância entre a cadência de tiro e as frequências naturais do tubo ou em situações próximas, a vibração pode inclusive causar falhas estruturais e perda de precisão nos disparos. A Figura 1.2 mostra a influência da razão de frequência na dispersão dos disparos da arma em questão, como mostram os pontos máximos das ordenadas.

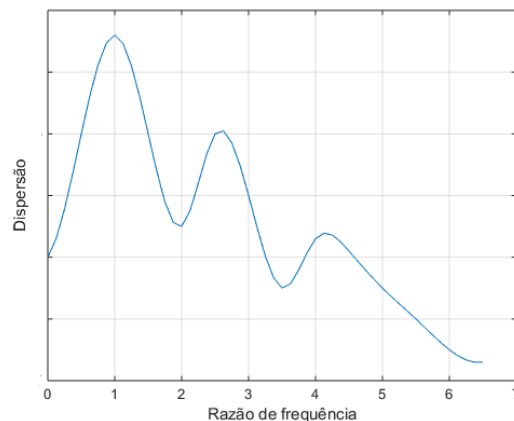


Figura 1.2 Dispersão por razão de frequência (baseada na Fig 11 da AMCP, que se refere ao trabalho de D. E. Wentz, et al, 1955)

1.3 Objetivos

A Figura 1.2 indica que, de fato, o fenômeno da ressonância influencia a dispersão dos tiros e os danos estruturais podem ser importantes (Rao, 2014). Dessa forma, é importante a análise das frequências naturais do tubo a fim de que se ajustem as cadências de tiro para que o fenômeno da ressonância seja evitado. O objetivo principal desse trabalho é a comparação da análise modal resultante de uma modelagem por elementos finitos com a realizada por meio do método da AMCP, apresentado em (USAMC, 1964).

Adicionalmente, procurou-se confeccionar um programa de computador que automatizasse o processo de obtenção de frequências naturais e que pudesse ser usado como Meio Auxiliar de Instrução nas aulas da Disciplina de Armamento II do IME e ferramenta de desenvolvimento na indústria da Base Industrial de Defesa (BID). Para se obterem essas frequências, foram utilizados dois procedimentos distintos: o uso da metodologia da AMCP, como preconiza (USAMC, 1964) e uma metodologia baseada no Método dos Elementos Finitos.

Essa dupla abordagem permitiu a comparação de resultados das duas metodologias citadas acima, de tal forma a se avaliar as consequências impostas pelas aproximações adotadas pelas AMCP, que é um método simplificado de análise. Por fim, salienta-se que o método dos elementos finitos foi empregado tanto através do software ANSYS® como através de um programa implementado em Matlab e em Octave, que foi chamado de Calculador Modal. Além disso, o método utilizado pela AMCP também foi implementado em Matlab.

2 MÉTODO DE STODOLA

Segundo Thorby (2008), o método de Stodola, assim como o método de Holzer ou o método de Durkeley, é um processo iterativo usado no cálculo dos modos de vibração principais, bem como as suas frequências naturais, para corpos com múltiplos graus de liberdade. Sua vantagem consiste em ser uma abordagem em que os autovalores e autovetores do sistema de equações são obtidos de maneira numérica.

Embora esse método seja mais empregado para se obter a primeira frequência natural, segundo Bhave (2010), é possível a obtenção das frequências subsequentes com tal método. Porém, pela teoria de modelagem de sistemas dinâmicos, sabe-se que a primeira frequência angular natural de um corpo é, em geral, a mais danosa à estrutura, por conter o maior nível de energia. Além disso, as frequências naturais correspondentes às frequências angulares subsequentes normalmente são mais altas que a cadência de tiro esperada para armas automáticas, o que torna desnecessária a obtenção das próximas frequências de vibração do tubo.

A simplicidade do método vem ao encontro das possibilidades e limitações encontradas no projeto de tubos à época em que tal método foi implementado, quando os recursos computacionais eram muito menos capazes do que os atuais. Uma forma de se descrever matematicamente o método, segundo (Mukhopadhyay, 2000), segue abaixo.

Seja uma equação vetorial (cujo desenvolvimento encontra-se no APÊNDICE 1) dada por:

$$[K]^{-1}[M][y] = \lambda[y] \quad \text{EQ 2.1}$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad \text{EQ 2.2}$$

Sendo $[K]$ a matriz de rigidez do sistema, $[M]$ a matriz de massa, $[y]$ vetor de deslocamento e ω a frequência angular do sistema.

O método de Stodola começa com o emprego de um vetor $[y]$ composto unicamente de elementos iguais a um.

Dessa maneira, considerando $[y]^i$, com o sobrescrito i indicando que essa é a i -ésima estimativa de valores para o vetor $[y]$, obtém-se um novo vetor $[y]^{i+1}$, onde o sobrescrito $i + 1$ indica um valor subsequente para o vetor $[y]$ baseado na estimativa inicial e que geralmente é diferente de $[y]^i$, a não ser que o vetor $[y]^i$ seja um modo de vibração, de acordo com a equação:

$$[K]^{-1} \cdot [M] \cdot [y]^i = \lambda \cdot [y]^{i+1} \quad \text{EQ 2.3}$$

A seguir, utilizando o valor de $[y]^{i+1}$, como entrada na EQ 2.3, repete-se o processo novamente, conforme a equação abaixo:

$$[K]^{-1} \cdot [M] \cdot [y]^{i+1} = \lambda \cdot [y]^{i+2} \quad \text{EQ 2.4}$$

Adota-se um critério de convergência, conforme a necessidade de precisão a ser obtida. Quando isso ocorrer, obtém-se o autovalor λ e, conseqüentemente, a frequência natural ω .

Para facilitar o entendimento, é apresentado um exemplo para tornar o método mais claro. O desenvolvimento do exemplo segue no APÊNDICE 1.

Transportando esses conceitos para o caso de uma viga engastada, é possível aplicar o método de Stodola para a obtenção da frequência natural dessa viga, que simula o tubo de um armamento. No entanto, a obtenção do modelo massa-mola equivalente à viga é um pouco mais trabalhoso, pelo fato de a viga ser um elemento contínuo, devendo ser empregados métodos para a sua discretização, como os conceitos de elementos finitos, que serão abordados mais à frente.

Empregando outra maneira, para o caso de vigas é possível uma abordagem mais simples, como a abordagem utilizada na AMCP, na qual a deflexão inicial representada pelo vetor $[y]$ é obtida pela ação de seu próprio peso como uma primeira aproximação e para o autovetor que representa o primeiro modo de vibrar.

Considerando o tubo como uma viga engastada suportando o seu próprio peso, pode-se dividir a viga em segmentos discretos com massa concentrada, sob ação da gravidade. Assim, segundo (Rao, 2014), considerando que a energia potencial do sistema é a energia de deformação da viga fletida, sendo essa energia equivalente ao trabalho realizado pelo carregamento aplicado, obtém-se a seguinte equação:

$$Ep = \frac{1}{2}(m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \dots + m_n g y_n) \quad \text{EQ 2.5}$$

Como a frequência que se quer nesse trabalho é uma das frequências naturais, considerando-se o caso de vibrações livres, a energia cinética devido às massas é dada por:

$$Ec = \frac{\omega^2}{2}(m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + \dots + m_n y_n^2) \quad \text{EQ 2.6}$$

Onde a velocidade v de cada segmento é definida como $v = \omega y$. Igualando as duas equações anteriores, tem-se:

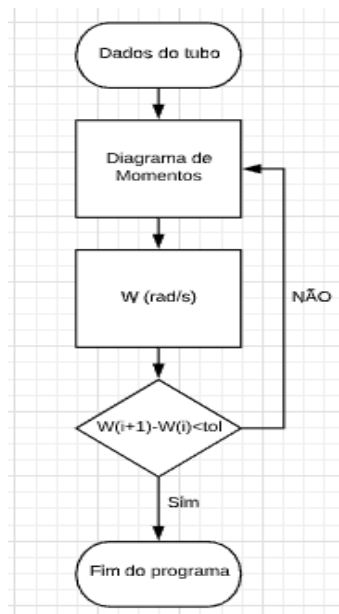
$$\frac{1}{2}(m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \dots + m_n g y_n) = \frac{\omega^2}{2}(m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + \dots + m_n y_n^2) \quad \text{EQ 2.7}$$

Rearranjando os termos e resolvendo para ω , obtem-se a seguinte equação:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \sum W y_i}{\sum W y_i^2}} \quad \text{EQ 2.8}$$

Onde g é a aceleração da gravidade, W é a força peso de cada segmento do tubo, y é a deflexão de cada segmento e ω é velocidade angular, em radianos por segundo. Nessa equação, para a primeira iteração, utiliza-se como estimativa inicial os valores de deflexão estática de cada seção do tubo.

O fluxograma abaixo esclarece o funcionamento.



A frequência natural pode ser calculada em termos da frequência angular conforme equação abaixo.

$$\omega = 2\pi f \quad \text{EQ 2.9}$$

Uma vez obtidos esses valores, pode-se definir a razão de frequência Rf através da equação:

$$Rf = \frac{fn}{fr} \quad \text{EQ 2.10}$$

Onde fn já foi definida e fr é a cadência de tiro, em tiros por segundo. Conforme a Figura 1.2, a fim de que sejam evitadas grandes dispersões, deve-se procurar manter razões de frequência $Rf > 3,5$.

2.1 Exemplo de aplicação na AMCP

Um exemplo de aplicação pode ser encontrado em (USAMC, 1964), onde é citado que a solução é baseada no método de Stodola, e será apresentado a seguir para tornar os conceitos mais claros. Supondo que se tenha um tubo de 36 polegadas como na Figura 1.1 abaixo, pode-se dividi-lo em três partes de mesmo comprimento, A, B e C. Subdividindo-se ainda cada segmento em mais três, é possível analisar a deflexão do centro de massa de cada segmento.

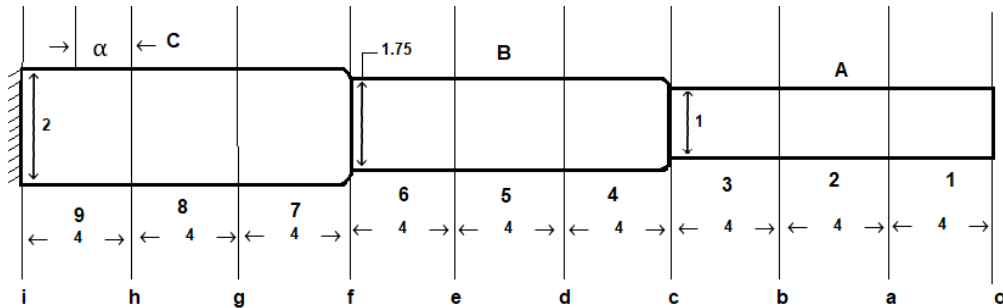


Figura 2.1 Exemplo de tubo em segmentos baseada na AMCP (em polegadas)

Na referência o tubo é considerado como um cilindro sólido, portanto pode-se calcular os momentos de inércia de área de cada um dos segmentos A, B e C conforme as equações a seguir.

$$I_A = \frac{\pi}{64} \cdot d_A^4 = \frac{\pi}{64} \cdot 1,5^4 = 0,249 \text{ pol}^4 = 10,363 \text{ cm}^4 \quad \text{EQ 2.11}$$

$$I_B = \frac{\pi}{64} \cdot d_B^4 = \frac{\pi}{64} \cdot 1,75^4 = 0,46 \text{ pol}^4 = 19,145 \text{ cm}^4 \quad \text{EQ 2.12}$$

$$I_C = \frac{\pi}{64} \cdot d_C^4 = \frac{\pi}{64} \cdot 2^4 = 0,785 \text{ pol}^4 = 32,671 \text{ cm}^4 \quad \text{EQ 2.13}$$

Para o cálculo do peso de cada segmento, a equação é dada por:

$$W_{oa} = W_{ab} = W_{bc} = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_A^2 \cdot L = 2,0 \text{ lbf} = 0,908 \text{ kgf} \quad \text{EQ 2.14}$$

$$W_{cd} = W_{de} = W_{ef} = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_B^2 \cdot L = 2,72 \text{ lbf} = 1,234 \text{ kgf} \quad \text{EQ 2.15}$$

$$W_{fg} = W_{gh} = W_{hi} = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_C^2 \cdot L = 3,56 \text{ lbf} = 1,616 \text{ kgf} \quad \text{EQ 2.16}$$

Onde $L = 4 \text{ pol}$ é o comprimento de cada segmento e $\rho = 0,283 \frac{\text{lbf}}{\text{in}^3}$ é o peso específico do aço escolhido para o exemplo. O próximo passo é o cálculo do momento total M devido ao peso de cada um dos segmentos. Calcula-se, então, a razão $\frac{M}{I}$. Com os dados disponíveis, é possível montar a tabela abaixo.

Tabela 1 Cálculo de M/I para condições estáticas

Seção	Segmento	W (lbf)	$\sum W$	α (in)	Δx (in)	$a.W$ (lbf.pol)	$\Delta x. \sum W$ (lbf.in)	M (lbf.in)	M/I $(\frac{lbf}{in^3})$
a	oa	2,0	0	2	0	4	0	4	16
b	ab	2,0	2,0	2	4	4	8,0	16	64
c	bc	2,0	4,0	2	4	4	16,0	36	144
d	cd	2,72	6,0	2	4	5,14	24,0	65,1	142
e	de	2,72	8,72	2	4	5,14	34,9	105	228
f	ef	2,72	11,44	2	4	5,14	45,8	156	338
g	fg	3,56	14,46	2	4	7,16	56,6	220	280
h	gh	3,56	17,72	2	4	7,16	70,9	298	378
i	hi	3,56	24,28	2	4	7,16	85,1	390	496

Onde W é o peso de cada segmento, considerando-se a força concentrada no centro de massa do segmento, $\sum W$ o esforço cortante acumulado na extremidade direita de cada segmento, a o braço do momento M em cada segmento e M o momento total em relação a uma determinada seção. Sendo M dado pela seguinte fórmula:

$$M = \sum(a.W + \Delta x. \sum W) \quad \text{EQ 2.17}$$

Para fins de exemplo, tem-se a figura abaixo para ajudar no esclarecimento do que foi dito:

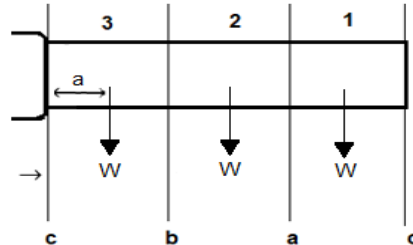


Figura 2.2 Análise de momento na seção c

Dessa forma, é possível elaborar o seguinte gráfico da Figura 2.3, que possui a razão entre Momento da Força aplicada e Momento de Inércia como ordenada e o comprimento do tubo como abcissa. É a partir desses gráficos que o diagrama de momentos fletores reduzidos é elaborado, o que justifica a presença da figura nesse trabalho. No entanto, o objetivo primário da figura é para fins de ilustração, pois os resultados de interesse desse trabalho provém do tratamento matemático a ser usado a partir do gráfico.



Figura 2.3 Diagrama M/I

De posse desse gráfico, é possível calcular o momento de área em relação ao centro de gravidade de cada segmento como apresentado na Figura 2.3 Nessa curva, M/I representa uma nova situação de carregamento, considerando uma distribuição trapezoidal.

Nessa figura, A_L é a área imediatamente à esquerda de uma seção considerada, A_R é a área imediatamente à direita da mesma seção considerada, q é a distância entre a seção considerada e o centroide da área A_L e r é a distância entre a seção considerada e o centroide da área A_R anterior e s a distância entre duas seções transversais.

A figura abaixo facilita a visualização do que foi dito:

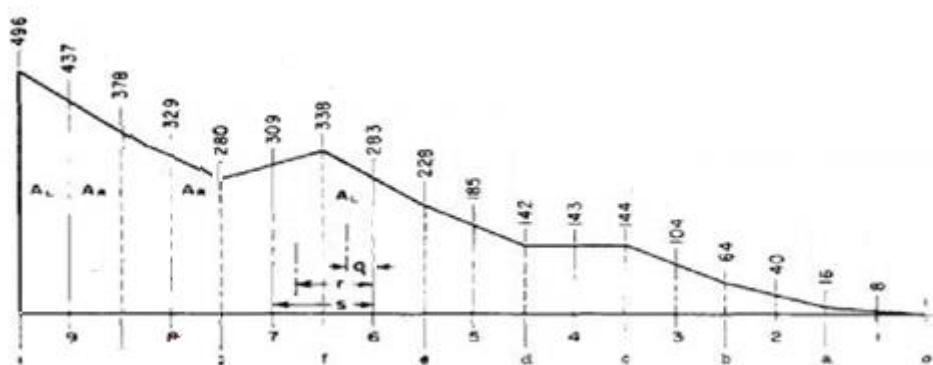


Figura 2.4 Cálculo do momento de área

Assim, pode-se calcular o momento de área do gráfico da Figura 2.3 em relação à cada seção. Para exemplificar, segue abaixo apresentado o momento de área em relação à seção 6.

O primeiro passo é calcular a área a esquerda do segmento 6. Nesse caso:

$$\Sigma A_6 = 3653 \frac{lb}{in^2} \quad \text{EQ 2.18}$$

O momento de área à esquerda da seção 6 é dada por:

$$M_{A6} = q_6 \cdot A_{L6} + r_6 \cdot A_{R7} + s_6 \cdot \Sigma A_6 = 17180 \frac{lb}{in} \quad \text{EQ 2.19}$$

O momento total à esquerda da seção 6 acumulada é dada por:

$$\Sigma M_{A6} = \Sigma M_{A7} + M_{A6} = 37280 \frac{lb}{in} \quad \text{EQ 2.20}$$

A deflexão real em qualquer seção é:

$$y = \frac{\Sigma M_A}{E} \quad \text{EQ 2.21}$$

Onde $E = 29(10^6) \frac{lb}{in^2}$ é o módulo de elasticidade e ΣM_A é a soma dos momentos de área na seção. Esse método equivale à obtenção da linha elástica por meio da integração direta da equação $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$.

Fazendo o mesmo procedimento para todas as seções, obtém-se os dados mostrados na Tabela 2:

Tabela 2 Momento de área em condição estática

Seção	ΣM_A
9	950
8	7860
7	20100
6	37280
5	58940
4	83590
3	110540
2	139140
1	168410

Calculando os itens necessários para encontrar a frequência natural e arranjando numa tabela, tem-se:

Tabela 3 Parâmetros de frequência natural para condição estática

Seção	y_1 (in)	W (lb)	$W y_1 \cdot 10^3$ (lb.in)	$W y_1^2 \cdot 10^6$ (lb.in ²)
1	0,0058	2	11,6	67,3
2	0,0048	2	9,6	46,1
3	0,00382	2	7	29,2
4	0,00288	2,72	7,84	22,6
5	0,00203	2,72	5,52	11,21
6	0,001287	2,72	3,5	4,5
7	0,000694	3,56	2,17	1,715
8	0,000273	3,56	0,97	0,265
9	0,000033	3,56	0,12	0,004

$$\Sigma M_{y_1} = 49,26 \cdot 10^{-3} \text{ lb.in} \quad \text{EQ 2.22}$$

$$\Sigma M_{y_1^2} = 182,9 \cdot 10^{-6} \text{ lb.in}^2 \quad \text{EQ 2.23}$$

Com esses dados, calcula-se a velocidade crítica através da equação 2.8.

$$\omega_1 = 323 \text{ rad/seg} \quad \text{EQ 2.24}$$

Uma vez obtido esse valor de velocidade angular, é possível iniciar a análise desse carregamento dinamicamente. Para tal, utilizam-se os dados estabelecidos para o carregamento estático para se obter o valor do movimento do centro de massa de cada incremento.

Dessa forma, considera-se o movimento harmônico do tubo por cada um de seus segmentos empregando o valor de ω_1 . Assim, são obtidas as seguintes equações:

$$y = y_{max} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \quad \text{EQ 2.25}$$

Derivando a equação, obtém-se:

$$y' = y_{max} \cdot \omega_1 \cdot \text{cos}(\omega_1 \cdot t) \quad \text{EQ 2.26}$$

Derivando-se novamente:

$$y'' = -y_{max} \cdot \omega_1^2 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \quad \text{EQ 2.27}$$

Assim:

$$y'' = a = -\omega_1^2 \cdot y \quad \text{EQ 2.28}$$

Com esse valor de aceleração a , utilizando a segunda lei de Newton:

$$F = m \cdot a = m \cdot w \omega_1^2 \cdot y = m_{din} \cdot g \quad \text{EQ 2.29}$$

$$m_{din} = \frac{m}{g} \cdot \omega_1^2 \cdot y \quad \text{EQ 2.30}$$

Esse valor m_{din} é o valor da massa nesse carregamento dinâmico. Em seguida, todo o processo feito para o carregamento estático é aplicado considerando esse valor m_{din} . Nesse exemplo, após feitos os cálculos, são obtidas as tabelas a seguir.

Tabela 4 Cálculo de M/I para condições dinâmicas

Seção	Segmento	W (lb)	$\sum W$	α (in)	Δx (in)	a.W (lb.in)	$\Delta x \cdot \sum W$ (lb.in)	M (lb.in)	M/I ($\frac{lb}{in^3}$)
a	oa	3,13	0	2	0	6,26	0	6,26	25
b	ab	2,59	3,13	2	4	5,18	12,5	23,9	96
c	bc	2,06	5,72	2	4	4,12	22,8	50,9	204
d	cd	2,11	7,78	2	4	4,22	31,9	86,2	187
e	de	1,49	9,89	2	4	2,98	39,6	129	280
f	ef	0,94	11,38	2	4	1,88	45,5	176	382
g	fg	0,67	12,32	2	4	1,34	49,3	227	290
h	gh	0,26	12,99	2	4	0,56	52,0	279	356
i	hi	0,03	13,25	2	4	0,06	53,0	332	422

Em seguida, calculam-se os momentos de área de cada segmento do diagrama de momento reduzido da mesma forma que foi feito no carregamento estático, obtendo a tabela abaixo.

Tabela 5 Momento de área em condição dinâmica

Seção	$\sum M_A$
9	819
8	6990
7	18400
6	35200
5	57100
4	82900
3	111800
2	143000
1	175300

Finalmente obtém-se os parâmetros para o cálculo da nova frequência angular, através da seguinte tabela.

Tabela 6 Parâmetros de frequência natural para condição dinâmica

Seção	y_1 (pol)	W (lb)	$W_{y_1} \cdot 10^3$ (lb. pol)	$W_{y_1^2} \cdot 10^6$ (lb. pol ²)
1	0,00605	2	2,1	73,2
2	0,00493	2	9,86	48,60
3	0,00386	2	7,72	29,75
4	0,00286	2,72	7,78	22,25
5	0,00197	2,72	5,36	10,58
6	0,00121	2,72	3,29	3,98
7	0,000635	3,56	2,26	1,41
8	0,000241	3,56	0,86	0,21
9	0,000028	3,56	0,10	0,004

Obtém-se a nova frequência angular:

$$\omega_2 = 317 \text{ rad/s} \quad \text{EQ 2.31}$$

Em seguida é feita uma nova rodada de cálculos para se verificar a convergência desse valor. Após a confirmação da convergência, aplica-se a seguinte equação:

$$fn = \frac{\omega_2}{2.\pi} = 50,77 \frac{\text{ciclos}}{\text{s}} \quad \text{EQ 2.32}$$

Essa frequência é comparada com a cadência de tiro e a razão entre elas indica a existência ou não da ressonância. As outras frequências naturais do tubo não são calculadas. Caso haja ressonância, é necessário alterar o projeto da cadência de tiro ou alterar as dimensões e material do tubo.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é uma técnica numérica para a solução de problemas de valores de contorno, tanto para equações diferenciais ordinárias como para equações diferenciais parciais. Os estudos do método dos elementos finitos têm sua origem na solução de problemas de mecânica dos sólidos, aplicada a estruturas e elementos como viga, eixo ou barra. Ele surgiu da dificuldade ou mesmo impossibilidade de se resolver analiticamente certos problemas que se apresentavam na realidade. O método transforma um problema analítico num problema numérico. Assim, ele é uma ferramenta para resolver uma equação diferencial ou um conjunto de equações diferenciais, tanto de problema de valor inicial ou de contorno, num conjunto de equações algébricas. No escopo desse trabalho, tem-se a análise do método para o caso unidimensional.

A eficácia do método permitiu a sua aplicação em diferentes áreas como transmissão de calor e massa, mecânica dos fluidos e outros. A importância do estudo do Método dos Elementos Finitos nesse trabalho reside no fato de que este método permite diversas análises de um modelo: estática, dinâmica modal e dinâmica transiente. A análise modal permite a obtenção de quaisquer modos de vibração da estrutura.

Assim, o conhecimento do método permitirá o seu emprego através de programas tipo CAE para a comparação de resultados entre o método de Stodola e outros métodos. No caso específico desse trabalho, o escopo é a aplicação do método a uma viga com uma extremidade engastada e a outra em balanço, com seção transversal variável, modelando um tubo de armamento. Embora tal tema seja aprofundado nas próximas fases desse trabalho, os parágrafos seguintes introduzem conceitos gerais sobre esse o método dos elementos finitos.

Dessa forma, dada uma equação diferencial e suas condições de contorno, o método se inicia com a obtenção da forma fraca desta equação, seguida da divisão do domínio Ω da equação em subdomínios Ω^e e em seguida se propõe um polinômio como solução da forma fraca de cada subdomínio. A cada um desses intervalos, as variáveis de interesse possuem valores em seus nós, definidos como pontos do elemento nos quais o erro da interpolação é nulo, assumindo valores interpolados em quaisquer pontos internos do intervalo. A forma fraca aplicada a cada elemento, por meio de seus nós, forma um sistema de equações. A solução desse sistema permite a obtenção dessas variáveis de estado que, através do uso das funções de interpolação, permitem a obtenção do valor numérico da variável de interesse em qualquer ponto do sistema analisado.

3.1 Emprego do método na obtenção das matrizes de inércia e de rigidez

O método dos elementos finitos será aplicado então num tubo modelado como uma viga engastada, representada pela sua linha elástica, tendo a seção transversal considerada por meio de seu momento de inércia de área em função da coordenada axial do tubo, como na Figura 3.1, que modela o tubo de um armamento e na qual P_i^e representa a força vertical no nó e T_i^e o momento fletor agindo no nó do elemento de comprimento L .

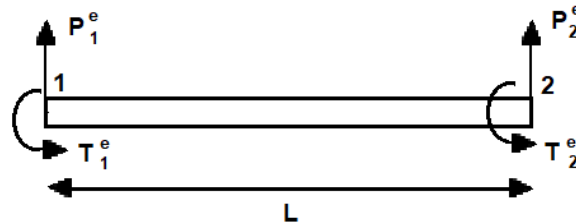


Figura 3.1 Elemento de viga unidimensional

Da teoria de mecânica dos sólidos, dado um elemento infinitesimal, tem-se que:

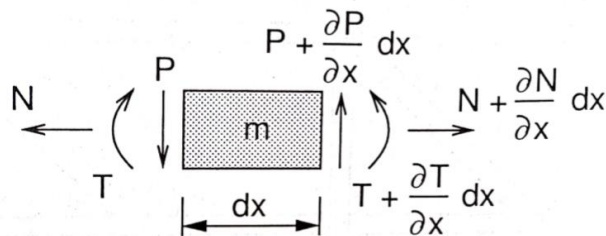


Figura 3.2 Elemento infinitesimal da viga

De onde se obtém:

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx + \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dx = 0 \quad \text{EQ 3.1}$$

E:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -P \quad \text{EQ 3.2}$$

Na direção y , o equilíbrio de forças resulta em:

$$\sum F_y = ma_y \quad \text{EQ 3.3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx = m \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \quad \text{EQ 3.4}$$

Substituindo a equação 3.1 na equação 3.3 e sabendo que $m = \rho A dx$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{EQ 3.5}$$

Como

$$T = EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \quad \text{EQ 3.6}$$

Substituindo-se a equação 3.5 na equação 3.4, tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{EQ 3.7}$$

Seja v uma solução aproximada para a equação original (equação 3.7), então R é o resíduo da solução aproximada (equação 3.8). O desenvolvimento do método, baseia-se no método variacional de Ritz, que busca encontrar uma função aproximada com valores próximos à função real. No entanto, esse variacional de Ritz contém um problema sério, que é a dificuldade em se encontrar uma função aproximada para certos tipos de curvas.

O método dos elementos finitos pode ser empregado na solução de equações como a equação 3.7. A solução, não sendo analítica, será aproximada. No entanto, o objetivo é que o erro nessa aproximação seja o menor possível. Existem diferentes técnicas para se minimizar os erros obtidos, como o método dos mínimos quadrados ou o método de resíduos ponderados.

$$R = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{EQ 3.8}$$

A figura abaixo ilustra essa dificuldade:

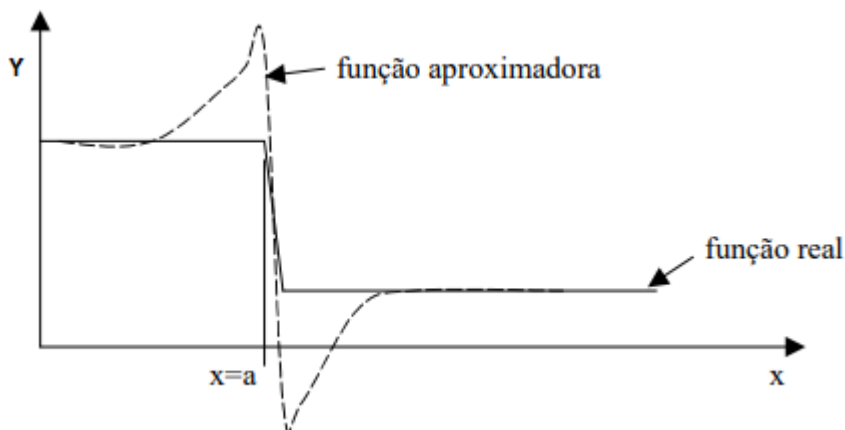


Figura 3.3 Exemplo de problema do método de Ritz

Nota-se que num ponto $x=a$, a função aproximadora pode apresentar valores muito diferentes do real, o que indica uma falha grave do método de Ritz. Na Figura 3.3, uma única função aproximadora está sendo utilizada, a qual se afasta do comportamento real no referido ponto. Assim, de forma a solucionar o problema, deve-se dividir o domínio em subintervalos menores, de forma a se obterem funções aproximadoras locais que tenham um comportamento mais próximo aos valores obtidos pela função real que se pretende avaliar. Assim, tem-se a Figura 3.4 para esclarecer esse ponto:

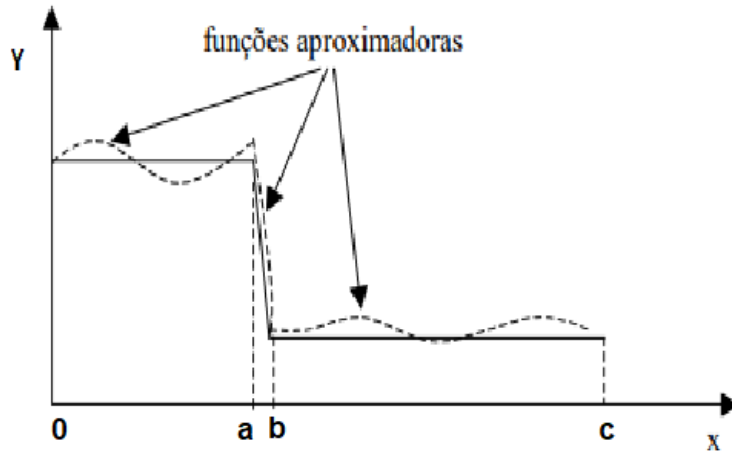


Figura 3.4 Subdivisão do domínio

Dessa forma, observa-se que dividir o domínio Ω de uma função em subdomínios Ω^e permite a obtenção de funções aproximadoras mais similares à função real. No caso da Figura 3.4, o domínio foi dividido em três subintervalos, $[0, a]$, $[a, b]$ e $[b, c]$. Então deve-se utilizar o método dos resíduos a cada subintervalo Ω^e da função que se quer aproximar. Dentre as diferentes formas de emprego do método dos resíduos ponderados, um dos mais importantes é o método de Galerkin. Assim, para minimizar o resíduo em cada subintervalo, utilizando-se do método de Galerkin, tem-se a seguinte equação:

$$\int_{x_1}^{x_2} R \cdot p(x) dx = 0 \quad \text{EQ 3.9}$$

onde $p(x)$ é uma função peso, diferente para cada domínio Ω^e . Dessa forma, aplicando o método de Galerkin à equação 3.6, tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} p(x) \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx = 0 \quad \text{EQ 3.10}$$

Desenvolvendo por partes a primeira integral, tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[p \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] dx + \int_{x_1}^{x_2} p(x) \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx = 0 \quad \text{EQ 3.11}$$

Desenvolvendo-se a segunda parcela por partes e, com o auxílio da equação 3.1 e equação 3.5, resolvendo as integrais definidas:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx + \int_{x_1}^{x_2} p(x) \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx = \left[\frac{\partial p(x_2)}{\partial x} T_2 - \frac{\partial p(x_1)}{\partial x} T_1 \right] + [p(x_2)P_2 - p(x_1)P_1] \text{ EQ 3.12}$$

A equação 3.11 é a forma fraca da equação de governo. Deve-se ter em mente que a forma fraca da equação se refere a cada subintervalo Ω^e do domínio, de forma que, embora não tenha sido escrito nas equações anteriores, os valores de v e x são locais, restritos a cada elemento.

O próximo passo do método dos elementos finitos pode consistir na aproximação de v como uma interpolação polinomial (embora não haja obrigatoriedade de se usar funções polinomiais) que usa os nós do elemento como nós interpolantes. Assim, pode-se considerar um valor de deslocamento de um ponto do elemento v^e como uma combinação linear da seguinte forma:

$$v^e(x, t) = \sum_{i=1}^2 \psi_i^v(x) \cdot v_i^e(t) + \sum_{i=1}^2 \psi_i^\theta(x) \cdot \theta_i^e(t) \quad \text{EQ 3.13}$$

Onde ψ_i^v e ψ_i^θ são polinômios interpoladores de Lagrange.

Para a continuidade do método, é necessário que se defina a função peso $p(x)$, que até então era uma função qualquer. Como existem quatro incógnitas v_1^e , v_2^e , θ_1^e e θ_2^e , deve ser criado um sistema de quatro equações para ser possível a obtenção dos valores das incógnitas. Dessa forma, substituindo $p(x) = \psi_1^v(x)$ na equação 3.11 tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 \psi_1^v}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx + \int_{x_1}^{x_2} \psi_1^v(x) \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx = \left[\frac{\partial p(x_2)}{\partial x} T_2 - \frac{\partial p(x_1)}{\partial x} T_1 \right] + [p(x_2)P_2 - p(x_1)P_1] \text{EQ 3.14}$$

Da mesma maneira, se $p(x) = \psi_2^v(x)$, tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 \psi_2^v}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx + \int_{x_1}^{x_2} \psi_2^v(x) \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx = \left[\frac{\partial p(x_2)}{\partial x} T_2 - \frac{\partial p(x_1)}{\partial x} T_1 \right] + [p(x_2)P_2 - p(x_1)P_1] \quad \text{EQ 3.15}$$

Resultados análogos são obtidos quando se faz $p(x) = \psi_1^\theta(x)$ e $p(x) = \psi_2^\theta(x)$.

Tem-se, portanto, um sistema de quatro equações para cada elemento de viga. Colocando essas quatro equações em forma matricial e aplicando as condições de contorno das funções interpoladoras, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{11}^e & K_{11}^e & K_{11}^e \\ K_{21}^e & K_{21}^e & K_{21}^e & K_{21}^e \\ K_{31}^e & K_{31}^e & K_{31}^e & K_{31}^e \\ K_{41}^e & K_{41}^e & K_{41}^e & K_{41}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^e \\ \theta_1^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{11}^e & M_{11}^e & M_{11}^e & M_{11}^e \\ M_{21}^e & M_{21}^e & M_{21}^e & M_{21}^e \\ M_{31}^e & M_{31}^e & M_{31}^e & M_{31}^e \\ M_{41}^e & M_{41}^e & M_{41}^e & M_{41}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_1^e \\ \ddot{\theta}_1^e \\ \ddot{v}_2^e \\ \ddot{\theta}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^e \\ T_1^e \\ P_2^e \\ T_2^e \end{bmatrix} \text{EQ 3.16}$$

$$\text{Onde } K_{ij}^e = EI \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 \psi_i^{v,\theta}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_j^{v,\theta}}{\partial x^2} dx \text{ e } M_{ij}^e = \rho A \int_{x_1}^{x_2} \psi_i^{v,\theta} \psi_j^{v,\theta} dx.$$

A matriz que se encontra a esquerda da equação matricial chama-se matriz de rigidez do elemento e o vetor do lado esquerdo da equação é o vetor dos nós do elemento. A segunda matriz do lado esquerdo da equação é a matriz de inércia do elemento. Geralmente, no lado direito tem-se o vetor de carregamento. No caso particular desse trabalho, esse vetor será nulo para a obtenção das frequências naturais do tubo, uma vez que as forças que agem em um elemento são anuladas pelas forças dos elementos adjacentes.

Considerando que essa equação matricial é relativa a um elemento, deve-se, a partir do mapeamento dos graus de liberdade locais de cada elemento no sistema de equações global do problema, construir as matrizes globais do sistema. Para tanto, é necessário analisar a correspondência existente entre os nós locais e os nós globais para a montagem da equação matricial global que modela o problema. Existem diversas abordagens que fazem essa montagem, mas, em linha geral, elas consistem, de uma certa maneira, na superposição dos elementos que constituem as matrizes de rigidez e de inércia e os vetores de carregamento de cada elemento.

Por fim, montada a equação matricial global, obtidos os elementos da matriz de rigidez e de inércia e do vetor de carregamento, deve-se resolver o sistema de equações lineares global, caso se queira resolver a linha elástica em função do tempo. Para tanto, existem diversos métodos numéricos que resolvem o sistema, dado que os métodos analíticos geralmente possuem aplicação limitada, embora as características de simetria das matrizes de rigidez auxiliem na busca de solução analítica.

A equação 3.15 pode ser usada para o cálculo das frequências angulares naturais e dos modos de vibrar do sistema. Para tanto aplicam-se as condições de contorno referentes à configuração física da construção e utiliza-se algum método numérico para o cálculo dos autovetores e autovalores, como o método de Stodola, por exemplo.

3.2 Matrizes de rigidez e inércia locais

Para se resolver a equação 3.16, é necessário conhecer o valor das funções de interpolação $\psi_i^{v,\theta}$. Embora existam diferentes maneiras de se determinar o polinômio interpolador de Lagrange, uma solução bastante adequada é resolver-se analiticamente a deformação do elemento de viga a partir do deslocamento unitário θ_1^e e v_1^e . Observa-se nas figuras abaixo o elemento de viga com 4 tipos de deslocamentos unitários (dois angulares e dois transversais) e o formato que o elemento de viga assume para cada um dos quatro tipos de deslocamentos, na solução analítica para o elemento, o que constitui-se na melhor função de interpolação que o elemento pode assumir.

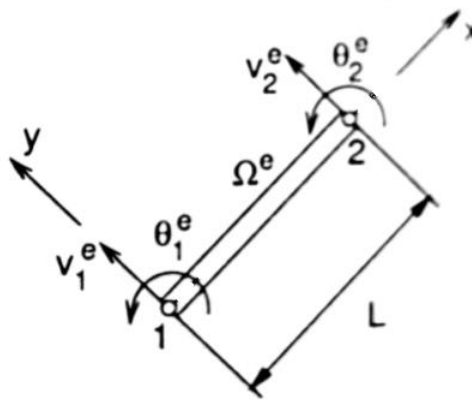


Figura 3.5 Elemento de viga

Considerando-se um deslocamento unitário de cada um desses deslocamentos, a solução analítica compreende as seguintes figuras abaixo.

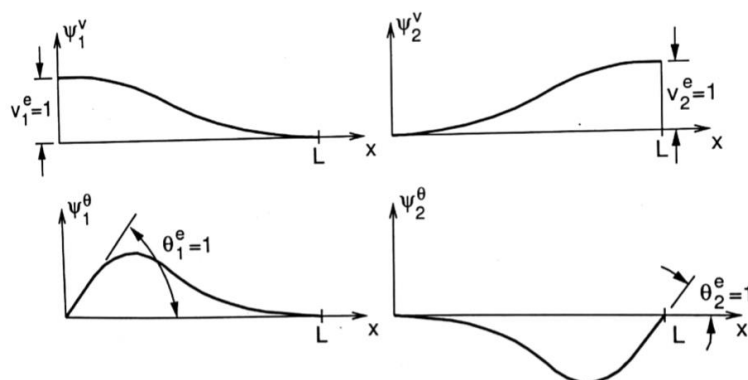


Figura 3.6 Funções de interpolação

A solução analítica permite a obtenção das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 \psi_1^v(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
 \psi_2^v(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
 \psi_1^\theta(x) &= \frac{x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 L \\
 \psi_2^\theta(x) &= \left(\frac{x}{L} - 1\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 L
 \end{aligned}
 \tag{EQ 3.17}$$

Substituindo a EQ 3.17 na Equação 3.15, obtém-se a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^e \\ \theta_1^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{156\rho AL}{420} & \frac{22\rho AL^2}{420} & \frac{54\rho AL}{420} & \frac{13\rho AL^2}{420} \\ \frac{22\rho AL^2}{420} & \frac{4\rho AL^3}{420} & \frac{13\rho AL^2}{420} & \frac{-3\rho AL^3}{420} \\ \frac{54\rho AL}{420} & \frac{13\rho AL^2}{420} & \frac{156\rho AL}{420} & \frac{-22\rho AL^2}{420} \\ \frac{-13\rho AL^2}{420} & \frac{-3\rho AL^3}{420} & \frac{-22\rho AL^2}{420} & \frac{4\rho AL^3}{420} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^e \\ \theta_1^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^e \\ T_1^e \\ P_2^e \\ T_2^e \end{bmatrix}
 \tag{EQ 3.18}$$

Dessa equação, tem-se a matriz de rigidez e a matriz de inércia de um elemento de viga.

3.3 Obtenção das matrizes de rigidez e de inércia globais

No item anterior, foram obtidas as matrizes para um único elemento de viga. No entanto é necessário obter as matrizes de rigidez e de inércia de cada elemento discretizado do tubo. Para isso, é necessário utilizar o conceito de matrizes de inércia e rigidez globais que concatenam as matrizes de cada elemento numa única matriz.

A fim de se tornar mais claro o processo de obtenção das matrizes de rigidez global tem-se a seguinte figura:

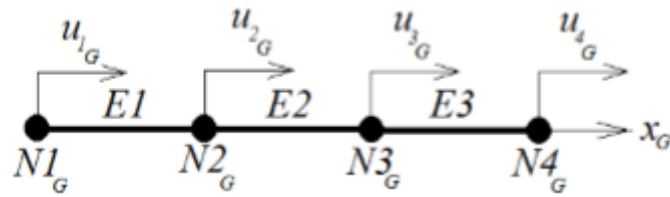


Figura 3.7 Corpo discretizado

São conhecidas as matrizes de rigidez de cada um dos elementos desta barra. De forma análoga ao que foi realizada nos parágrafos anteriores, é possível analisar os deslocamentos unitários de cada nó conforme figura abaixo:

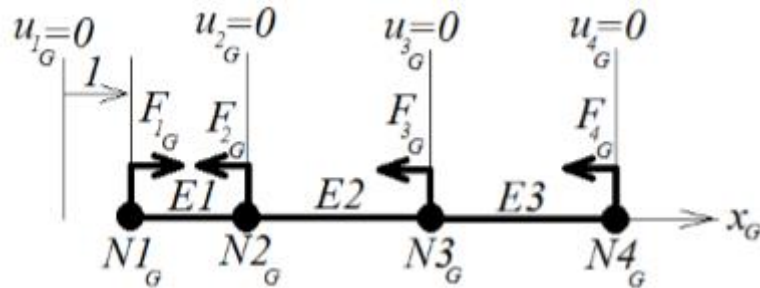


Figura 3.8 Forçamento em corpo discretizado

onde:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{K}] \mathbf{u} \rightarrow \begin{Bmatrix} F_{1c} \\ F_{2c} \\ F_{3c} \\ F_{4c} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11c} & k_{12c} & k_{13c} & k_{14c} \\ k_{21c} & k_{22c} & k_{23c} & k_{24c} \\ k_{31c} & k_{32c} & k_{33c} & k_{34c} \\ k_{41c} & k_{42c} & k_{43c} & k_{44c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1c} \\ u_{2c} \\ u_{3c} \\ u_{4c} \end{Bmatrix} \quad \text{EQ 3.19}$$

Nessa situação, de acordo com a figura, tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} F_{1G} \\ F_{2G} \\ F_{3G} \\ F_{4G} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11G} & k_{12G} & k_{13G} & k_{14G} \\ k_{21G} & k_{22G} & k_{23G} & k_{24G} \\ k_{31G} & k_{32G} & k_{33G} & k_{34G} \\ k_{41G} & k_{42G} & k_{43G} & k_{44G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{EQ 3.20}$$

É importante fazer a interpretação física do que está acontecendo. Pela figura, observa-se o que o 2º nó não se desloca, portanto as forças aplicadas nos nós seguintes são iguais a 0. Dessa forma, obtém-se o seguinte:

$$\begin{aligned} F_{1G} &= k_{11G} \\ F_{2G} &= k_{21G} \\ F_{3G} &= k_{31G} \\ F_{4G} &= k_{41G} \end{aligned} \quad \text{EQ 3.21}$$

Mas,

$$F_{3G} = F_{4G} = 0 \quad \text{EQ 3.22}$$

Assim,

$$k_{31G} = 0 \quad \text{EQ 3.23}$$

$$k_{41G} = 0$$

Para se obterem os coeficientes que faltam, analisa-se o elemento de barra isoladamente:

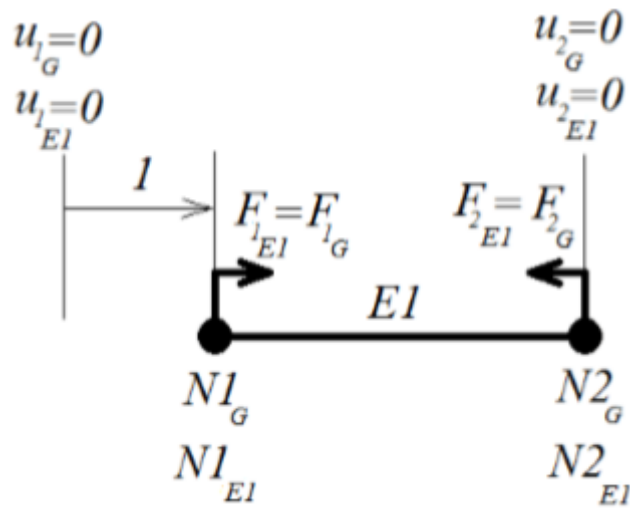


Figura 3.9 Elemento de barra

Observa-se, neste caso, que:

$$\begin{aligned}
 F_{1_G} &= F_{1_{EI}} \\
 F_{2_G} &= F_{2_{EI}} \\
 F_{1_{EI}} &= k_{11_{EI}} \\
 F_{2_{EI}} &= k_{21_{EI}}
 \end{aligned}
 \tag{EQ 3.24}$$

Como:

$$F_{1_G} = k_{11_G}
 \tag{EQ 3.25}$$

e

$$F_{2_G} = k_{21_G}
 \tag{EQ 3.26}$$

Conclui-se que:

$$k_{11_G} = k_{11_{EI}}
 \tag{EQ 3.27}$$

e

$$k_{21G} = k_{21E1} \quad \text{EQ 3.28}$$

Supondo, agora, um deslocamento unitário no segundo nó da barra, como na figura abaixo, tem-se:

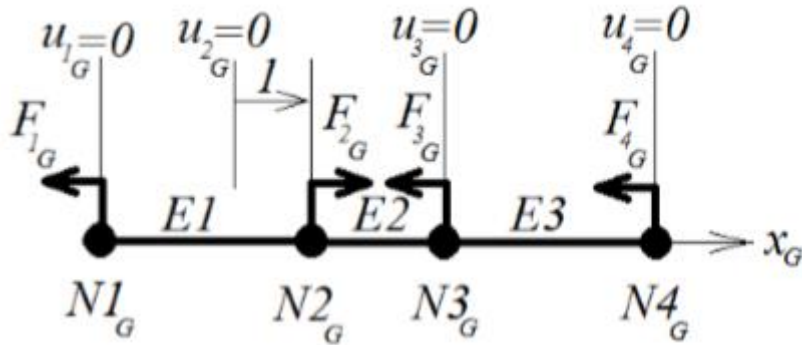


Figura 3.10 Deslocamento no segundo nó

De onde se conclui que:

$$\begin{aligned} F_{1G} &= k_{12G} \\ F_{2G} &= k_{22G} \\ F_{3G} &= k_{32G} \\ F_{4G} &= k_{42G} \end{aligned} \quad \text{EQ 3.29}$$

Da figura acima, observa-se que a força no nó 4 é nula, o que implica que:

$$k_{42G} = 0 \quad \text{EQ 3.30}$$

Da mesma forma que o que foi feito anteriormente, é necessário a obtenção dos outros componentes. Para isso, analisando-se os elementos 1 e 2, conforme a figura abaixo, tem-se:

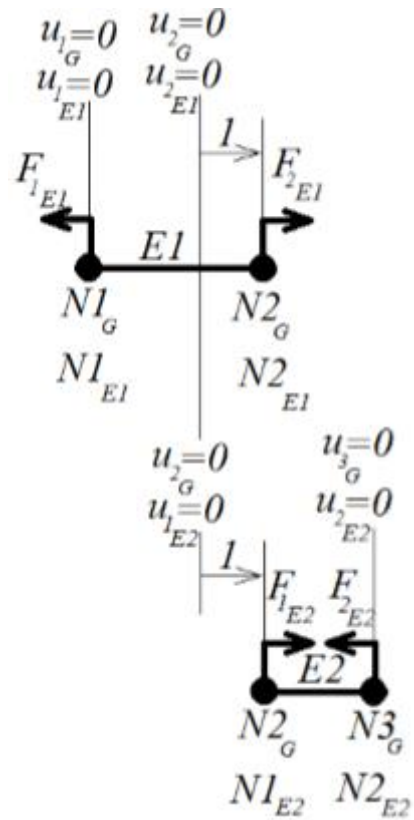


Figura 3.11 Elementos isolados

As equações de equilíbrio do elemento 1 nos permitem concluir que:

$$\begin{aligned}
 F_{1G} &= F_{1E1} \\
 F_{2G} &= F_{2E1} + F_{1E2} \\
 F_{3G} &= F_{2E2}
 \end{aligned}
 \tag{EQ 3.31}$$

$$\begin{aligned}
 F_{1E1} &= k_{12E1} \\
 F_{2E1} &= k_{22E1}
 \end{aligned}
 \tag{EQ 3.32}$$

Por fim, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 F_{1G} &= k_{12E1} \\
 k_{12G} &= k_{12E1}
 \end{aligned}
 \tag{EQ 3.33}$$

Ao se analisar o elemento 2, realizando o mesmo encadeamento lógico utilizado no elemento 1, obtém-se:

$$k_{22_G} = k_{22_{E1}} + k_{11_{E2}} \quad \text{EQ 3.34}$$

e

$$k_{32_G} = k_{21_{E2}} \quad \text{EQ 3.35}$$

Raciocinando-se de maneira semelhante para os elementos seguintes, chega-se aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned} k_{13_G} &= 0 \\ k_{23_G} &= k_{12_{E2}} \\ k_{33_G} &= k_{22_{E2}} + k_{11_{E3}} \\ k_{43_G} &= k_{21_{E3}} \\ k_{14_G} &= 0 \\ k_{24_G} &= 0 \\ k_{34_G} &= k_{12_{E3}} \\ k_{44_G} &= k_{22_{E3}} \end{aligned} \quad \text{EQ 3.36}$$

Matricialmente é mais simples enxergar o que está ocorrendo.

$$[K]_G = \begin{bmatrix} k_{11_G} = k_{11_{E1}} & k_{12_G} = k_{12_{E1}} & k_{13_G} = 0 & k_{14_G} = 0 \\ k_{21_G} = k_{21_{E1}} & k_{22_G} = k_{22_{E1}} + k_{11_{E2}} & k_{23_G} = k_{12_{E2}} & k_{24_G} = 0 \\ k_{31_G} = 0 & k_{32_G} = k_{21_{E2}} & k_{33_G} = k_{22_{E2}} + k_{11_{E3}} & k_{34_G} = k_{12_{E3}} \\ k_{41_G} = 0 & k_{42_G} = 0 & k_{43_G} = k_{21_{E3}} & k_{44_G} = k_{22_{E3}} \end{bmatrix} \quad \text{EQ 3.37}$$

Generalizando esse resultado para uma quantidade de elementos n , tem-se a seguinte representação de concatenação das matrizes de rigidez dos elementos:

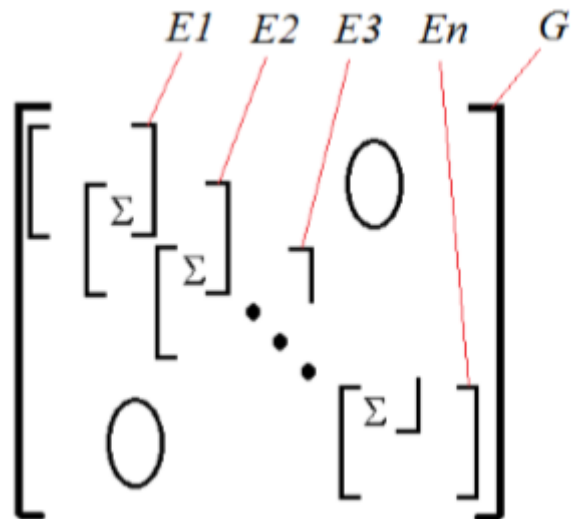


Figura 3.12 Matriz global

É possível, estendendo-se raciocínio comprovar que a matriz de massas global é obtida de maneira análoga a obtenção da matriz de rigidez global.

É importante ressaltar que a matriz global, da forma como foi exposta aqui, foi escrita seguindo um determinado modo de numeração das matrizes dos elementos, de forma que é necessário manter-se essa enumeração sob pena de se construir uma matriz global errada.

3.4 Programa Calculador modal

A partir da teoria de elementos finitos, foi possível a criação de um programa nesse trabalho, que resolve a equação matricial global e fornece os modos de vibração do tubo. Esse programa será chamado de Calculador Modal e será o Meio Auxiliar de Instrução abordado anteriormente dentre os objetivos desse trabalho, pois, como será visto posteriormente, mostrou-se uma ferramenta adequada.

A adequação dos resultados citada acima foi constatada ao serem comparados os resultados obtidos pelo Calculador Modal com a solução analítica (nos casos onde foi possível obtê-la), com a análise modal feita pelo ANSYS e, finalmente, com a solução apresentada pela AMCP, que também foi implementada em Matlab. Além disso, as três metodologias serão comparadas entre si, para que sejam observadas as divergências entre elas e seja possível a validação.

O Calculador Modal calcula autovalores e autovetores de equações matriciais, conforme exemplifica a equação abaixo:

$$[M]_g \ddot{v} + [K]_g v = [0] \quad \text{EQ 3.38}$$

Onde $[M]_g$ é a matriz de inércia global do tubo, $[K]_g$ é a matriz de rigidez global e v o vetor de deslocamentos dos nós. A obtenção dos autovalores permite a obtenção das frequências angulares naturais desejadas. A obtenção dos autovetores fornece os modos de vibração.

O programa desenvolvido nesse trabalho (Calculador Modal) recebe como input o material e a geometria do tubo a ser analisado, em particular um vetor de diâmetros externos e internos, massa específica e módulo de elasticidade do material.

O Calculador Modal possui características que visam aumentar a velocidade de processamento do programa: os primeiros elementos e os últimos elementos das matrizes globais de inércia e rigidez são obtidos de maneira direta, sem necessidade de entrada no laço **for** existente no programa, o que aumenta a velocidade do código. Ele permite que se personalize a quantidade de elementos em cada seção, variando-se o número de nós.

Além disso, os dados de entrada são colocados num programa secundário, chamado *input_data*, de forma que o programa principal não tivesse dados específicos de um armamento ou material. Ainda, foram implementadas formas de se registrar melhor a entrada e a saída de dados, para que o usuário pudesse observar e armazenar dados de seu interesse para posterior análise.

Com os dados de entrada fornecidos no programa auxiliar *input_data* ou pelo vetor de diâmetros, o Calculador Modal calcula momentos de inércia e as matrizes de rigidez e de inércia para cada elemento, em seguida concatena as matrizes dos elementos em matrizes globais.

Em seguida, o programa extrai os autovalores que são utilizados para se obterem as frequências angulares, utilizando uma rotina interna do Matlab. O programa também apresenta como saída, além da frequência natural e da velocidade angular, o gráfico da linha elástica obtido.

O método de extração de autovetores e autovalores é proveniente da função *eig*, cujo desenvolvimento provém das rotinas contidas no pacote *LAPACK*. No caso de interesse desse trabalho, o tipo de problema a ser resolvido foi o de problema de autovalor regular e singular.

Após a implementação do programa em Matlab, garantiu-se que o programa também funciona em *Octave*, que é um código aberto possuindo muita semelhança com o Matlab. Em anexo desse trabalho há o código-fonte desenvolvido em Matlab para o cálculo das frequências angulares, além dos dados de entrada para o tubo .50 fornecidos pelo AGR.

3.5 Uso do ANSYS

O software ANSYS é um dos principais programas que trabalham com o conceito de elementos finitos, podendo produzir resultados variados, dentre os quais, resultados de análise modal. Existem duas interfaces distintas que podem ser usadas, o APDL e a *Workbench*. No caso particular desse trabalho, optou-se pelo APDL.

O APDL é um acrônimo para *ANSYS Parametric Design Language*, que é uma linguagem que permite a parametrização de modelos escritos pelo usuário, o que permite a automatização desses modelos. Com ele, é possível a entrada de dimensões de modelos, propriedades materiais, tipos de elemento, tipo de análise, customização da modelagem, de malha, dos carregamentos, das restrições e outras. Permite ainda o uso de uma base de dados do ANSYS, macros e criação de atalhos (*short cuts*) para programas frequentemente utilizados.

Os dados de entrada no programa ANSYS APDL são os relacionados abaixo:

Preferences	Structural
Element Type	Beam 188
Material Model	Linear Elastic Isotropic
Density	7850
Coeficiente de Poisson	0,3
Módulo de Elasticidade	200 GPa
Extraction Method	Block Lanczos
Element Divisions	10
Analysis Type	Modal
Degrees of freedom	UX UY UZ ROTX ROTY ROTZ
Equation Solver Option	Sparse

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Sequência de testes realizados

Os testes realizados neste trabalho foram conduzidos de uma maneira sequencial para que, num primeiro momento fosse possível verificar as diferentes implementações abordadas e, através de comparações entre elas e de resultados analíticos existentes, além dos resultados obtidos na bibliografia, fosse possível as validações necessárias a partir dos resultados dos testes.

O primeiro passo foi a implementação de um código que obtenha os mesmos resultados obtidos pela AMCP. Assim, o primeiro programa feito foi um código em Matlab, que deveria apresentar os mesmos resultados de (USAMC, 1964). Uma vez criado o algoritmo, utilizando-se dos mesmos dados de entrada fornecidos no exemplo da AMCP, era necessário verificar se a saída do algoritmo seria igual ao resultado previsto no exemplo. Além disso havia a questão da convergência de resultados, uma característica do método da AMCP.

O programa utilizado neste trabalho baseado no Método dos Elementos Finitos foi o ANSYS. Tal programa possuiu duas finalidades nesse trabalho: validar os resultados da implementação própria de Elementos Finitos em situações em que não fosse conveniente usar a implementação das AMCP e diferenciar desvios que a implementação própria do MEF apresentasse em relação aos resultados das AMCP decorrentes de desvios daqueles resultantes das diferenças nas metodologias.

No entanto, não bastava empregar um software já consagrado pelo uso, pois um dos objetivos deste trabalho era justamente o de se criar uma implementação própria, e que recebeu o nome de Calculador Modal. Tanto o ANSYS quanto o Calculador Modal foram comparados entre si e comparados com o método da AMCP, para se verificar desvios na avaliação de cada metodologia. Isso está indicado na linha 1 da Tabela 7 abaixo. Os resultados de todas as implementações feitas estão na mesma Tabela 7, abaixo.

Tabela 7 Sumário de teste realizados

Número	Tipo de tubo	Diagramas de Momentos (AMCP)	Calculador modal	ANSYS	Analítico
1	Exemplo da AMCP	X	X	X	
2	Tubo uniforme maciço	X	X	X	X
3	Tubo uniforme oco	X	X	X	X
4	Tubo cônico	X	X	X	
5	Tubo .50		X	X	

A partir de então, o próximo passo foi usar o mesmo exemplo da AMCP na implementação através do ANSYS e do Calculador Modal e comparar os resultados. Nesse caso, a base foi o resultado do ANSYS. Isso serviu para que os resultados do Calculador Modal fossem avaliados em relação aos resultados do software ANSYS, de forma a se verificar a validade deste programa em relação a um programa consagrado (ANSYS). O objetivo de se comparar o método dos diagramas de momentos fletores reduzidos com o ANSYS foi de se verificar se o método da AMCP é válido, uma vez que o ANSYS serve de base de comparação pela sua confiabilidade de resultados, amplamente usada em projetos de engenharia mundo afora.

Uma vez que tais resultados foram obtidos, analisando-se as diferenças entre eles, foi possível estabelecer o nível de precisão e de confiabilidade entre as 3 abordagens distintas. É necessário observar que, inicialmente, esses testes foram todos feitos com tubos uniformes maciços, conforme a linha 2 da Tabela 7. Em seguida o objetivo seria o de se averiguar se as 3 abordagens são compatíveis com uma abordagem analítica exata a fim de se verificar quais abordagens podem ser aplicadas na prática quando comparadas ao resultado analítico, que é exato.

Feita a comparação entre os 3 métodos com o método analítico, foi obtida a primeira validação das 3 abordagens com uma solução exata. O próximo passo foi realizar o mesmo tipo de validação entre as 3 abordagens, considerando-se um tubo oco, conforme a linha 3 da Tabela 7. Essa distinção entre ter-se ou não calibre decorre do fato de o exemplo da AMCP ter sido feito sem a presença do calibre (tubo maciço), o que motivou os primeiros passos de testes nesse sentido.

Em seguida, fez-se a avaliação das abordagens em tubos que não tem perfil cilíndrico reto, o que foi feito empregando-se um perfil cônico para os 3 casos, como consta na linha 4 da Tabela 7. Não foi encontrado, neste trabalho, uma solução analítica para o perfil cônico de forma que as comparações só puderam ser realizadas entre as 3 abordagens, AMCP, Calculador Modal e ANSYS.

Finalmente foram realizados testes de implementação com o perfil da metralhadora Browning .50, cujas dimensões foram medidas com um paquímetro no Laboratório de Armamento do IME e comparadas ao desenho cedido junto ao Arsenal de Guerra do Rio, como na linha 5 da Tabela 7. Os resultados de toda essa sequência estão explicitados abaixo.

4.2 Teste de Implementação do Método da AMCP

Uma vez tendo os dados dimensionais e materiais empregados no tubo, é possível implementar um código em Matlab para o cálculo das frequências naturais para as mais diversas configurações. Usando o programa desenvolvido nesse trabalho, utilizando os dados da mesma arma usada no exemplo da AMCP, os seguintes resultados são obtidos.

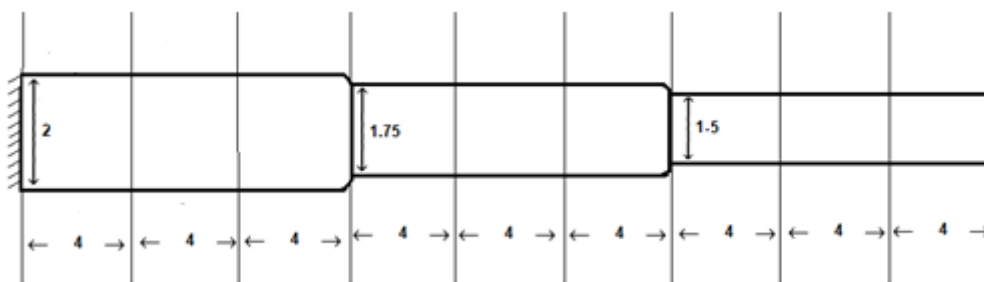


Figura 4.1 Tubo usado na AMCP

$$\omega = 317,35 \frac{rad}{s} \quad \text{EQ 4.1}$$

Dividindo-se o tubo em 90 seções, de forma a aumentar a precisão, obtém-se o seguinte resultado:

$$\omega = 323,52 \frac{rad}{s} \quad \text{EQ 4.2}$$

Cabe observar que a quantidade de nós empregados na malha influencia a metodologia do Diagrama de Momentos Fletores Reduzidos, de maneira mais significativa que as outras metodologias. Pode-se observar tal fato pela análise da figura abaixo, que indica como a frequência angular varia com o refinamento da malha, aproximando-se do resultado previsto pela metodologia da viga de Bernoulli-Euler com o calculador modal.

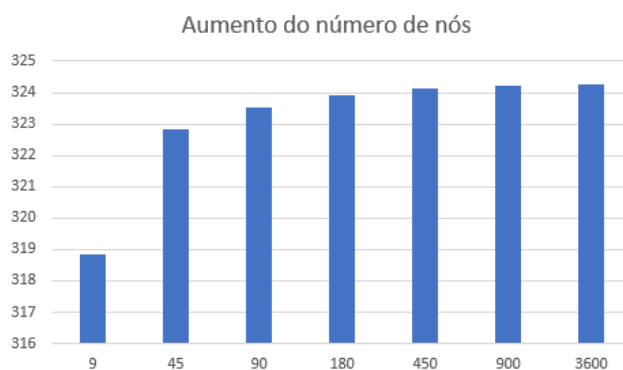


Figura 4.2 Influência da malha

4.3 Emprego do ANSYS e do Calculador Modal com os dados da AMCP

Utilizando o método dos elementos finitos, é possível dividir o tubo em uma certa quantidade de elementos a fim de se avaliar a teoria dos elementos finitos aplicadas em conjunto com o conceito de matrizes globais.

Para fins de comodidade, o tubo pode ser dividido em 9 seções, de maneira similar ao que (USAMC, 1964) fez, embora possam ser divididas em mais seções.

Utilizando os mesmos dados da AMCP no APDL do ANSYS foi obtido o seguinte resultado:

$$\omega = 325,64 \text{ rad/s} \quad \text{EQ 4.3}$$

Utilizando o Calculador Modal, para os mesmos dados do exemplo da AMCP, tem-se a seguinte frequência angular:

$$\omega = 326,40 \text{ rad/s} \quad \text{EQ 4.4}$$

A Figura 4.3 indica que o desvio encontrado na solução pela metodologia da AMCP é maior que o programa Calculador Modal tendo por base a solução do ANSYS. O desvio maior da AMCP decorre do fato de ser uma implementação mais simples, que ignora detalhes da geometria ao se utilizar de conceitos globais como centroides e momentos de área.

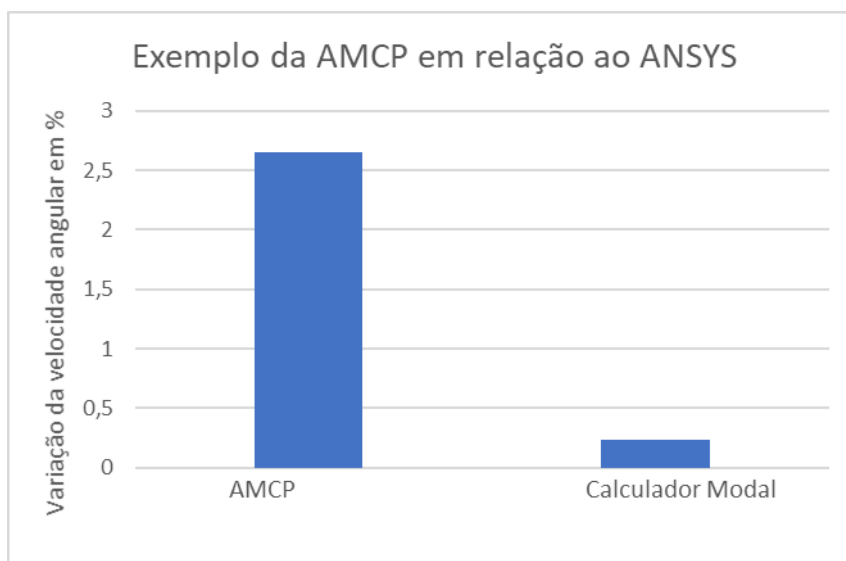


Figura 4.3 Desvios nas frequências do exemplo da AMCP pelos métodos do Diagrama de Momentos (AMCP) e do Calculador Modal em relação ao ANSYS

4.4 Tubo uniforme maciço

Embora não seja o caso de nenhuma arma, o tubo uniforme maciço possui solução analítica, que serve de referência para as metodologias abordadas. Uma vez que o programa apresenta dados similares à solução exata do problema da viga engastada e também apresenta dados também similares ao método apresentado na AMCP, o próximo passo é verificar a imprecisão que existe na AMCP pela opção de se ignorar o perfil interno do armamento. Dessa forma, considerando o caso de um tubo uniforme maciço de diâmetro externo de 1.4 polegadas e comprimento de 40 polegadas, obtém-se os seguintes resultados:

$$\omega = 153,17 \frac{rad}{s} \quad \text{EQ 4.5}$$

No emprego do ANSYS, obtém-se a seguinte velocidade angular:

$$\omega = 152,56 rad/s \quad \text{EQ 4.6}$$

Já a linha elástica obtida foi a da figura Figura 4.5 abaixo:

Utilizando o Calculador Modal, para esse caso, tem-se o seguinte:

$$\omega = 152,71 rad/s \quad \text{EQ 4.7}$$

É necessário confirmar de alguma forma a correção desses resultados. Para tanto, é necessário a obtenção da solução exata desse tipo de análise, que será apresentada abaixo.

Segundo (Figueiredo, 2014), a primeira frequência natural de uma viga engastada pode ser escrita como:

$$\omega = \frac{3,5171}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \text{EQ 4.8}$$

Dessa forma, utilizando os mesmos dados, obtém-se para a solução exata o valor de $\omega_1 = 152,79 rad/s$, o que é bem próximo ao valor obtido pelas outras metodologias. Cabe ressaltar que o objetivo é a avaliação da primeira frequência natural, embora o método analítico forneça as demais.

A Figura 4.4 indica que para um tubo maciço observa-se que o desvio é pequeno, tanto da AMCP como do ANSYS em relação à solução analítica. O calculador modal obteve um desempenho melhor, mas, em virtude da ordem dos resultados obtidos, não é possível traçar categoricamente nenhuma conclusão sobre uma possível vantagem do Calculador Modal sobre o ANSYS. Ademais, a ordem dos erros indica que as três abordagens são adequadas.

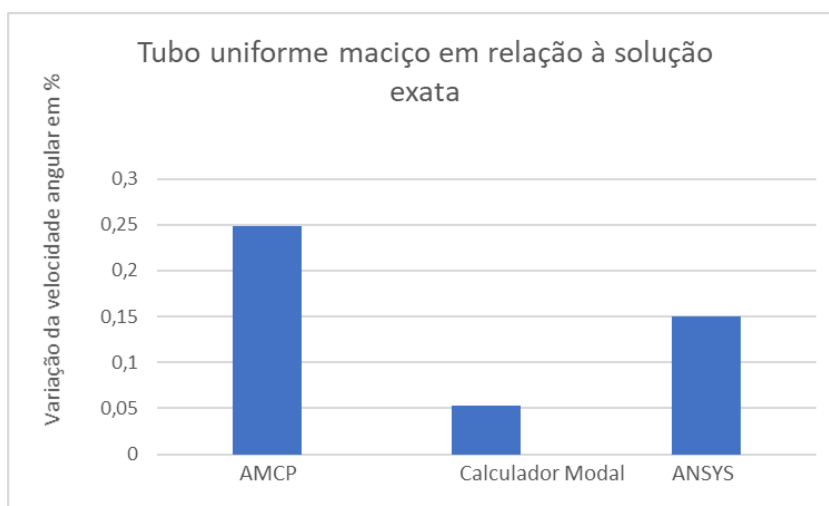


Figura 4.4 Desvios da velocidade angular do tubo maciço nos três métodos em relação ao método analítico

A Figura 4.5 mostra que as linhas elásticas da solução analítica e o ANSYS são muito semelhantes, enquanto o Calculador Modal apresenta um desvio no resultado.

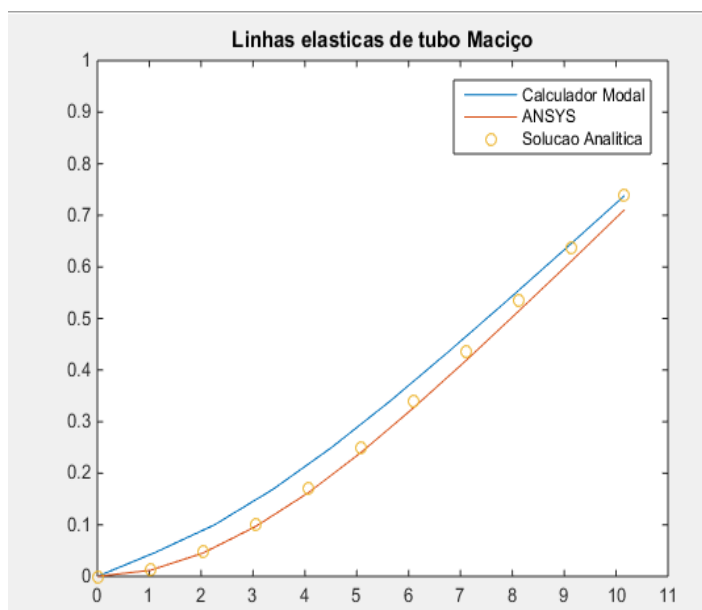


Figura 4.5 Linhas elásticas de tubo maciço

A Figura 4.6 indica melhor a diferença entre as linhas elásticas citadas anteriormente, denotando que o ANSYS representa muito bem a solução analítica.

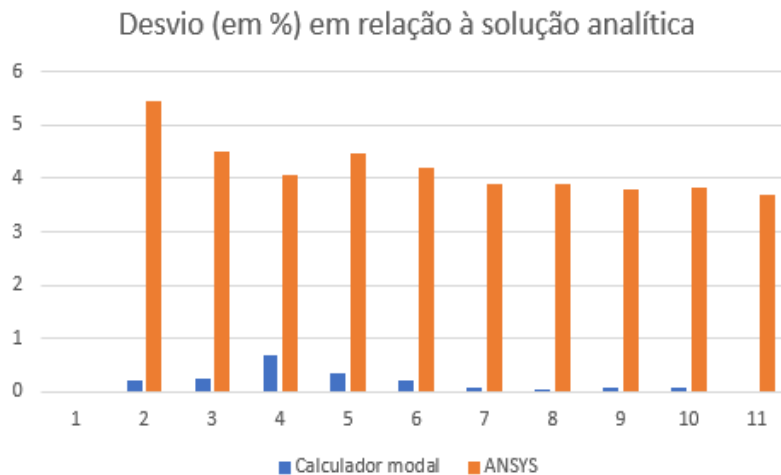


Figura 4.6 Diferença entre as linhas elásticas obtidas pelo ANSYS e Calculador Modal em relação à solução exata

4.5 Tubo uniforme oco

Uma vez sendo demonstrado que o programa usado nesse trabalho apresenta dados muito próximos aos da AMCP, o próximo passo é verificar como a presença de um calibre, vazando o tubo, influencia na frequência natural do tubo. A AMCP considera que a presença de um calibre é desprezível e, assim, considerou o tubo como um sólido maciço. Assim neste tópico procura-se averiguar se de fato a presença de um calibre não influencia de maneira efetiva a obtenção das frequências naturais.

Como a AMCP não utiliza calibre em seu exemplo, neste trabalho foi adotado um tubo com dimensões que fossem mais aproximadas de um armamento real, uma vez que a AMCP não faz referência a que tubo de armamento foi utilizado. Neste caso, foi medido de maneira inicialmente superficial as dimensões médias de um tubo da metralhadora .50 e que será refinado em fase posterior deste trabalho. A escolha deste material decorre do fato de se ser possível a obtenção dos dados referentes ao mesmo através de fontes de consulta em diferentes organizações militares, o que torna o trabalho mais realista.

Dessa forma, supondo um diâmetro externo constante igual a 1.4 polegadas, comprimento de 40 polegadas e calibre 0.5 polegadas, obtêm-se os seguintes resultados:

$$\omega = 151,86 \frac{rad}{s} \quad \text{EQ 4.9}$$

Utilizando os mesmos dados empregados acima no APDL do ANSYS, obtém-se a seguinte velocidade angular:

$$\omega = 161,95 \text{ rad/s} \quad \text{EQ 4.10}$$

Utilizando o Calculador Modal, para esse caso, tem-se a seguinte velocidade angular:

$$\omega = 162,16 \text{ rad/s} \quad \text{EQ 4.11}$$

Analisando-se, agora, a solução analítica, utilizando os mesmos dados, obtém-se para a solução exata o valor de $\omega = 162,24 \text{ rad/s}$, o que é bem próximo ao valor obtido pelo ANSYS. A Figura 4.7 representa tais resultados em relação à solução exata.

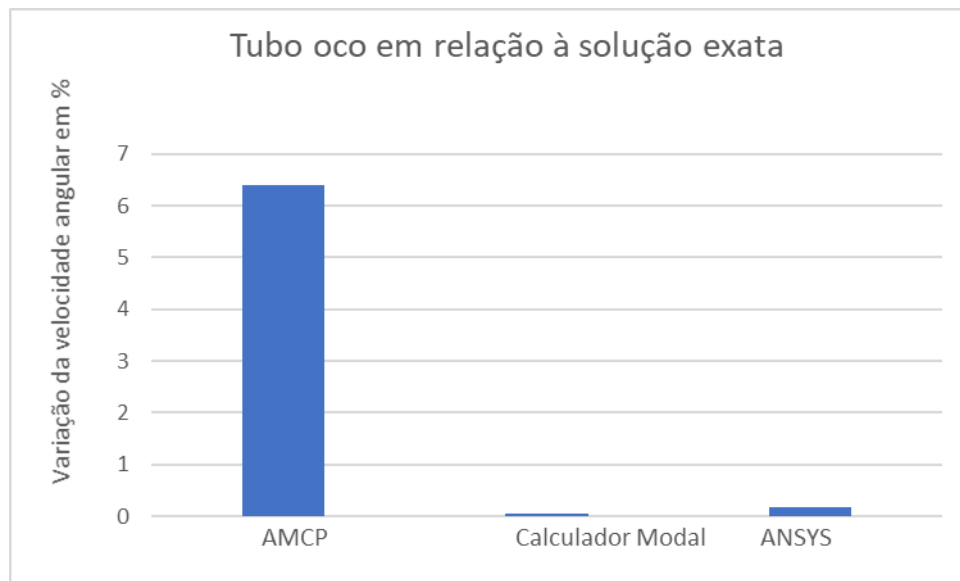


Figura 4.7 Desvios da velocidade angular do tubo oco dos três métodos em relação ao método analítico

4.6 Tubo cônico

Embora o resultado anterior tenha se mostrado preciso, é necessário testar o programa para uma situação mais realista, pois a geometria do tubo pode ter um diâmetro continuamente variável em alguns casos e descontínuo em outros. Além disso, o momento de área dos gráficos deve ser calculado pela distância ao centroide de cada área. Para esse caso, considera-se o comprimento e a massa específica e os diâmetros iniciais e finais idênticos ao anterior, com a diferença de que o diâmetro varia, agora, continuamente, de 2 polegadas na base a 1.5 polegadas na extremidade, conforme a abaixo

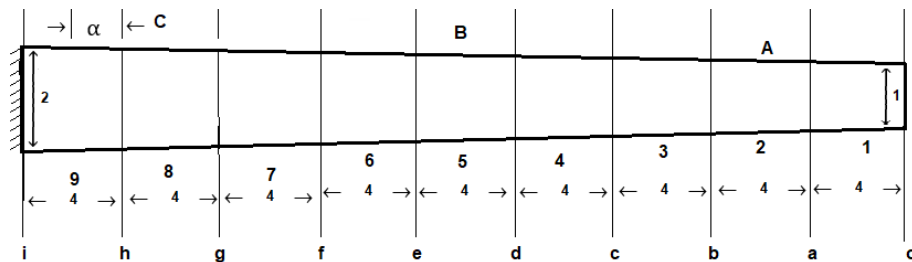


Figura 4.8 Tubo cônico

Dessa forma, vê-se que o diagrama de momento reduzido decresce continuamente, sendo mais simples obter o momento de área nesse tipo de perfil do que em perfis descontínuos. Tal decrescimento contínuo facilita a aplicação da metodologia da AMCP.

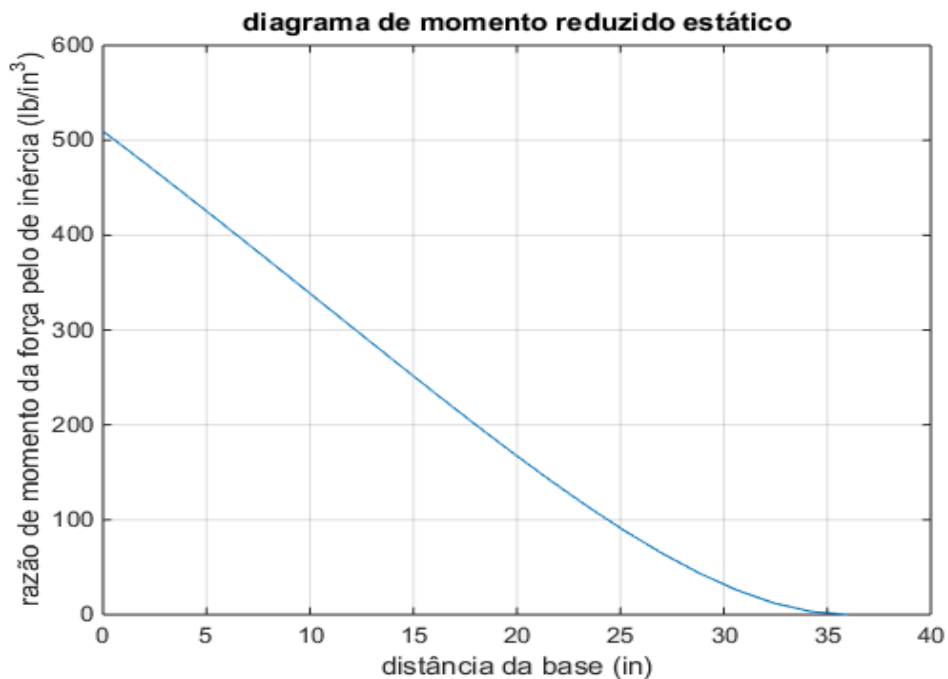


Figura 4.9 Diagrama de momento para tubo cônico

Além disso, os seguintes resultados são obtidos:

$$\omega = 301,66 \frac{rad}{s} \quad \text{EQ 4.12}$$

Utilizando os mesmos dados no APDL do ANSYS, e utilizando a opção *Taped Section*, para seções variáveis de elementos, obtém-se a seguinte velocidade angular:

$$\omega = 302,21 \text{ rad/s} \quad \text{EQ 4.13}$$

Utilizando-se do programa Calculador Modal, a velocidade angular encontrada foi de:

$$\omega = 303,51 \frac{rad}{s} \quad \text{EQ 4.14}$$

A Figura 4.10 indica que o Calculador Modal mostrou-se menos preciso que a metodologia da AMCP em relação ao ANSYS para tubos cônicos, embora o desvio não seja significativo.

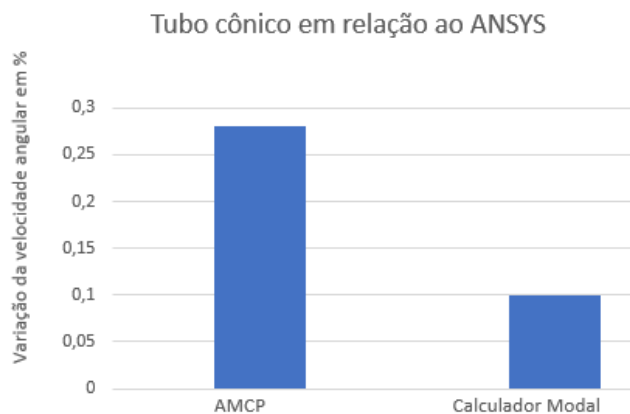


Figura 4.10 Desvios da velocidade angular do tubo cônico em relação ao método do ANSYS

A Figura 4.11 indica a proximidade das linhas elásticas entre o Calculador Modal e o ANSYS, indicando que, embora haja um desvio maior no valor da frequência angular, a linha elástica se comporta de uma maneira semelhante nas duas metodologias. Cabe ressaltar que nesse gráfico as linhas elásticas se cruzam num ponto intermediário. Além disso, como a linha elástica da solução obtida pelo ANSYS ficou mais parecida com a solução analítica anteriormente obtida, infere-se que dessas duas curvas abaixo, muito provavelmente o

resultado mais confiável é o do ANSYS, devendo este ser usado no projeto da arma e dos esforços e de deformações relacionadas.

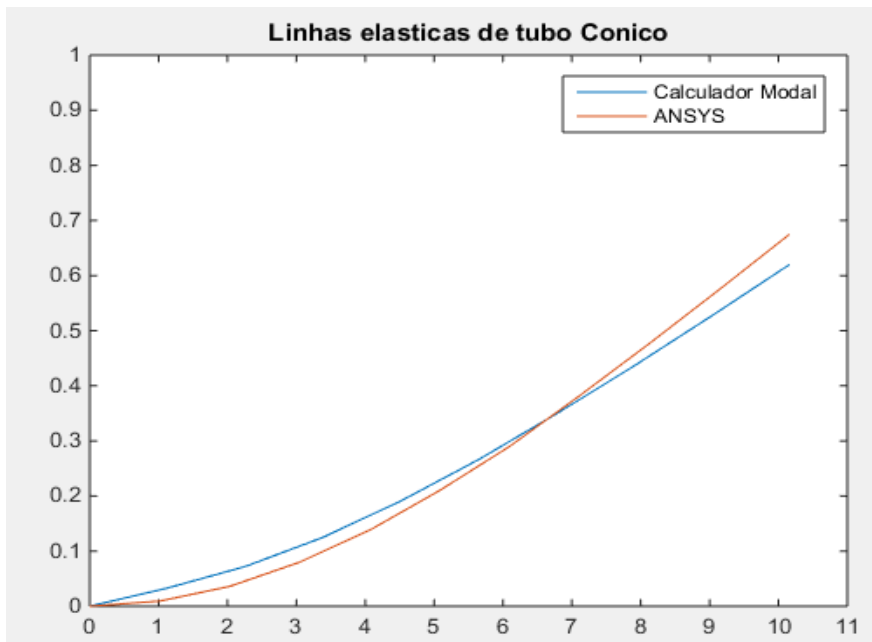


Figura 4.11 Linhas elásticas para tubo cônico

4.7 Tubo .50

Após o emprego das três metodologias em diversos perfis, é necessário que se aplique a metodologia em um tubo real. O tubo escolhido foi o da metralhadora Browning .50, cujas dimensões foram levantadas no Laboratório de Armamento do Instituto Militar de Engenharia, com o auxílio de um paquímetro. Para as dimensões internas, foram utilizados os dados de projeto da metralhadora. De posse dessas dimensões, foram obtidos os resultados de velocidade angular pelo ANSYS e pelo Calculadora Modal. Não há solução exata para este caso.

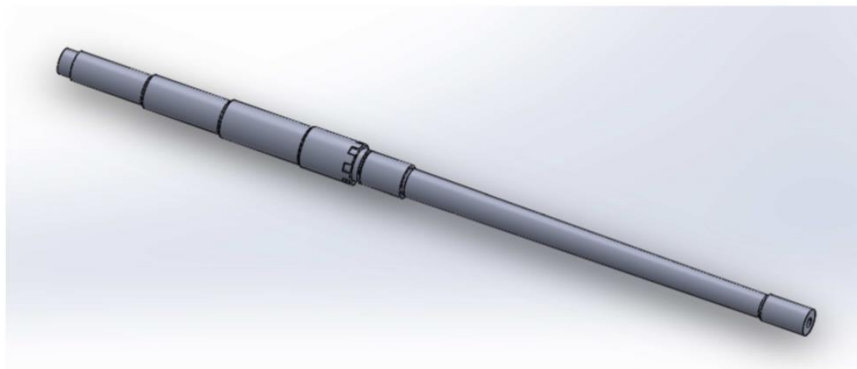


Figura 4.12 Tubo modelado em SolidWorks a partir das dimensões obtidas no Laboratório de Armamento

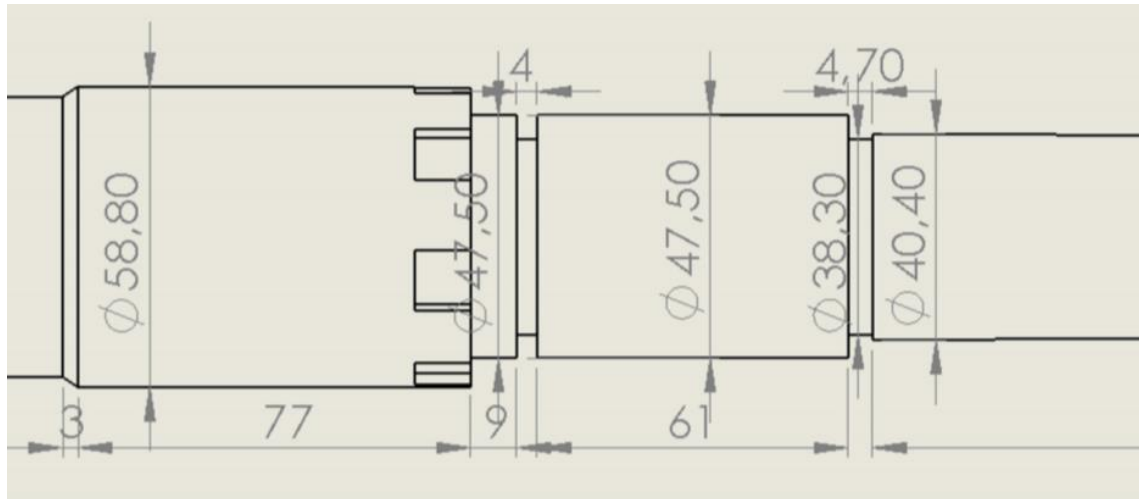


Figura 4.14 Detalhe da região central do tubo com suas dimensões

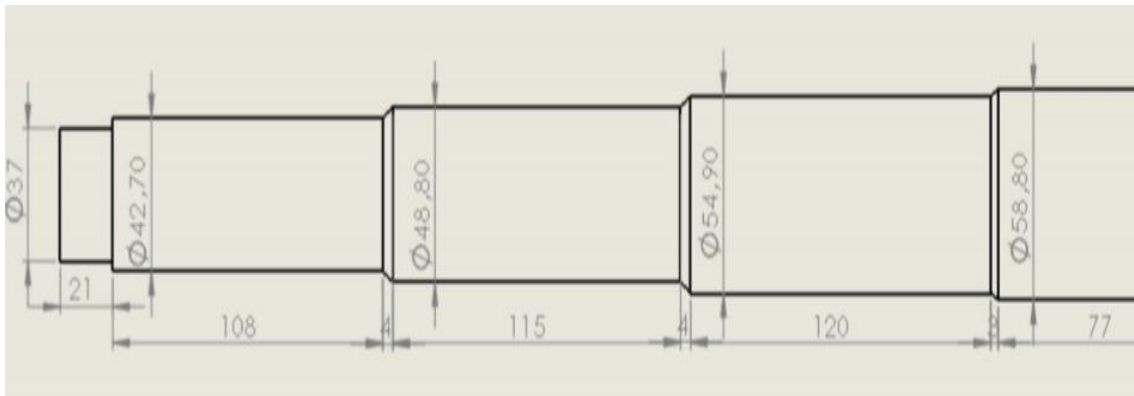


Figura 4.13 Detalhe do desenho contendo as dimensões posteriores do tubo

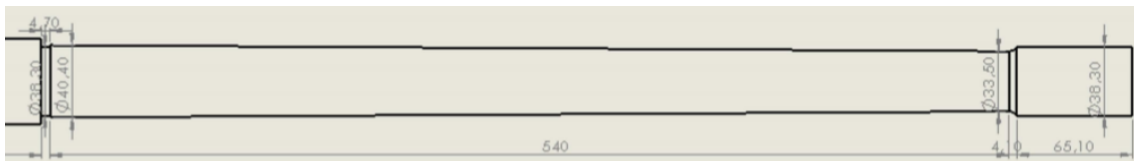


Figura 4.15 Região frontal do tubo

A frequência angular obtida pelo ANSYS foi de 33,52 Hz.

Já no Programa Calculador Modal, a frequência angular foi de 32,10 Hz.

As linhas elásticas das duas metodologias podem ser observadas na Figura 4.16 abaixo, na qual se observa a similaridade de comportamento entre as duas linhas.

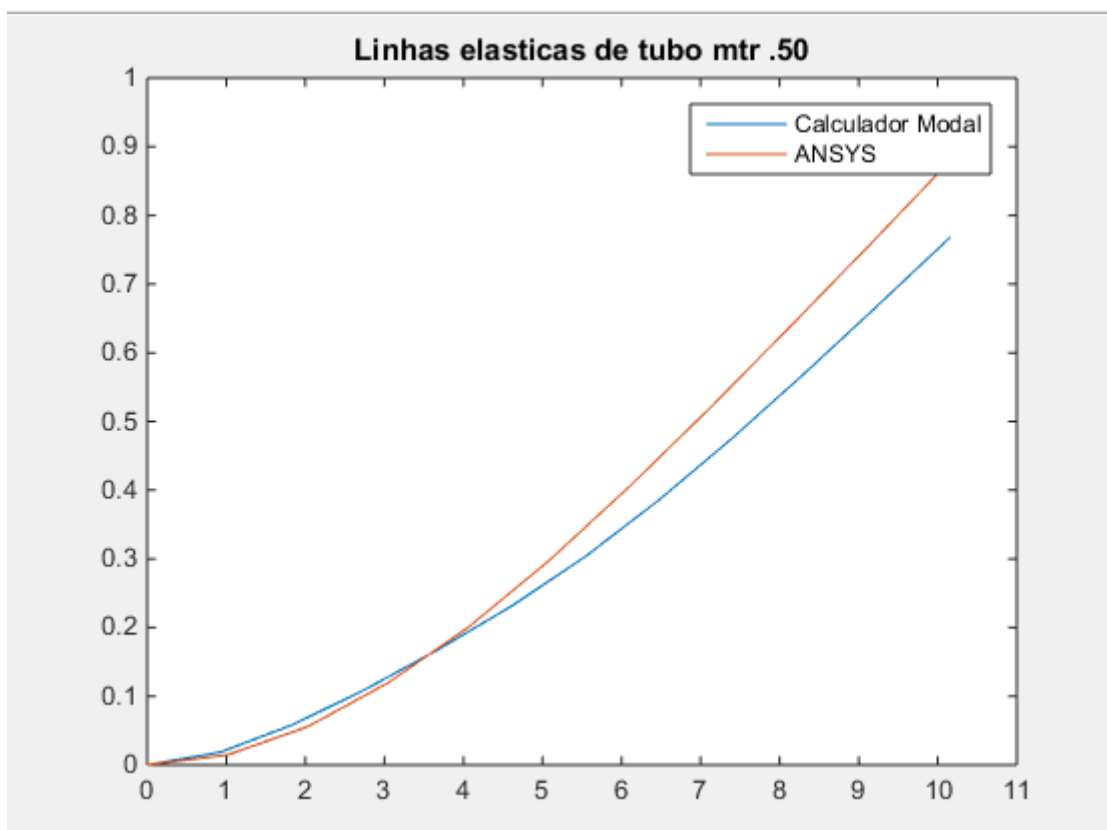


Figura 4.16 Linhas elásticas do Calculador Modal e ANSYS

4.8 Sumário de resultados

A tabela abaixo resume todos os testes que foram realizados nos tópicos anteriores. Na primeira coluna encontram-se registrados os diferentes perfis de tubo analisados e na primeira linha estão discriminadas as diferentes abordagens de obtenção de frequências naturais: o método de diagramas fletores reduzidos da AMCP, os métodos baseados na teoria de Elementos Finitos (Calculador Modal e ANSYS) e as soluções exatas do método analítico, nos casos em que era possível a obtenção de tal solução. As células marcadas com seus respectivos valores de frequência natural representam os testes realizados, enquanto células em branco indicam que o teste não foi realizado.

Tabela 8 Velocidades angulares em Hz

	Diagrama de Momentos (AMCP)	Calculador modal	ANSYS	Analítico
Exemplo da AMCP	50.47 (51.43)	51.97	51.85	
Tubo uniforme maciço	24.39	24.31	24.29	24.32
Tubo uniforme oco	24.18	25.82	25.78	25.83
Tubo cônico	47.92	48.08	48.24	
Tubo .50		32.10	33.51	

Além da obtenção da frequência angular e da velocidade angular, um dado muito importante a ser obtido é o modo vibração, que pode ser observado a partir da linha elástica do tubo nos diferentes testes realizados.

4.9 Discussões

A partir dos resultados apresentados nos itens anteriores, conclui-se que a abordagem desenvolvida por este trabalho, através do programa Calculador Modal, apresentou resultados semelhantes aos resultados obtidos no programa ANSYS, como se observa na figura 4.2, enquanto o método do Diagrama de Momentos Reduzidos obteve dados menos precisos, para o tubo. A figura 4.2 indica que para tubos maciços, o Calculador Modal obteve um resultado muito próximo à solução exata, em relação ao resultado do ANSYS e do Método do Diagrama de Momentos Reduzidos.

No entanto, é necessário ter cuidado antes de se concluir que o Calculador Modal foi mais preciso que o ANSYS em relação à solução exata, visto que as condições de execução do ANSYS são mais detalhadas, considerando parâmetros como o coeficiente de Poisson, embora outros parâmetros cruciais foram mantidos semelhantes dentro do possível, em particular a massa específica, o número de nós, as dimensões e o módulo de elasticidade. Justamente pelos diversos parâmetros que o ANSYS possui a mais, que houve alguma diferença em relação à solução exata.

A figura 4.6 apresenta os resultados quando há a presença de um calibre no tubo, ou seja, o tubo agora é oco. Essa consideração é fruto de uma hipótese adotada por (USAMC, 1964), na qual afirma-se que o calibre não influencia de

maneira significativa no resultado da frequência natural. De fato, ocorrem alterações na frequência pela presença de um calibre, mas, pelo nível de precisão da AMCP, tais alterações não são significativas.

Embora até aqui o Calculador Modal tenha obtido resultados mais precisos que o método dos Diagramas Reduzidos, há uma situação na qual o segundo método se mostra mais preciso que o primeiro, tendo como referência o ANSYS, que é no tubo cônico, como se observa pela figura 4.9. A diferença é da ordem de 0.5%, o que não permite se inferir se há um desvio significativo nos resultados. No entanto, pode-se conjecturar que tal desvio decorre do método de interpolação empregado em cada caso. O método de interpolação do Calculador Modal é por *spline*, enquanto o método de interpolação do método do Diagrama de Momento é linear, através da função *linspace* do seu código em Matlab. Nesse caso específico, um perfil cônico é melhor representado pela interpolação linear, já que o cone é uma figura com geratriz reta. Mas a explicação apresentada aqui carece de mais testes para a confirmação.

Assim, embora sirva de ferramenta para a obtenção das frequências naturais, o programa Calculador Modal apresenta um ponto negativo em relação ao perfil da linha elástica obtida, pois o modo de extração empregado para obtenção dos autovalores e autovetores apresenta particularidades, com algumas diferenças em relação à linha elástica do ANSYS e da solução exata. De fato, ao observar a figura 4.4, percebe-se que a diferença entre a linha elástica do ANSYS e a linha elástica exata apresenta um comportamento distinto em termos qualitativos da diferença entre a linha elástica do Calculador Modal e a linha elástica exata.

Para um tubo cônico, como se observa na figura 4.10, embora não haja linha elástica exata que sirva de comparação, dado o retrospecto do ANSYS como *software* de alta precisão, observando as linhas elásticas do Calculador Modal e do ANSYS e a diferença entre elas, percebe-se um comportamento mais suave da linha do Calculador Modal.

Para o tubo da metralhadora Browning .50, as linhas elásticas do Calculador Modal e do ANSYS foram muito próximas, como se observa na figura 4.15. Tal resultado, embora positivo, deve ser avaliado com muita cautela, em comparação com os anteriores. Justamente por esse comportamento pouco previsível da linha elástica produzida pelo Calculador Modal que se deve ter menor confiabilidade nos resultados de linha elástica do Calculador Modal.

Assim, dada a menor confiabilidade dos resultados da linha elástica, todo o estudo a respeito de deslocamentos transversais de pontos do tubo, de deformação, tensão e carregamentos deve ser realizado com muita cautela quando se tem uma linha elástica obtida pelo programa Calculadora Modal, pois para esses parâmetros o desvio em relação aos resultados obtidos no ANSYS e pelas soluções analíticas disponíveis pode ser significativo. Essas diferenças tendem a diminuir se forem feitos melhoramentos no código, no tocante à extração de autovetores e num aumento do nível de detalhamento dos parâmetros utilizados.

Embora haja esses aspectos que precisam ser observados com cautela, a frequência natural apresentou em todos os casos resultados muito precisos tanto pela abordagem do calculador modal como pelo método dos diagramas momentos reduzidos, bem como pelo ANSYS, em relação às soluções analíticas disponíveis e entre si, quando as soluções exatas não estavam disponíveis. Dessa forma, pode-se dizer que há uma alta confiabilidade dos resultados do programa Calculador Modal em termos da frequência natural, o que permite algumas conclusões, a serem apresentadas no próximo item.

5 CONCLUSÃO

Dado o exposto nos itens anteriores, foi possível realizar algumas conclusões a respeito dos resultados obtidos, relativamente à viabilidade de se utilizar o programa Calculador Modal como ferramenta para a disciplina de Armamento II, a sua substituição em relação a teoria do Diagrama de Momentos Reduzidos apresentados pela AMCP e quais comparações poderiam ser feitas entre o Calculador Modal e o programa do ANSYS.

Através de uma sequência na qual se modelou os tubos dos armamentos como uma viga engastada, foi possível obter os seguintes parâmetros de interesse do projetista de uma arma: a velocidade angular, a frequência natural, os modos de vibração e o deslocamento da linha elástica.

Após a modelagem, o foi feita a implementação da metodologia da AMCP, que foi comparada ao ANSYS. Além disso os resultados da AMCP foram confrontados com soluções analíticas. Após tais verificações, concluiu-se que o método da AMCP, da forma como foi implementado nesse trabalho, apresentou uma precisão adequada para o fim a que se destina, de se analisar uma cadência de tiro viável de modo a não ocorrer o fenômeno da ressonância.

O passo seguinte foi o de se avaliar a consideração feita por (USAMC, 1964) de se desprezar o calibre no cálculo da frequência natural, onde se puderam observar erros da ordem de 5%.

Em seguida desenvolveu-se o programa Calculador Modal para que se pudesse avaliar a viabilidade da substituição do método da AMCP por um método que se utiliza mais das atuais capacidades computacionais para a realização de cálculos mais precisos. Neste ponto, diversas implementações para diversos perfis foram feitas e as comparações entre essas implementações com o ANSYS e com as soluções exatas permitiu a validação do programa como uma ferramenta de análise modal para fins de se calcular a frequência natural do tubo.

As metodologias baseadas em MEF (ANSYS e Calculador Modal) foram mais precisas que a metodologia da AMCP, além de permitir a visualização da linha elástica dos diferentes casos. No entanto, os desvios encontrados na linha elástica em relação ao ANSYS restringem o programa Calculadora Modal como ferramenta de avaliação da linha elástica. Supõe-se que isso decorreu da forma como o Matlab extrai os autovetores, mas tal fato pode ser esclarecido com uma investigação mais aprofundada dos métodos de extração de autovetores.

O cálculo das frequências naturais de tubos uniformes ou continuamente variável mostrou-se mais simples de se obter do que para os perfis descontínuos, sobretudo na obtenção do diagrama de momentos reduzidos. No entanto, a maioria dos tubos de armamentos de alta cadência de tiro possui algum tipo de descontinuidade, o que torna pouco utilizável o perfil contínuo. O método da AMCP aplicado com o diagrama de momentos reduzidos, conforme apresentado por (USAMC, 1964), apesar de ter apresentado resultados adequados possui

certos aspectos que podem ser implementados de maneira mais precisa hoje em dia, com os recursos computacionais disponíveis.

Esses aspectos se referem à obtenção do centroide dos diversos segmentos do tubo no diagrama de momentos reduzidos, que pode ter maior precisão. Além disso, é possível dividir o tubo numa quantidade muito maior de segmentos, tendo em vista que os recursos computacionais atuais o permitem.

Dessa forma a metodologia dos Diagramas de Momentos Reduzidos empregada pela AMCP pode ser considerada adequada apenas numa situação em que não haja recursos computacionais disponíveis, mas pode ser substituído tanto pelo ANSYS como pelo Calculador Modal para a análise das frequências naturais havendo disponibilidade de tais recursos.

Finalmente devido ao fato de o programa Calculador Modal também poder ser aplicado no software livre *Octave*, apresentando resultados similares aos obtidos no Matlab, conclui-se que é possível empregá-lo como uma ferramenta didática de aprendizado na disciplina de Armamento II, com a vantagem de que o usuário pode realizar quaisquer implementações no programa, ver outros aspectos como influência da pressão dos gases, uso de outros modelos de viga etc.

O programa Calculador Modal pode substituir o método apresentado na AMCP do Diagrama de Momentos Fletores Reduzidos e, especificamente para a obtenção de frequências naturais para tubos axissimétricos unidimensionais, se mostra como uma solução alternativa em relação ao ANSYS para fins didáticos.

5.1 Sugestão para Trabalhos Futuros

Como sugestão que pode ser feita para trabalhos futuros, tem-se as citadas abaixo:

- análise mais aprofundada das causas da dispersão de tiros em função da razão de frequência;
- uso de uma interface mais intuitiva para fins didáticos por parte do programa Calculador Modal;
- analisar a viabilidade de se importar arquivos de outros programas como o SolidWorks ou ANSYS para serem utilizados como dados de entrada para o programa Calculador Modal;
- a forma de obtenção dos autovetores e sua influência no perfil da linha elástica nos diferentes modos de vibração deve ser melhor estudada.

6 REFERÊNCIAS

- Bhave, S. (2010). *Mechanical Vibrations Theory and Practice*. New Dheli: Pearson.
- Figueiredo, B. F. (2014). Análise computacional dos modos e frequências naturais de vibração de uma viga engastada-livre. *Colloquium exactarum*, 114-127.
- Mukhopadhyay, M. (2000). *Vibrations, Dynamics and Structural Systems*. Kharagpur, Índia: Brookfield.
- Rao, S. S. (2014). *Mechanical Vibrations*. Upper Saddle River: Prentice Hall.
- Segerlind, L. J. (1984). *Applied Finite Element Analysis*. Michigan: John Wiley and Sons.
- Sobrinho, A. S. (2006). *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna.
- Thorby, D. (2008). *Structural Dynamics and Vibration in Practice: An Engineering Handbook*. Burlington: Elsevier.
- USAMC. (1964). *AMCP 706-252 Gun Tubes*. WASHINGTON, D.C, Estados Unidos da América: Redstone Cientific.

7 APÊNDICE 1

MODELAGEM DE UM SISTEMA MASSA-MOLA

Supondo o seguinte o modelo:

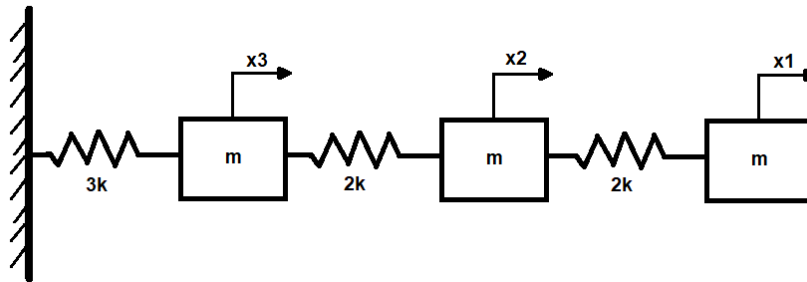
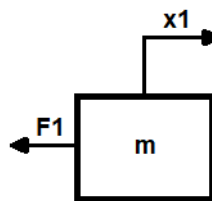


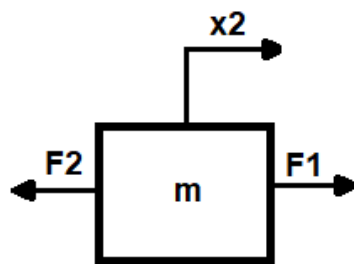
Figura 7.1 Modelo massa-mola

Decompondo as forças em cada corpo:



$$-F1 = m \cdot \ddot{x}_1$$

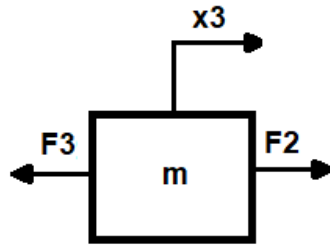
$$-2 \cdot k \cdot x1 + 2 \cdot k \cdot x2 = m \cdot \ddot{x}_1$$



$$F1 - F2 = m \cdot \ddot{x}_2$$

$$2 \cdot k \cdot (x1 - x2) - 2 \cdot k \cdot (x2 - x3) = m \cdot \ddot{x}_2$$

$$2 \cdot k \cdot x1 - 4 \cdot k \cdot x2 + 2 \cdot k \cdot x3 = m \cdot \ddot{x}_2$$



$$F2 - F3 = m \cdot \ddot{x}_3$$

$$2 \cdot k \cdot (x2 - x3) - 3 \cdot k \cdot x3 = m \cdot \ddot{x}_3$$

$$2 \cdot k \cdot x2 - 5 \cdot k \cdot x3 = m \cdot \ddot{x}_2$$

Tem-se então o seguinte sistema de equações, a partir do qual montam-se as matrizes [m] e [K]:

$$-2 \cdot k \cdot x1 + 2 \cdot k \cdot x2 = m \cdot \ddot{x}_1$$

$$2 \cdot k \cdot x1 - 4 \cdot k \cdot x2 + 2 \cdot k \cdot x3 = m \cdot \ddot{x}_2$$

$$2 \cdot k \cdot x2 - 5 \cdot k \cdot x3 = m \cdot \ddot{x}_2$$

Através das equações de Newton, a partir do sistema de equações obtido no referido apêndice, podem-se obter as matrizes de massa e rigidez desse sistema, obtendo assim:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2 \cdot k & -2 \cdot k & 0 \\ -2 \cdot k & 4 \cdot k & -2 \cdot k \\ 0 & -2 \cdot k & 5 \cdot k \end{bmatrix}$$

Onde [K] é a matriz de rigidez e [M] é a matriz de inércia.

Assim:

$$[K]^{-1} = \frac{1}{6 \cdot k} \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Onde $[K]^{-1}$ é a matriz inversa de [K]. Portanto:

$$[K]^{-1} \cdot [M] = \frac{m}{6.k} \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora já é possível realizar a primeira tentativa para o vetor $[y]^1 = [1 \ 1 \ 1]^T$

Portanto:

$$\frac{m}{6.k} \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{m}{6.k} \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{15.m}{6.k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[y]^2 = [1 \ 0,8 \ 0,4]^T$$

Refazendo o passo anterior, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{m}{6.k} \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \frac{m}{6.k} \begin{bmatrix} 12,8 \\ 9,8 \\ 4,4 \end{bmatrix} = \frac{12,8.m}{6.k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,77 \\ 0,34 \end{bmatrix}$$

Nessa equação já é possível observar que os vetores já estão se aproximando da convergência. Continuando esse processo por mais algumas iterações, obtém-se, nesse caso:

$$\frac{m}{6.k} \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0,759 \\ 0,336 \end{bmatrix} = \frac{m}{6.k} \begin{bmatrix} 12,47 \\ 9,47 \\ 4,19 \end{bmatrix} = \frac{12,47.m}{6.k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,759 \\ 0,336 \end{bmatrix}$$

Portanto, pode-se obter o autovalor através da equação:

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} = \frac{12,47.m}{6.k}$$

Rearranjando os termos da equação anterior, obtemos finalmente:

$$\omega = 0,695 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Assim, nesse exemplo são obtidos os dados que nos interessavam, o primeiro modo de vibração e a frequência angular natural.

Para obter-se a frequência natural, basta usar a seguinte equação:

$$\frac{\omega}{2.\pi} = fn$$

8 ANEXOS

8.1 Implementação do Método da AMCP (Diagrama de Momentos Reduzidos)

```
clc
clear

                                %CODIGO PARA VERIFICAR O METODO DE STODOLA
fprintf('Metodo de Stodola, sendo dado a gravidade e o aço do tubo\n')
comprimento_do_tubo=input('Digite o comprimento do tubo: ');
Diametro_maior=input('Digite o diâmetro da base do tubo: '); %diâmetros
nas extremidades do tubo em polegadas
Diametro_menor=input('Digite o diametro da boca do tubo: ');
subdivisoes_do_tubo=input('Digite a quantidade de divisoes do tubo: ');
calibre=input('Digite o calibre: ');
g=input('Digite o valor da gravidade: '); %in/sec^2
%vetor_de_diametros=linspace(D_menor,D_maior,subdivisoes);
diametros=[Diametro_menor*ones(1,3)
(Diametro_menor+Diametro_maior)*0.5*ones(1,3)
Diametro_maior*ones(1,3)];
diametro_interno=calibre*ones(1,9);

modulo_elasticidade=29*10^6; %modulo de elasticidade (lb/in^2)
comprimento_tubo=comprimento_do_tubo/subdivisoes_do_tubo;
%comprimento do segmento (in)

momento_inercia=(pi/64)*(diametros.^4-diametro_interno.^4);

peso_especifico= 0.283; %densidade do aço (lb/in^3)

pesos_dos_segmentos=peso_especifico*(pi/4)*comprimento_tubo*(diametros
.^2-diametro_interno.^2);

for j=1:subdivisoes_do_tubo

    for k=1:subdivisoes_do_tubo
        distancias_cm_momento(j,k)=(subdivisoes_do_tubo+1-j-
k)*comprimento_tubo+(comprimento_tubo/2);
        if distancias_cm_momento(j,k)<0
            distancias_cm_momento(j,k)=0;
        end
    end
end

k=1;
j=1;

momento_das_forcas=pesos_dos_segmentos*distancias_cm_momento;
```

```

momento_reduzido_forcas=momento_das_forcas./flip(momento_inercia);
MsobreI1=[momento_reduzido_forcas 0];
Ab_MsobreI1=linspace(0,comprimento_do_tubo,subdivisoes_do_tubo+1);

%resolver problema da plotagem, criando uma funcao para plotar os
graficos
%plot(Ab_MsobreI1,MsobreI1)
%title('diagrama de momento reduzido estático')
%ylabel('razão de momento da força pelo de inércia (lb/in^3)')
%xlabel('distância da base (in)')
%grid on;

Asegmento1=zeros(1,subdivisoes_do_tubo); %area de cada segmento do
grafico de momento reduzido

for i=1:subdivisoes_do_tubo
    Asegmento1(1,i)=(MsobreI1(i)+MsobreI1(i+1))*comprimento_tubo/2;

centroide(1,i)=(comprimento_tubo/3)*(2*MsobreI1(i)+MsobreI1(i+1))/(MsobreI1(i)+MsobreI1(i+1));
    MsobreImedio1(1,i)=0.5*(MsobreI1(i)+MsobreI1(i+1));
end

vetor_de_areas=zeros(1,subdivisoes_do_tubo); %criação de um vetor das
areas
distancias_cm=zeros(subdivisoes_do_tubo); %vetor das distancias dos
centróides ao eixo de referencia
for j=1:subdivisoes_do_tubo
    vetor_de_areas(1,j)=Asegmento1(1,j);

    for k=1:subdivisoes_do_tubo
        distancias_cm(j,k)=(subdivisoes_do_tubo+1-j-k)*comprimento_tubo;
        if distancias_cm(j,k)<0
            distancias_cm(j,k)=0;
        end
    end
end

momento=zeros(1,subdivisoes_do_tubo);

i=1;

somatorio_de_momentos=vetor_de_areas*distancias_cm;

for i=1:subdivisoes_do_tubo

centroidemedio(1,i)=(comprimento_tubo/6)*(2*MsobreI1(i)+MsobreImedio1(i))/(MsobreI1(i)+MsobreImedio1(i));
    momento(i)=somatorio_de_momentos(subdivisoes_do_tubo+1-i)+MsobreI1(i)+MsobreImedio1(i))*centroidemedio(1,i);
end

```

```

y1=zeros(1,subdivisoas_do_tubo); %deflexoes
for i=1:subdivisoas_do_tubo
    y1(i)=momento(subdivisoas_do_tubo+1-i)/modulo_elasticidade;

end
    y1_quadrado=y1.^2;
numerador=(g*pesos_dos_segmentos*y1');
denominador=pesos_dos_segmentos*y1_quadrado';
omegal=sqrt(numerador/denominador);
fprintf('\nO valor da velocidade angular no carregamento estatico eh:\n
%d rad/s',omegal)

%FIM DO CARREGAMENTO ESTATICO
%INICIO DO CARREGAMENTO DINAMICO

```

```

carregamento_dinamico1=(peso_especifico*(pi/4)*comprimento_tubo*diamet
ros.^2).*y1*(omegal^2/g);

```

```

momento_das_forcas2=carregamento_dinamico1*distancias_cm_momento;

```

```

momento_reduzido_forcas2=momento_das_forcas2./flip(momento_inercia);
MsobreI2=[momento_reduzido_forcas2 0];

```

```

Ab_MsobreI2=linspace(0,comprimento_do_tubo,subdivisoas_do_tubo+1);

```

```

Asegmento2=zeros(1,subdivisoas_do_tubo);

```

```

for i=1:subdivisoas_do_tubo
    Asegmento2(1,i)=(MsobreI2(i)+MsobreI2(i+1))*comprimento_tubo/2;

```

```

centroide2(1,i)=(comprimento_tubo/3)*(2*MsobreI2(i)+MsobreI2(i+1))/(Ms
obreI2(i)+MsobreI2(i+1));

```

```

    MsobreImedio2(1,i)=0.5*(MsobreI2(i)+MsobreI2(i+1));

```

```

end

```

```

vetor_de_areas2=zeros(1,subdivisoas_do_tubo);

```

```

distancias_cm=zeros(subdivisoas_do_tubo);

```

```

for j=1:subdivisoas_do_tubo
    vetor_de_areas2(1,j)=Asegmento2(1,j);

```

```

    for k=1:subdivisoas_do_tubo
        distancias_cm(j,k)=(subdivisoas_do_tubo+1-j-
k)*comprimento_tubo;

```

```

        if distancias_cm(j,k)<0
            distancias_cm(j,k)=0;

```

```

        end

```

```

    end

```

```

end

```

```

momento2=zeros(1,subdivisoas_do_tubo);

i=1;

somatorio_de_momentos2=vetor_de_areas2*distancias_cm;

for i=1:subdivisoas_do_tubo

centroidemedio2(1,i)=(comprimento_tubo/6)*(2*MsobreI2(i)+MsobreImedio2
(i))/(MsobreI2(i)+MsobreImedio2(i));
momento2(i)=somatorio_de_momentos2(subdivisoas_do_tubo+1-
i)+(MsobreI2(i)+MsobreImedio2(i))*centroidemedio2(1,i);
end

y2=zeros(1,subdivisoas_do_tubo);
for i=1:subdivisoas_do_tubo
y2(i)=momento2(subdivisoas_do_tubo+1-i)/modulo_elasticidade;

end
y2_quadrado=y2.^2;
numerador2=(g*pesos_dos_segmentos*y2');
denominador2=pesos_dos_segmentos*y2_quadrado';
omega2=sqrt(numerador2/denominador2);
fprintf('\nO valor da velocidade angular no 1º carregamento dinámico
eh:\n %d rad/s',omega2)

%PROXIMA TENTATIVA PARA VERIFICAR A CONVERGENCIA DE
OMEGA

vetor_massas3=(peso_especifico*(pi/4)*comprimento_tubo*diametros.^2).*
y1*(omega2^2/g);

momento_das_forcas3=vetor_massas3*distancias_cm_momento;

momento_reduzido_forcas3=momento_das_forcas3./flip(momento_inercia);
MsobreI3=[momento_reduzido_forcas3 0];

Ab_MsobreI3=linspace(0,comprimento_do_tubo,subdivisoas_do_tubo+1);

Asegmento3=zeros(1,subdivisoas_do_tubo);

for i=1:subdivisoas_do_tubo
Asegmento3(1,i)=(MsobreI3(i)+MsobreI3(i+1))*comprimento_tubo/2;

centroide3(1,i)=(comprimento_tubo/3)*(2*MsobreI3(i)+MsobreI3(i+1))/(Ms
obreI3(i)+MsobreI3(i+1));
MsobreImedio3(1,i)=0.5*(MsobreI3(i)+MsobreI3(i+1));
end

```

```

vetor_de_areas3=zeros(1,subdivisoess_do_tubo);
distancias_cm=zeros(subdivisoess_do_tubo);
for j=1:subdivisoess_do_tubo
    vetor_de_areas3(1,j)=Asegmento2(1,j);

    for k=1:subdivisoess_do_tubo
        distancias_cm(j,k)=(subdivisoess_do_tubo+1-j-
k)*comprimento_tubo;
        if distancias_cm(j,k)<0
            distancias_cm(j,k)=0;
        end
    end
end

end

momento3=zeros(1,subdivisoess_do_tubo);

i=1;

somatorio_de_momentos3=vetor_de_areas3*distancias_cm;

for i=1:subdivisoess_do_tubo

centroidemedio3(1,i)=(comprimento_tubo/6)*(2*M_sobre_I3(i)+M_sobre_Imedio3
(i))/(M_sobre_I3(i)+M_sobre_Imedio3(i));
    momento3(i)=somatorio_de_momentos3(subdivisoess_do_tubo+1-
i)+(M_sobre_I3(i)+M_sobre_Imedio3(i))*centroidemedio3(1,i);
end

y3=zeros(1,subdivisoess_do_tubo);
for i=1:subdivisoess_do_tubo
    y3(i)=momento3(subdivisoess_do_tubo+1-i)/modulo_elasticidade;

end
    y3_quadrado=y2.^2;
    numerador3=(g*pesos_dos_segmentos*y3');
    denominador3=pesos_dos_segmentos*y3_quadrado';
    omega3=sqrt(numerador3/denominador3);
    fprintf('\nO valor da velocidade angular no 2º carregamento dinámico
eh:\n %d rad/s\n',omega3)

```

8.2 Calculador Modal

```
%programa calculador modal calcula os modos de vibracao

%inicio da contagem de tempo de processamento
tic
%numero de elementos do vetor que contem os diametros externos
n_elementos=length(d);

%criacao de vetores de dados usados nas matrizes locais de
%ineracia e rigidez
A=zeros(1,n_elementos);
I=zeros(1,n_elementos);
L=zeros(1,n_elementos);
%vetor com variaveis comuns na matriz de ineracia
pAL=zeros(1,n_elementos);

%formacao dos vetores das variaveis de ineracia usadas em cada elemento
%discretizado do tubo
for cont=1:1:n_elementos
    %area da secao reta do elemento do tubo
    A(cont)=pi*0.25*((d(cont)*0.0254)^2-(calibre*0.0254)^2);
    %comprimento do elemento do tubo
    L(cont)=(comprimento/n_elementos)*0.0254;

    %momento de ineracia do elemento do tubo
    I(cont)=(3.1415/64)*((d(cont)*0.0254)^4-(calibre*0.0254)^4);
end

%numero de graus de liberdade
ng=4+2*(n_elementos-1);
%matriz de zeros global de ineracia
M=zeros(4+2*(n_elementos-1));

pAL(1)=p*A(1)*L(1);
M(1,1)=156*pAL(1)/420;
M(1,2)=22*pAL(1)*L(1)/420;
M(1,3)=54*pAL(1)/420;
M(1,4)=-13*pAL(1)*L(1)/420;

M(2,1)=22*pAL(1)*L(1)/420;
M(2,2)=4*p*A(1)*(L(1)^3)/420;
M(2,3)=13*p*A(1)*(L(1)^2)/420;
M(2,4)=-3*p*A(1)*(L(1)^3)/420;

M(3,1)=M(1,3);
M(3,2)=M(2,3);
M(3,3)=156*pAL(1)/420+156*p*A(1+1)*L(1)/420;
M(3,4)=-22*p*A(1)*(L(1)^2)/420+22*p*A(1+1)*L(1)*L(1)/420;

M(4,1)=M(1,4);
M(4,2)=-M(2,4);
M(4,3)=M(3,4);
M(4,4)=4*p*A(1)*(L(1)^3)/420+4*p*A(1+1)*(L(1)^3)/420;
```

```

%laco de cosntrucao dos elementos intermediarios da matriz de inercia
global
for cont=2:1:n_elementos-1

```

```

    M(3+2*(cont-1),1+2*(cont-1))=54*p*A(cont)*(L(cont)^1)/420;
    M(3+2*(cont-1),2+2*(cont-1))=13*p*A(cont)*(L(cont)^2)/420;
    M(4+2*(cont-1),1+2*(cont-1))=-13*p*A(cont)*(L(cont)^2)/420;
    M(4+2*(cont-1),2+2*(cont-1))=-3*p*A(cont)*(L(cont)^3)/420;

```

```

    M(1+2*(cont-1),3+2*(cont-1))=M(3+2*(cont-1),1+2*(cont-1));
    M(2+2*(cont-1),3+2*(cont-1))=M(3+2*(cont-1),2+2*(cont-1));
    M(1+2*(cont-1),4+2*(cont-1))=M(4+2*(cont-1),1+2*(cont-1));
    M(4+2*(cont-1),2+2*(cont-1))=M(4+2*(cont-1),2+2*(cont-1));

```

```

    M(1+2*(cont-1),1+2*(cont-1))=156*p*A(cont-
1)*L(cont)/420+156*p*A(cont)*L(cont)/420;
    M(1+2*(cont-1),2+2*(cont-1))=-22*p*A(cont-
1)*(L(cont)^2)/420+22*p*A(cont)*L(cont)*L(cont)/420;
    M(2+2*(cont-1),1+2*(cont-1))=-22*p*A(cont-
1)*(L(cont)^2)/420+22*p*A(cont)*L(cont)*L(cont)/420;
    M(2+2*(cont-1),2+2*(cont-1))=4*p*A(cont-
1)*(L(cont)^3)/420+4*p*A(cont)*(L(cont)^3)/420;

```

```

end

```

```

%construcao dos elementos finais

```

```

    M(3+2*(n_elementos-1),1+2*(n_elementos-
1))=54*p*A(n_elementos)*(L(n_elementos)^1)/420;
    M(3+2*(n_elementos-1),2+2*(n_elementos-
1))=13*p*A(n_elementos)*(L(n_elementos)^2)/420;
    M(4+2*(n_elementos-1),1+2*(n_elementos-1))=-
13*p*A(n_elementos)*(L(n_elementos)^2)/420;
    M(4+2*(n_elementos-1),2+2*(n_elementos-1))=-
3*p*A(n_elementos)*(L(n_elementos)^3)/420;

```

```

    M(1+2*(n_elementos-1),3+2*(n_elementos-1))=M(3+2*(n_elementos-
1),1+2*(n_elementos-1));
    M(2+2*(n_elementos-1),3+2*(n_elementos-1))=M(3+2*(n_elementos-
1),2+2*(n_elementos-1));
    M(1+2*(n_elementos-1),4+2*(n_elementos-1))=M(4+2*(n_elementos-
1),1+2*(n_elementos-1));
    M(4+2*(n_elementos-1),2+2*(n_elementos-1))=M(4+2*(n_elementos-
1),2+2*(n_elementos-1));

```

```

    M(1+2*(n_elementos-1),1+2*(n_elementos-
1))=156*p*A(n_elementos-
1)*L(n_elementos)/420+156*p*A(n_elementos)*L(n_elementos)/420;
    M(1+2*(n_elementos-1),2+2*(n_elementos-1))=-
22*p*A(n_elementos-
1)*(L(n_elementos)^2)/420+22*p*A(n_elementos)*L(n_elementos)*L(n_eleme
ntos)/420;
    M(2+2*(n_elementos-1),1+2*(n_elementos-1))=-
22*p*A(n_elementos-
1)*(L(n_elementos)^2)/420+22*p*A(n_elementos)*L(n_elementos)*L(n_eleme
ntos)/420;

```

```
M(2+2*(n_elementos-1),2+2*(n_elementos-1))=4*p*A(n_elementos-1)*(L(n_elementos)^3)/420+4*p*A(n_elementos)*(L(n_elementos)^3)/420;
```

```
M(ng-1,ng-1)=156*p*A(n_elementos)*(L(n_elementos)^1)/420;
M(ng-1,ng)=-22*p*A(n_elementos)*(L(n_elementos)^2)/420;
```

```
M(ng,ng-1)=-22*p*A(n_elementos)*(L(n_elementos)^2)/420;
M(ng,ng)=4*p*A(n_elementos)*(L(n_elementos)^3)/420;
```

```
%matriz de zeros global de rigidez
```

```
K=zeros(4+2*(n_elementos-1));
```

```
%elementos iniciais de rigidez
```

```
K(1,1)=12*E*I(1)/(L(1)^3);
```

```
K(1,2)=6*E*I(1)/(L(1)^2);
```

```
K(1,3)=-12*E*I(1)/(L(1)^3);
```

```
K(1,4)=6*E*I(1)/(L(1)^2);
```

```
K(2,1)=K(1,2);
```

```
k(2,2)=4*E*I(1)/(L(1)^1);
```

```
K(2,3)=-6*E*I(1)/(L(1)^2);
```

```
K(2,4)=2*E*I(1)/(L(1)^1);
```

```
K(3,1)=K(1,3);
```

```
K(3,2)=K(2,3);
```

```
K(3,3)=12*E*I(1)/(L(1)^3);
```

```
K(3,4)=-6*E*I(1)/(L(1)^2);
```

```
K(4,1)=K(1,4);
```

```
K(4,2)=K(2,4);
```

```
K(4,3)=K(3,4);
```

```
K(4,4)=4*E*I(1)/(L(1)^1);
```

```
%laco de cosntrucao dos elementos intermediarios da matriz de rigidez global
```

```
for cont=2:1:n_elementos-1
```

```
    %consturcao dos elementos intermediarios da matriz de rigidez
```

```
global
```

```
    K(3+2*(cont-1),1+2*(cont-1))=-12*E*I(cont)/(L(cont)^3);
```

```
    K(3+2*(cont-1),2+2*(cont-1))=-6*E*I(cont)/(L(cont)^2);
```

```
    K(4+2*(cont-1),1+2*(cont-1))=6*E*I(cont)/(L(cont)^2);
```

```
    K(4+2*(cont-1),2+2*(cont-1))=2*E*I(cont)/(L(cont)^1);
```

```
    K(1+2*(cont-1),3+2*(cont-1))=K(3+2*(cont-1),1+2*(cont-1));
```

```
    K(2+2*(cont-1),3+2*(cont-1))=K(3+2*(cont-1),2+2*(cont-1));
```

```
    K(1+2*(cont-1),4+2*(cont-1))=K(4+2*(cont-1),1+2*(cont-1));
```

```
    K(2+2*(cont-1),4+2*(cont-1))=K(4+2*(cont-1),2+2*(cont-1));
```

```
    K(1+2*(cont-1),1+2*(cont-1))=12*E*I(cont)/(L(cont)^3)+12*E*I(cont-1)/(L(cont)^3);
```

```
    K(1+2*(cont-1),2+2*(cont-1))=6*E*I(cont)/(L(cont)^2)-6*E*I(cont-1)/(L(cont)^2);
```



```

        K(2+2*(cont-1),1+2*(cont-1))=-6*E*I(cont-
1)/(L(cont)^2)+6*E*I(cont)/(L(cont)^2);
        K(2+2*(cont-1),2+2*(cont-1))=4*E*I(cont-
1)/(L(cont)^1)+4*E*I(cont)/(L(cont)^1);

end

%elementos finais da matriz de rigidez
        K(3+2*(n_elementos-1),1+2*(n_elementos-1))=-
12*E*I(n_elementos)/(L(n_elementos)^3);
        K(3+2*(n_elementos-1),2+2*(n_elementos-1))=-
6*E*I(n_elementos)/(L(n_elementos)^2);
        K(4+2*(n_elementos-1),1+2*(n_elementos-
1))=6*E*I(n_elementos)/(L(n_elementos)^2);
        K(4+2*(n_elementos-1),2+2*(n_elementos-
1))=2*E*I(n_elementos)/(L(n_elementos)^1);

        K(1+2*(n_elementos-1),3+2*(n_elementos-
1))=K(3+2*(n_elementos-1),1+2*(n_elementos-1));
        K(2+2*(n_elementos-1),3+2*(n_elementos-
1))=K(3+2*(n_elementos-1),2+2*(n_elementos-1));
        K(1+2*(n_elementos-1),4+2*(n_elementos-
1))=K(4+2*(n_elementos-1),1+2*(n_elementos-1));
        K(2+2*(n_elementos-1),4+2*(n_elementos-
1))=K(4+2*(n_elementos-1),2+2*(n_elementos-1));

        K(1+2*(n_elementos-1),1+2*(n_elementos-
1))=12*E*I(n_elementos)/(L(n_elementos)^3)+12*E*I(n_elementos-
1)/(L(n_elementos)^3);
        K(1+2*(n_elementos-1),2+2*(n_elementos-
1))=6*E*I(n_elementos)/(L(n_elementos)^2)-6*E*I(n_elementos-
1)/(L(n_elementos)^2);
        K(2+2*(n_elementos-1),1+2*(n_elementos-1))=-
6*E*I(n_elementos-
1)/(L(n_elementos)^2)+6*E*I(n_elementos)/(L(n_elementos)^2);
        K(2+2*(n_elementos-1),2+2*(n_elementos-
1))=4*E*I(n_elementos-
1)/(L(n_elementos)^1)+4*E*I(n_elementos)/(L(n_elementos)^1);

        K(ng-1,ng-1)=12*E*I(n_elementos)/(L(n_elementos)^3);
        K(ng-1,ng)=-6*E*I(n_elementos)/(L(n_elementos)^2);

        K(ng,ng-1)=-6*E*I(n_elementos)/(L(n_elementos)^2);
        K(ng,ng)=4*E*I(n_elementos)/(L(n_elementos)^1);

%imposicao das condicoes de contorno do tubo
%condicao de tubo engastado
M(:, [1 2])=[];
M([1 2], :)=[];
K(:, [1 2])=[];
K([1 2], :)=[];

%extracao do autovalor das matrizes globais M e K
lambda=eig(M,K);
%calcula da frequencia angular

```

```

freq=sqrt(1/lambda(1));
toc
[V,D]=eig(M,K);
%resultados de frecuencia em rad/s e Hertz
fprintf(' %d rad/s \n',freq);
fprintf(' %d Hz \n',freq/6.28);
%calculo do modo de vibracao
autovetor=V(:,1);
tam_vetor=length(V);
tam_vetor=floor(tam_vetor/2);
%vetor do modo de vibracao
vetor_desloc=zeros(1,tam_vetor);
%construcao do primeiro modo de vibracao em escala
for cont=1:1:tam_vetor
    vetor_desloc(cont)=autovetor(2*cont-1);
end

vetor_desloc_x=linspace(0,comprimento*0.0254,tam_vetor);
%plotagem do primeiro modo de vibracao
plot(vetor_desloc_x,vetor_desloc);
xlabel('distancia horizontal');
ylabel('deslocamento da linha elastica em escala')
grid on;
%dados de saida do programa
fid1=fopen('saida_calc_modal_1109.txt','a');
fprintf(fid1,'\t\t\tDADOS DE SAIDA\n');
fprintf(fid1,'Frequencia = %d Hz \n',freq);
fclose(fid1);

```

8.3 Input Data

```

%dados de entrada do programa calculador_modal
comp_total=input('digite o comprimento total em polegadas: ');
calibre=0.5;
%numero de secoes distintas do tubo
num_secoes=11;
%numero de divisoes em cada secao distinta do tubo
num_nos=10;
%numero de nos total
num_nos_total=10;
%vetor de zeros dos diametros externos
%d=zeros(1,num_nos*num_secoes);
d=[];
%comprimento de cada secao distinta
comp_secao=zeros(1,num_secoes);
%massa especifica
p=7850;
%modulo de elasticidade
E=200e9;
%abertura do arquivo de saida
fid1=fopen('saida_calc_modal_1109.txt','w');
fprintf(fid1,'\t\t\tDADOS DE ENTRADA\n');
fprintf(fid1,'E = %d GPa \n',E);
fprintf(fid1,'massa especifica = %d Kg/m³ \n',p);
fprintf(fid1,'Calibre= %d Pol \n',calibre);

```

```

%laco for serve para a formacao do vetor de diametros externos do cano
...
%esse vetor eh usado nos calculos das propriedades dos elementos

for cont=1:1:num_secoes
    fprintf('digite o 1 diametro externo da secao %d em pol ',cont);
    %diametro externo do elemento mais proximo a base do tubo
    dext=input('\n');
    %diametro externo do elemento mais distante da base do tubo
    fprintf('digite o 2 diametro externo da secao %d em pol',cont);
    dext2=input('\n');
    %comprimento da base
    fprintf('digite o comprimento da secao %d em pol ',cont);
    comp_secao(cont)=input('\n');
    x_interp=[0 comp_secao(cont)];
    y_interp=[dext dext2];
    xq_interp=[0:1/num_nos_total:comp_secao(cont)];
    %xq_interp=linspace(0,comp_secao(cont),num_nos);
    dq=interp1(x_interp,y_interp,xq_interp,'spline');

    d=[d dq];
    %d(num_nos*(cont-
1)+1:(num_nos*cont))=interp1(x_interp,y_interp,xq_interp,'spline');

fprintf(fid1,'diametro esquerdo da secao %d: %f \n',cont,dext);
fprintf(fid1,'diametro direito da secao %d: %f \n',cont,dext2);
fprintf(fid1,'comprimento da secao %d: %f \n',cont,comp_secao(cont));

end
%comprimento total do tubo
comprimento=sum(comp_secao);
fclose(fid1);

```

8.4 APDL

```

!*
!*
/DIST,1,1.082226,1
/REP,FAST
/DIST,1,1.082226,1
/REP,FAST
/DIST,1,1.082226,1
/REP,FAST
/DIST,1,1.082226,1
/REP,FAST
/DIST,1,0.924021,1
/REP,FAST
/DIST,1,0.924021,1
/REP,FAST
/DIST,1,0.924021,1
/REP,FAST
/DIST,1,0.924021,1
/REP,FAST

```

```
! LGWRITE,'tubofinallog','lgw','C:\Users\Gabriel\',COMMENT
/DIST, 1 ,1.082226,1
/REP,FAST
/DIST, 1 ,1.082226,1
/REP,FAST
/DIST, 1 ,1.082226,1
/REP,FAST
/DIST, 1 ,1.082226,1
/REP,FAST
/DIST, 1 ,0.924021,1
/REP,FAST
/DIST, 1 ,0.924021,1
/REP,FAST
!*
!*
!*
!*
/DIST, 1 ,1.082226,1
/REP,FAST
/DIST, 1 ,1.082226,1
/REP,FAST
/DIST, 1 ,1.082226,1
/REP,FAST
/DIST, 1 ,0.924021,1
/REP,FAST
/DIST, 1 ,0.924021,1
/REP,FAST
/DIST, 1 ,0.924021,1
/REP,FAST
/DIST, 1 ,0.924021,1
/REP,FAST
```