

MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANDRÉ DA SILVA MORAES

**OTIMIZAÇÃO DE SISTEMA DINÂMICO PELO MÉTODO DE
PONTOS INTERIORES FDIPA**

RIO DE JANEIRO

2019

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

ANDRÉ DA SILVA MORAES

**OTIMIZAÇÃO DE SISTEMA DINÂMICO PELO MÉTODO DE PONTOS
INTERIORES FDIPA**

Dissertação de Mestrado apresentado ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. José Herskovitz Norman, Dr. Ing.

Co-orientador: Prof. Ricardo Teixeira da Costa Neto,
D. Sc.

Rio de Janeiro

2019

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

ANDRÉ DA SILVA MORAES

**OTIMIZAÇÃO DE SISTEMA DINÂMICO PELO MÉTODO DE PONTOS
INTERIORES FDIPA**

Dissertação de Mestrado apresentado ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. José Herskovitz Norman, Dr. Ing.

Co-orientador: Prof. Ricardo Teixeira da Costa Neto, D. Sc.

Aprovada em 22 de março de 2019 pela seguinte banca examinadora:

Prof. José Herskovits Norman, Dr. Ing. do IME

Prof. Ricardo Teixeira da Costa Neto, D. Sc. do IME

Prof. Anatoli Leontiev, D. Sc. da UFRJ

Prof. Achille Arantes Bassi, D. Sc. do IME

Rio de Janeiro

2019

Ao Instituto Militar de Engenharia, alicerce da
minha formação e aperfeiçoamento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que me incentivaram, apoiaram e possibilitaram esta oportunidade de ampliar meus horizontes.

Meus familiares, namorada e mestres.

Em especial aos professores José Herskovits Norman e Ricardo Teixeira da Costa Neto, por suas disponibilidades e atenções.

Agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

“Procure ser uma pessoa de valor, em vez de procurar ser uma pessoa de sucesso. O sucesso é consequência.”

Albert Einstein

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	08
LISTA DE TABELAS.....	10
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS.....	11
1 INTRODUÇÃO.....	16
1.1 Motivação.....	16
1.2 Revisão Bibliográfica.....	18
1.3 Proposta do Trabalho.....	20
1.4 Organização da Tese.....	20
2 MODELOS MATEMÁTICOS.....	23
2.1 $\frac{1}{2}$ Carro.....	23
2.2 Obstáculo.....	26
3 MÉTODO FDIPA DE OTIMIZAÇÃO.....	28
4 IMPLEMENTAÇÃO E VERIFICAÇÃO DOS MODELOS.....	35
5 PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL.....	40
5.1 Declaração de variáveis.....	41
5.2 Programa de Otimização.....	41
5.3 Funções.....	42
5.4 Solução da Dinâmica Vertical.....	42
5.5 Perfil de Pista.....	43
6 RESULTADOS.....	44
7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	57
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	59

ANEXO.....61

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG 3.1 – Ilustração das condições de Karush – Kuhn – Tucker e par estacionário.....	31
FIG. 3.2 – Direção viável de busca.....	33
FIG. 4.1 – Sinal de excitação com $w = 0,5$ m (continua), $w = 2,5$ m (tracejada) e $w = 5$ m (pontos) a 10 km/h.....	38
FIG. 4.2 – <i>Bounce</i> com $v = 10$ km/h e $w = 0,5$ m (ATA – contínuo, Simulação – tracejado).....	41
FIG. 6.1 – <i>Bounce</i> com $x_0(C_i, \beta)$. (ATA – contínuo, Simulação – tracejado).....	50
FIG. 6.2 – Evolução da função objetivo para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro com $x = [C_i \beta]$	52
FIG. 6.3 – Evolução da norma do gradiente da direção para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro com $x = [C_i \beta]$	53
FIG. 6.4 – Evolução da norma do gradiente do vetor lagrangeano para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro com $x = [C_i \beta]$	53
FIG. 6.5 – <i>Bounce</i> com $x_0(C_i, K_i, \beta)$. (ATA – contínuo, Simulação – tracejado).....	54
FIG. 6.6 – Evolução da função objetivo para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro com $x = [C_i K_i \beta]$	56
FIG. 6.7 – Evolução da norma do gradiente da direção para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro com $x = [C_i K_i \beta]$	56
FIG. 6.8 – Evolução da norma do gradiente do vetor lagrangeano para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro com $x = [C_i K_i \beta]$	57
FIG. 6.9 – <i>Bounce</i> com $x_0(C_i, K_i, \beta)$ e restrições de pitch. (ATA – contínuo, Simulação – tracejado).....	57
FIG. 6.10 – Evolução da função objetivo para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro e restrição de <i>pitch</i> com $x = [C_i K_i \beta]$	59
FIG. 6.11 – Evolução da norma do gradiente da direção para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro e restrição de pitch com $x = [C_i K_i \beta]$	59

FIG. 6.12 – Evolução da norma do gradiente do vetor lagrangeano para a simulação de 1/2 carro e restrição de pitch com $x = [C_i \ K_i \ \beta]$60

LISTA DE TABELAS

TAB. 2.1 – Parâmetros utilizados na criação do modelo de meio carro.....	22
TAB. 2.2 – Parâmetros da lombada.....	29
TAB. 4.1 – Parâmetros do obstáculo (ATA, 2014).....	37
TAB. 4.2 – Parâmetros para o veículo M113.....	40
TAB. 6.1 – Valores iniciais para simulação de ½ carro com $x = [C_i \beta]$	50
TAB. 6.2 – Resultados da simulação de ½ carro com $x = [C_i \beta]$	51
TAB. 6.3 – Valores iniciais para simulação de ½ carro com $x = [C_i K_i \beta]$	54
TAB. 6.4 – Resultados da simulação de ½ carro com $x = [C_i K_i \beta]$	55
TAB. 6.5 – Resultados da simulação de ½ carro e restrições de <i>pitch</i> com $x = [C_i K_i \beta]$	58

LISTA DE ABREVIATURAS E SIMBOLOS

ABREVIATURAS

FDIPA – algoritmo de pontos interiores com direção viável (*Feasible Direction Interior Point Algorithm*)

DOF – graus de liberdade (*Degrees of Freedom*)

LQR – reguladores quadráticos lineares (*Linear Quadratic Regulators*)

CF – fator de crista (*Crest Factor*)

CG – centro de gravidade

RK4 – método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

KKT – condições de otimização de Karush – Kuhn – Tucker

BFGS – aproximação de Broyden – Fletcher – Goldfarb – Shano para a Matriz Hessiana

PSO – *Particle Swarm Optimization*

SÍMBOLOS

N – número de eixos do veículo

m_s – massa suspensa (chassi)

Z_{ms} – deslocamento vertical da massa suspensa

\dot{Z}_{ms} – velocidade vertical da massa suspensa

\ddot{Z}_{ms} – aceleração vertical da massa suspensa

θ – movimento angular de arfagem do chassi (pitch)

φ – movimento angular de rolagem do chassi (roll)

a_i – distância longitudinal do ponto de ancoragem da suspensão até o CG

b_i – distância transversal do ponto de ancoragem da suspensão até o CG

K_i – coeficiente elástico da mola da suspensão
 C_i – coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão
 m_{nsi} – massa não suspensa (roda)
 Z_{nsi} – deslocamento vertical da massa não suspensa
 \dot{Z}_{nsi} – velocidade vertical da massa não suspensa
 \ddot{Z}_{nsi} – aceleração vertical da massa não suspensa
 K_{pi} – coeficiente elástico da borracha do pneu
 Z_s – deslocamento dado pelo perfil do solo
 I_y – momento de inercia em relação ao eixo transversal
 I_x – momento de inercia em relação ao eixo longitudinal
 Z_{CG} – deslocamento vertical referenciado no CG (bounce)
 M – matriz massa
 C – matriz de amortecimento
 K – matriz rigidez
 Z – vetor deslocamento associado aos graus de liberdade
 \dot{Z} – vetor velocidade associado aos graus de liberdade
 \ddot{Z} – vetor aceleração associado aos graus de liberdade
 t - tempo
 $F(t)$ – vetor força oriunda do contato com o solo
 v – velocidade longitudinal do veículo
 h – altura do obstáculo percorrido
 w – comprimento do obstáculo percorrido
 τ_i – atraso na aplicação da força oriunda do contato com o solo
 $f(x)$ – função a ser minimizada
 $g(x)$ – função restritiva
 $\nabla f(x)$ – gradiente da função a ser minimizada

$\nabla g(x)$ – gradiente da função restritiva

λ – multiplicador de Lagrange associado a $g(x)$

$G(x)$ – matriz diagonal contendo as $g(x)$

x^*, λ^* - par estacionário que satisfaz KKT

x^k, λ^k – par estacionário inicial

x^{k+1}, λ_0^{k+1} – par estacionário da iteração seguinte

$S(x^k, \lambda^k)$ – matriz S tomada a partir da derivada de segunda ordem da Função de Lagrange associada ao problema de otimização

Λ^k – matriz diagonal contendo os λ

d_0^k – direção de descida

d^k – direção de correção

$H(x^k, \lambda^k)$ – matriz Hessiana

ρ – fator de proporcionalidade entre d_0^k e d^k

α – fator de proporcionalidade de ρ

t^k – passo de Busca Linear de Armijo

η – constante de proporcionalidade da Busca Linear de Armijo

ν – constante de proporcionalidade do passo de Busca Linear de Armijo

B^{k+1} – matriz BFGS

δ – direção para cálculo de B^{k+1}

γ – gradiente da diferença entre as funções de Lagrange

ϕ – atualização de Powell

β – variável auxiliar

RESUMO

Em problemas de otimização de trajetória, o objetivo é a determinação dos parâmetros ótimos que definam uma trajetória ótima em relação a um critério específico, de modo que um sistema dinâmico o percorra ou apresente um comportamento desejado.

Esta tese tem como objetivo apresentar a solução do problema de otimização fazendo uso do método de pontos interiores FDIPA (*Feasible Direction Interior Point Algorithm*). O sistema estudado será um veículo cujas curvas de dinâmica vertical serão extraídas com base na modelagem de $\frac{1}{2}$ carro com sete graus de liberdade. A proposta é a minimização das curvas de *bounce* alterando os parâmetros da suspensão. Ou seja, determinando os coeficientes ótimos de rigidez e de amortecimento.

As trajetórias serão discretizadas e irão compor as restrições associadas ao problema proposto.

Palavras chaves: Otimização, Direção Viável, Pontos Interiores, FDIPA, Dinâmica Vertical.

ABSTRACT

In trajectory optimization problems, the objective is to find the optimal parameters that allow a dynamic system to move through a specific track or present a desired dynamic behavior.

This thesis aims to present the solution for the optimization problem using the interior points method FDIPA (Feasible Direction Interior Point Algorithm). The system studied will be a vehicle whose vertical dynamics curves will be extracted based on $\frac{1}{2}$ car modeling. The proposal is to minimize the bounce curves by changing the suspension parameters. That is, by determining the optimal coefficients of stiffness and damping.

The trajectories are discretized and will form the constraints associated with the proposed problem.

Key Words: Optimization, Feasible Direction, Inner Points, FDIPA, Vertical Dynamics.

1 INTRODUÇÃO

Esta tese tem como objetivo abordar o problema de otimização de trajetória fazendo uso do método de pontos interiores e direções viáveis *Feasible Direction Interior Points Algorithm* (FDIPA). O estudo de caso é feito com base em uma simulação onde é analisada a curva de *bounce* – deslocamento vertical do chassi – de um veículo, sendo o objetivo a minimização do pico máximo da mesma.

A trajetória estudada é obtida por meio das equações de movimento do problema e é discretizada em seguida. A rotina de otimização atua nos parâmetros de projetos aqui definidos como os coeficientes de rigidez e de amortecimento da suspensão. Ou seja, são determinados os valores ótimos para mola e amortecedor do veículo estudado.

A contribuição desse trabalho consiste na implementação da metodologia de pontos interiores, algo ainda pouco usual nessa área de estudo de trajetórias. Com os resultados obtidos no final, espera-se demonstrar a aplicabilidade do FDIPA em problemas de otimização em sistemas dinâmicos. Isso ocorrerá por meio da avaliação das novas curvas que descrevem o problema proposto e da interpretação física das mesmas.

1.1 MOTIVAÇÃO

O desenvolvimento dos métodos numéricos para otimização ganhou força junto ao avanço da computação digital devido à necessidade de cientistas e engenheiros de atuarem em problemas oriundos da exploração aeroespacial. Problemas como a correção do trajeto de um ônibus espacial, ou satélites lançados em órbita, deram origem a busca por formas de se simular numericamente a dinâmica desses lançamentos (BETTS, 1998).

Com os resultados obtidos por meio dessa nova abordagem, estudos sobre otimização de sistemas dinâmicos acabaram se mostrando uma ferramenta robusta para quem quisesse operar *on-line* e *off-line*. Ou seja, para tarefas onde haveria uma intervenção em tempo real no sistema dinâmico, ou para aquelas onde somente seria determinado os parâmetros ótimos para se obter o comportamento dinâmico desejado (BIEGLER, 2007). Assim, a utilização dos métodos acabou sendo aplicada para outras áreas além da aeroespacial.

Uma indústria onde a implementação de otimização de trajetória é aplicada em operações *on-line* e *off-line* é a automobilística. Em projetos de suspensões do tipo ativas, um atuador eletrônico é instalado em substituição ao conjunto mola e amortecedor, ou em paralelo com os mesmos. Por meio de sensores instalados na carroceria do veículo, esse dispositivo é capaz de armazenar ou dissipar energia do sistema alterando seus parâmetros conforme as condições de operação. Assim, pode-se antecipar a ação do atuador (CARVALHO, 2015). Ou seja, há uma atuação em tempo real por parte do atuador de modo a minimizar o deslocamento vertical do chassi, mediante a excitações de base provenientes do percurso pelo qual o veículo trafega.

Em projetos de suspensões do tipo passiva, mais comum, mola e amortecedor apresentam valores fixos para seus coeficientes de rigidez e de amortecimento. Ou seja, o sistema é solidário as excitações de base. A escolha desses parâmetros é feita com base nos estudos de vibrações do sistema dinâmico, no intuito de minimizar as mesmas. Isso ocorre utilizando funções que avaliam o seu Valor Eficaz (JAZAR, 2008).

A motivação desse trabalho é a resolução do problema de otimização de um sistema dinâmico, nesse caso, um veículo. Entretanto, será abordada a minimização de sua trajetória vertical, ou seja, de seu movimento de *bounce*. O objetivo é demonstrar a implementação do método FDIPA como uma alternativa aos métodos usualmente utilizados para casos transientes, de modo a se obter o comportamento dinâmico desejado; otimizando os parâmetros de suspensão para minimização do pico máximo de *bounce* registrado. O uso dos conceitos de funções restritivas também será abordado em conjunto com os modelos matemáticos utilizados para a elaboração do problema proposto.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Conforme descrito na Seção 1.1, há na literatura métodos de otimização para sistemas dinâmicos com suas mais diversas aplicabilidades. Segundo BETTS & HUFFMAN (1993), uma das formas mais eficazes de se lidar com problemas dessa origem é a chamada Transcrição Direta, ou simplesmente Método Direto, fazendo uso de algoritmos de programação não lineares e a discretização da trajetória desejada. Como resultado, acaba-se obtendo matrizes de ordem de grandeza elevada e, em sua maioria das vezes, esparsas. De modo geral, essa acaba sendo a forma abordada por outros métodos também, mas cada um com sua formulação própria.

HARGRAVES & PARIS (1987) fazem uso de uma programação não linear mas empregam funções cúbicas para representar as variáveis de estado, interpolando-as com as variáveis de controle de modo a satisfazer as equações diferenciais que regem o problema. A ideia é representação da otimização de trajetória como um problema matemático que é resolvido com uma programação sequencial cúbica. Assim sendo, sua implementação na forma de um algoritmo torna-se mais fácil.

Uma abordagem dada por BIEGLER (1984) sugere uma alternativa às repetidas soluções de equações diferenciais dadas durante o processo de otimização. Ao descrever esse processo como ineficiente, o autor faz uso de colocações ortogonais de maneira a reduzir o problema de otimização para um de restrição não linear. A solução é dada de modo a garantir a convergência do modelo criado após a redução.

Como uma forma de complementar os Métodos Diretos, YOKOYAMA & SUZUKI (2005) sugerem o uso de Algoritmos Genéticos para a determinação das condições iniciais dos problemas de otimização de trajetórias. O argumento utilizado é o de que esses métodos são sensíveis às tais condições em certos casos e o uso de uma metodologia de origem estocástica supriria tal problema. Com essa proposta, há uma maior garantia de que se trabalhe em uma região de mínimo global, evitando assim os múltiplos passos dados na convergência do problema.

Esse mesmo comportamento dos múltiplos passos (YOKOYAMA & SUZUKI, 2005) foi observado também por AL-KAZEMI & MOHAN (2002) ao apresentarem uma variação do método *Particle Swarm Optimization* (PSO). A proposta foi a criação de um algoritmo que atendesse a problemas tanto discretos quanto contínuos. Nesse caso, diferentes grupos de partículas possuem trajetórias próprias para atender diferentes funções objetivos.

Para os casos onde se deseja trabalhar com a suspensão do veículo, se encontram propostas com base na otimização de modelos de um quarto de carro com dois graus de liberdade fazendo uso de métodos estocásticos (HAC *et al.*, 1985). A saber, cada grau de liberdade é contabilizado como sendo o parâmetro necessário para definir a posição de um corpo – chassi, por exemplo – no espaço em qualquer instante de tempo. Apesar de serem modelos mais simples, estes conseguem obter resultados que minimizam as oscilações no chassi, mas não representam inteiramente a física do problema. Justamente por serem modelados com base de um quarto de carro, apenas o movimento de *bounce* é representado.

Modelos mais completos e condizentes com o problema físico são empregados de modo a garantir maior confiabilidade e consistência nos dados adquiridos. Simulações com base em modelos de $\frac{1}{2}$ carro foram utilizadas inserindo a possibilidade de avaliação dos momentos de inércia e, conseqüentemente, da variação do *pitch* e sua contribuição à dinâmica veicular. Para obtenção dos parâmetros ótimos foram propostas a utilização de algoritmos genéticos (BAUMAL, 1998), reguladores quadráticos lineares (*Linear Quadratic Regulators ou LQR*) (KRTOLICA & HROVAT, 1990) e o cálculo do fator de crista (*Crest Factor ou CF*) com base nos deslocamentos e acelerações verticais e angulares (ATA, 2014). Por serem modelos de meio carro, não é possível aferir a influência dos movimentos de *yaw* e de *roll*, mas são suficientes para uma análise do comportamento do veículo quando, por exemplo, transpõe um obstáculo com as rodas de um mesmo eixo ao mesmo tempo. Ou seja, ambas reagem ao mesmo tempo à mesma excitação.

Por fim, modelos de carro completo contemplam todos os deslocamentos (*bounce, roll, pitch e yaw*) e por isso são mais consistentes em relação aos resultados apresentados. Simulações com essa modelagem foram utilizadas nos estudos de suspensões ativas (IKENAGA *et al.*, 2000), de sistemas similares empregados no

assento do condutor para melhora do conforto (PERALTA et al., 2017), demonstrando aplicabilidade nos mais diversos tipos de veículos como, por exemplo, os de carga (VALÁSEK et al., 1998).

1.3 PROPOSTA DO TRABALHO

O estudo aqui proposto tem como objetivo o levantamento das curvas que descrevem a dinâmica vertical de um veículo, com base na modelagem de $\frac{1}{2}$ carro. Esse trajeto será discretizado de modo a se obter o valor máximo de *bounce* com os parâmetros de projeto originais.

Uma vez que os dados necessários tenham sido validados em comparação com as simulações vistas na literatura, uma rotina de otimização do sistema de suspensão será implementada de modo a determinar o coeficiente de amortecimento viscoso ideal do amortecedor e o coeficiente de rigidez da mola, objetivando a minimização do *bounce*. Para tal, será utilizado o método FDIPA fazendo uso de uma variável auxiliar e de restrições de desigualdade.

A suspensão adotará o sistema passivo, solícito à excitação de base, cujo comportamento dinâmico estará sujeito a restrições de movimento do próprio chassi. As simulações serão feitas utilizando o software MATLAB®.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Essa tese foi criada de forma que seu conteúdo está dividido em oito capítulos e um anexo. O primeiro deles conta com a introdução, motivação, revisão bibliográfica e proposta do trabalho. Uma breve descrição do trabalho realizado é feita e a colaboração dele para a área de estudo. É apresentado o porquê de se trabalhar com otimização de trajetória em sistemas dinâmicos e o motivo de sua aplicação na determinação dos parâmetros de suspensão. Um levantamento bibliográfico é feito de

modo a apresentar os trabalhos oriundos das pesquisas em otimização de trajetória e do sistema de suspensão.

O Capítulo 2 se destina à apresentação dos modelos matemáticos adotados para as simulações do sistema dinâmico. Para tal, optou-se por utilizar o modelo de $\frac{1}{2}$ carro. A escolha se deve ao fato de sua curva de *pitch* servir na criação das funções restritivas associadas ao problema de otimização proposto. A modelagem do obstáculo a ser transposto também é mostrada na forma de uma função sinal de excitação de base.

No Capítulo 3 é apresentado o método FDIPA e sua formulação feita a partir das condições de otimização de Karush – Kuhn – Tucker. Os cálculos para obtenção de uma direção de descida viável são mostrados, demonstrando o porquê de o processo iterativo resultar em uma sucessão de pontos restritos a função que se deseja minimizar e as restrições associadas ao problema.

O Capítulo 4 apresenta a validação dos códigos criados no MATLAB® com base nos modelos matemáticos apresentados no Capítulo 2. O objetivo é verificar se o comportamento observado nos veículos vai de encontro com o que se tem disponível na literatura e se a física do problema está sendo bem representada.

No Capítulo 5 é mostrado como que o método FDIPA é utilizado para a determinação dos parâmetros ótimos da suspensão. O problema de otimização é apresentado, junto à maneira como as curvas da dinâmica vertical do veículo são utilizadas para compor as restrições associadas. Todo o procedimento computacional é detalhado de forma a padronizar os testes realizados.

O Capítulo 6 se destina à apresentação e discussão dos resultados obtidos pós processo de otimização. É feito um levantamento da evolução da função objetivo assim como dos critérios de parada do problema. O comportamento do *bounce* do veículo com os novos parâmetros é mostrado e comparado frente aos originais.

No Capítulo 7 está a conclusão desse trabalho, com as considerações finais sobre os objetivos alcançados e sugestões para o trabalhos futuros que se destinem aos estudos de otimização de trajetória.

No Capítulo 8 está toda a revisão bibliográfica obtida para a elaboração da tese, constando os autores das citações ao longo do trabalho.

No Anexo estão detalhados os algoritmos criados para a realização das simulações propostas para a solução do sistema dinâmico estudado.

2 MODELOS MATEMÁTICOS

Esse capítulo tem como objetivo a apresentação do modelo matemático utilizado na simulação do sistema dinâmico a ser otimizado, sendo ele o de $\frac{1}{2}$ carro. Ele é descrito por JAZAR (2008) para casos onde há pequenos deslocamentos, de modo a linearizar as equações de movimentos obtidas.

2.1 $\frac{1}{2}$ CARRO

Como mencionado na seção 1.2, existem vários modelos matemáticos com o intuito de simular o comportamento dinâmico de um veículo. O modelo adotado é o de $\frac{1}{2}$ carro de $N + 2$ GDL, onde N é o número de eixos presentes no veículo e GDL seus graus de liberdade. Antes da construção do modelo matemático, algumas hipóteses são assumidas no intuito de viabilizar as simulações futuras e simplificar o problema apresentado. São elas:

- Tanto o chassi quanto as rodas são considerados corpos rígidos;
- Não há deformação no terreno analisado, independente da função que o descreva;
- Nos modelos de $\frac{1}{2}$ carro será analisado os movimentos de *bounce* e *pitch*;
- O M113 possui rodas de aço com uma camada de borracha rígida e seu coeficiente de amortecimento é desprezível ante o de rigidez;
- As barras de torção do M113 serão representadas como molas de comportamento linear.

Assim sendo, pode-se representar um modelo físico de um veículo em um modelo matemático, onde chassi e rodas são retratados como corpos de massas

indeformáveis e são vinculados entre si pelos elementos que compõe a suspensão do veículo – mola e amortecedor. Os elementos elásticos e viscosos atuam também de modo a vincular a massa suspensa e as massas não suspensas, assim como as excitações de base seriam responsáveis pelas oscilações do sistema.

Os parâmetros para a modelagem estão descritos na TAB. 2.1 com suas respectivas descrições e unidades utilizadas para a simulação. Vale aqui ressaltar que o modelo esquemático apresentado pode ser utilizado para qualquer veículo.

TAB 2.1 – Parâmetros utilizados na modelagem de ½ carro

Parâmetro	Símbolo	Unidade
Massa suspensa	m_s	kg
Distância do eixo “i” ao CG	a_i	m
Movimento de <i>bounce</i>	Z_{ms}	m
Movimento de <i>pitch</i>	θ	rad
Massa não suspensa correspondente ao eixo “i”	m_{nsi}	kg
Movimento da massa não suspensa correspondente ao eixo “i”	Z_{nsi}	m
Rigidez da mola correspondente ao eixo “i”	K_i	N/m
Coefficiente viscoso do amortecedor correspondente ao eixo “i”	C_i	N.s/m
Rigidez do pneu correspondente ao eixo “i”	K_{pi}	N/m
Deslocamento do solo atuando no eixo “i”	Z_{si}	m

As equações que regem a dinâmica do veículo são extraídas a partir da aplicação da Segunda Lei de Newton para as massas suspensa e não suspensas. Assim, separa-se os corpos representados, e uma vez feito o balanço de forças e momentos para cada um, se chega às EQ. 2.1, E.Q. 2.2 e E.Q. 2.3 que descrevem, respectivamente, *bounce*, *pitch* e deslocamento vertical das rodas.

$$m_s \ddot{Z}_{CG} + \sum_{i=1}^N C_i (\dot{Z}_{CG} + a_i \dot{\theta} - \dot{Z}_{nsi}) + \sum_{i=1}^N K_i (Z_{CG} + a_i \theta - Z_{nsi}) = 0 \quad (2.1)$$

$$I_y \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N C_i a_i (\dot{Z}_{CG} + a_i \dot{\theta} - \dot{Z}_{nsi}) + \sum_{i=1}^N K_i a_i (Z_{CG} + a_i \theta - Z_{nsi}) = 0 \quad (2.2)$$

$$m_{nsi} \ddot{Z}_{nsi} - C_i (\dot{Z}_{CG} + a_i \dot{\theta} - \dot{Z}_{nsi}) - K_i (Z_{CG} + a_i \theta - Z_{nsi}) + K_{pi} Z_{nsi} = K_{pi} Z_{si}, i = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

As E.Q. 2.1, E.Q. 2.2 e E.Q. 2.3 denotam as equações de movimento com os $N + 2$ GDL do sistema proposto. No intuito de resolver todas de forma simultânea, as mesmas foram reduzidas a sua forma matricial – E.Q. 2.4.

$$M[\ddot{Z}] + C[\dot{Z}] + K[Z] = F(t) \quad (2.4)$$

As matrizes M , C e K são, respectivamente, a Matriz Massa, Matriz de Amortecimento e Matriz Rigidez. Suas formas cheias estão expressas pelas equações E.Q 2.5, E.Q. 2.6 e E.Q. 2.7. O vetor Z (E.Q. 2.8) é o Vetor Solução composto dos deslocamentos associados aos GDL e o vetor $F(t)$ (E.Q. 2.9) consiste no Vetor Força.

$$M = \begin{bmatrix} m_s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_{ns1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{nsN} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N C_i & \sum_{i=1}^N C_i a_i & -C_1 & -C_2 & \dots & -C_N \\ \sum_{i=1}^N C_i a_i & \sum_{i=1}^N C_i a_i^2 & -C_1 a_1 & -C_2 a_2 & \dots & -C_N a_N \\ -C_1 & -C_1 a_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 \\ -C_2 & -C_2 a_2 & 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_N & -C_N a_N & 0 & 0 & \dots & C_N \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$K = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N K_i & \sum_{i=1}^N K_i a_i & -K_1 & -K_2 & \dots & -K_N \\ \sum_{i=1}^N K_i a_i & \sum_{i=1}^N K_i a_i^2 & -K_1 a_1 & -K_2 a_2 & \dots & -K_N a_N \\ -K_1 & -K_1 a_1 & K_1 + K_{p1} & 0 & \dots & 0 \\ -K_2 & -K_2 a_2 & 0 & K_2 + K_{p2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K_N & -K_N a_N & 0 & 0 & \dots & K_N + K_{pN} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$Z = [Z_{CG} \theta Z_{ns1} \dots Z_{nsN}]^T \quad (2.8)$$

$$F(t) = [0 \ 0 \ K_{p1} Z_{s1} \dots K_{pN} Z_{sN}]^T \quad (2.9)$$

2.2 OBSTÁCULO

Para extrair as curvas de *bounce* e *pitch* do veículo, deve-se fazer com que ele passe por um obstáculo e que excite o sistema que se encontra em equilíbrio. Essa é a chamada excitação de base.

O perfil adotado nesse trabalho é o de uma lombada, conforme visto em trabalhos como o de ATA (2014) e DARUS & SAM (2009). Ela assume uma função cosseno dada em função do tempo conforme EQ. 2.10 e seus parâmetros se encontram na TAB. 2.2.

$$Z_{s1} = \begin{cases} \frac{h}{2} \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{v}{w} (t - 0,5) \right) \right], & \text{para } 0,5 \leq t \leq 0,5 + \frac{w}{v} \\ 0, & \text{para os demais} \end{cases} \quad (2.10)$$

TAB 2.2 – Parâmetros da lombada

Parâmetro	Símbolo	Unidade
Altura da lombada	h	m
Velocidade do veículo	v	m/s
Largura da lombada	w	m

A EQ. 2.10 apenas descreve apenas a excitação de base que atua nas rodas do primeiro eixo do veículo, necessitando assim da aplicação de um atraso para computar os efeitos de tal ação nos demais. O cálculo desse atraso é dado em razão das distancias entre eixos e a velocidade com que o veículo trafega (EQ. 2.11) e sua aplicação na função que descreve o obstáculo é dada pela EQ. 2.12.

$$\tau_i = \frac{a_1 - a_i}{v}, i = 2, \dots, N \quad (2.11)$$

$$Z_{si} = \frac{h}{2} \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{v}{w} (t - 0,5 - \tau_i) \right) \right], \text{ para } 0,5 + \tau_i \leq t \leq 0,5 + \tau_i + \frac{w}{v} \quad (2.12)$$

0, para os demais

3 O MÉTODO FDIPA DE OTIMIZAÇÃO

Todo problema de otimização sujeito às restrições de desigualdade pode ser descrito, de forma generalista, como mostrado na EQ. 3.1. Ou seja, se deseja minimizar uma função objetivo $f(x)$, onde x é composto pelas chamadas variáveis de projeto. Porém, tal função é restrita a outra função, aqui dada por $g(x)$. Nesse caso, assume-se $f(x)$ e $g(x)$ como uma funções contínuas e diferenciáveis, sendo $f(x)$ convexa em seu domínio ou semiconvexa em um intervalo do mesmo.

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{tal que } g(x) \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

O método escolhido para solução do problema de otimização é o chamado FDIPA (*Feasible Direction Interior Point Algorithm*), proposto originalmente por HERSKOVITS (1998) que consiste em uma solução iterativa com base nas condições de Karush – Kuhn – Tucker (KKT), vide as EQ. 3.2, EQ. 3.3, EQ. 3.4 e EQ 3.5. O FDIPA é conhecido por sua fácil implementação computacional e eficiência, além de requerer apenas a solução de dois sistemas lineares a cada iteração e a utilização de um método de busca linear para o passo.

$$\nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda = 0 \quad (3.2)$$

$$G(x)\lambda = 0 \quad (3.3)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (3.4)$$

$$g(x) \leq 0 \quad (3.5)$$

A EQ. 3.2 é o gradiente da chamada Função Lagrangeana ou Função de Lagrange associada a $f(x)$, onde λ é o Multiplicador de Lagrange da restrição $g(x)$. O termo $G(x)$

da EQ. 3.3 consiste em uma matriz diagonal onde $G(x)_{ii} = g(x)_i$, ou seja, cada elemento da diagonal principal consiste em uma função restritiva. Define-se então (x^*, λ^*) como par KKT ou par estacionário, sendo este o par x e λ que satisfaz às condições de KKT, como descrito na FIG. 3.1.

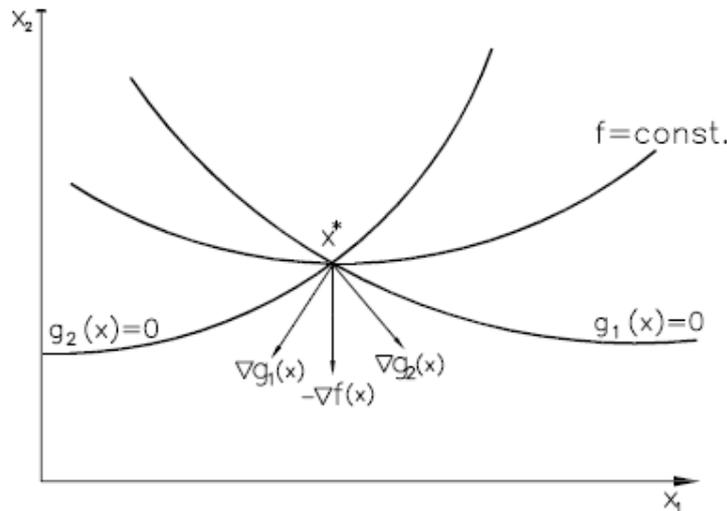


Figura 3.1 – Ilustração das condições de Karush – Kuhn – Tucker e par estacionário (HERSKOVITS, 1998)

Ou seja, se existe um vetor x^* tal que o mesmo seja um ponto de mínimo, então existe um vetor λ^* associado às restrições $G(x)$ e $\nabla f(x)$ que pode ser escrito como uma combinação linear dos gradientes das restrições a seus respectivos Multiplicadores de Lagrange ($-\nabla f(x^*) = \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x^*)$). Como $f(x) > 0$ e $g(x) \leq 0$, então $\lambda > 0$ de modo que $-\nabla f(x)$ e $\nabla g(x)$ estejam orientados no mesmo sentido.

A obtenção do par (x^*, λ^*) pode ser feita de modo iterativo como a utilizada pelo Método de Newton descrito na EQ. 3.6 na forma de um sistema linear.

$$\begin{bmatrix} S(x^k, \lambda^k) & \nabla g(x^k) \\ \Lambda^k \nabla g^t(x^k) & G(x^k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{k+1} - x^k \\ \lambda_0^{k+1} - \lambda^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^k) + \nabla g(x^k) \lambda^k \\ G(x^k) \lambda^k \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

O par (x^k, λ^k) consiste no ponto inicial para a iteração de Newton e $(x^{k+1}, \lambda_0^{k+1})$ é o ponto da iteração seguinte. O termo $S(x^k, \lambda^k)$ é uma matriz positiva definida tomada a partir da derivada de segunda ordem da Função de Lagrange e Λ^k é uma matriz diagonal onde $\Lambda_{ii} = \lambda_i$, ou seja, cada elemento da diagonal principal é composto por um multiplicador de Lagrange. Assumindo $d_0^k = x^{k+1} - x^k$ e separando as equações do sistema da EQ. 3.6, obtém-se as expressões descritas nas EQ. 3.7 e EQ. 3.8.

$$S(x^k, \lambda^k)d_0^k + \nabla g(x^k)\lambda_0^{k+1} - \nabla g(x^k)\lambda^k = -\nabla f(x^k) - \nabla g(x^k)\lambda^k \quad (3.7)$$

$$\Lambda^k \nabla g^t(x^k)d_0^k + G(x^k)\lambda_0^{k+1} - G(x^k)\lambda^k = -G(x^k)\lambda^k \quad (3.8)$$

Eliminando os termos $-\nabla g(x^k)\lambda^k$ e $-G(x^k)\lambda^k$, pois se cancelam em ambos os lados da igualdade, se reescreve a EQ. 3.6 de modo que sua nova formulação (EQ. 3.7).

$$\begin{bmatrix} S(x^k, \lambda^k) & \nabla g(x^k) \\ \Lambda^k \nabla g^t(x^k) & G(x^k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0^k \\ \lambda_0^{k+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Prova-se que d_0^k é uma direção de descida ao pré-multiplicar a primeira equação oriunda do sistema matricial (E.Q. 3.7), resultando na EQ. 3.8.

$$d_0^{k^t} S(x^k, \lambda^k) d_0^k + d_0^{k^t} \nabla g(x^k) \lambda_0^{k+1} = -d_0^{k^t} \nabla f(x^k) \quad (3.8)$$

Analisando termo a termo da equação calcula-se que:

- $d_0^{k^t} S(x^k, \lambda^k) d_0^k > 0$, pois $S(x^k, \lambda^k)$ é assumida positiva definida;

- $d_0^{k^t} \nabla g(x^k) \lambda_0^{k+1} > 0$, pois $d_0^{k^t} \nabla g(x^k) = -g(x^k)$ oriunda da Iteração de Newton;
- $-d_0^{k^t} \nabla f(x^k) > 0$, pois $d_0^{k^t} \nabla f(x^k) = -f(x^k)$ oriunda da Iteração de Newton.

Comprova-se então que $d_0^{k^t}$ é uma direção descendente, pois sendo $f(x)$ diferenciável, tem-se que $d_0^{k^t} \nabla f(x^k) < 0$. Entretanto, o mesmo não é necessariamente uma direção viável de busca, pois à medida que as restrições tendem a zero, a EQ 3.7 impõe que d_0^k tenda a uma direção tangente à região viável, como visto na FIG. 3.2.

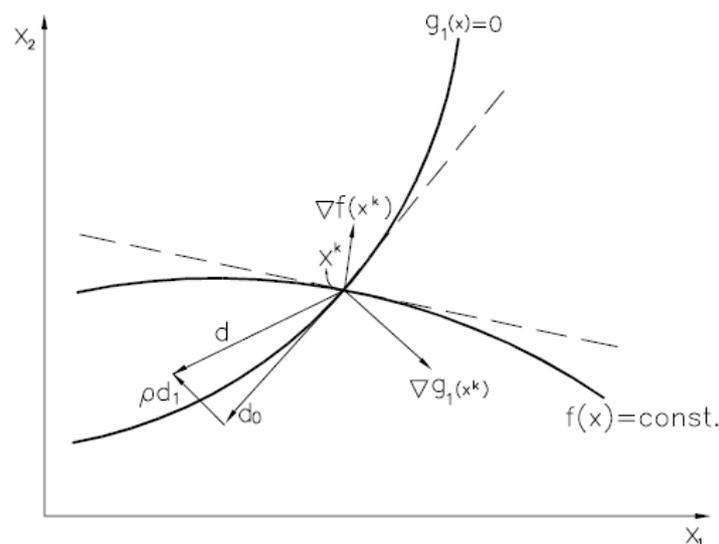


Figura 3.2 – Direção viável de busca (HERSKOVITS, 1998)

A fim de evitar uma busca fora da região delimitada, um segundo sistema linear é definido ao causar uma perturbação na segunda equação oriunda da EQ 3.7 em função de uma nova direção de busca e um novo valor do Multiplicador de Lagrange, resultando na EQ 3.9.

$$\begin{bmatrix} S(x^k, \lambda^k) & \nabla g(x^k) \\ \Lambda^k \nabla g^t(x^k) & G(x^k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0^k \\ \bar{\lambda}^{k+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^k) \\ \rho^k \lambda^k \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Assumindo ρ como um escalar positivo, fica evidente que d^k é uma direção viável uma vez que se $G(x^k) = 0$ então, $\Lambda^k \nabla g^t(x^k) < 0$. Essa perturbação imposta é responsável por causar uma deflexão em d_0^k proporcional à ρ de modo a inseri-lo na região viável. Portanto, deve-se assegurar também que d^k seja uma direção descendente proporcional à d_0^k (EQ. 3.10) o que implica em $d^{k^t} \nabla f(x^k) < 0$.

$$d^{k^t} \nabla f(x^k) \leq \alpha d_0^{k^t} \nabla f(x^k) \quad (3.10)$$

De modo geral, a taxa de convergência da função na direção d^k é menor do que na direção d_0^k , apesar de d^k ser uma direção de descida viável. Esse é um preço pago na obtenção de uma direção ótima na região viável. Analisando o sistema linear auxiliar descrito na EQ. 3.9, é possível deduzir que $d^k = d_0^k + \rho d_1^k$. Ou seja, a solução d^k do problema de otimização é uma combinação linear das soluções dos sistemas matriciais descritos nas EQ. 3.7 e EQ. 3.11.

$$\begin{bmatrix} S(x^k, \lambda^k) & \nabla g(x^k) \\ \Lambda^k \nabla g^t(x^k) & G(x^k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^k \\ \lambda_1^{k+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^k \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Substituindo a expressão de $d^k = d_0^k + \rho d_1^k$ na EQ. 3.10, obtém-se a EQ. 3.12 que correlaciona o escalar ρ com a proporcionalidade entre d_0^k e d_1^k , podendo assim computar o passo de busca viável e o Multiplicador de Lagrange ideal na EQ. 3.13.

$$\rho \leq \frac{(\alpha - 1) d_0^{k^t} \nabla f(x^k)}{d_1^{k^t} \nabla f(x^k)} \quad (3.12)$$

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \lambda_0^{k+1} + \rho \lambda_1^{k+1} \quad (3.13)$$

Após a determinação da direção, o passo de busca pode ser obtido utilizando o Método de Busca Linear de Armijo. Este método baseia-se na escolha de um passo inicial (t^k) de modo que o vetor $x^k + t^k d^k$ deve conduzir a $f(x^k + t^k d^k) \leq f(x^k)$ e, caso não ocorra, o passo deve ser reduzido a cada iteração de modo a acarretar na diminuição da função. A EQ. 3.14 define que a redução da função é justamente proporcional ao tamanho do passo ajustado a uma constante η , de modo que t^k é ajustado a cada iteração seguindo a ordem descrita pela EQ. 3.15.

$$f(x^k + t^k d^k) \leq f(x^k) + t^k d^{kt} \eta \nabla f(x^k) \quad (3.14)$$

$$t^k = \left\{ 1, \frac{1}{v}, \frac{1}{v^2}, \frac{1}{v^3}, \dots \right\}, \text{ tal que } v > 1 \quad (3.15)$$

De modo análogo à condição do passo na redução da função, t^k também deve satisfazer às condições restritivas, de modo a garantir a solução do problema, vide EQ. 3.16.

$$g_i(x^k + t^k d^k) < 0 \quad (3.16)$$

Por fim, obtém-se o vetor de variáveis x seguinte de modo que $x^{k+1} = x^k + t^k d^k$. Como já mencionado, deve – se calcular $S(x^k, \lambda^k)$ e a mesma tem que ser positiva definida a cada iteração para a implementação do FDIPA. Uma alternativa a esse cálculo é a utilização do Método de Quase Newton pela aproximação da Matriz Hessiana pela atualização BFGS (Broyden – Fletcher – Goldfarb – Shano) descrito pela EQ. 3.17, sendo B^{k+1} a aproximação para $H(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$, Hessiana, e B^k é obrigatoriamente uma matriz positiva definida para iniciar a iteração, tomando - a como uma Matriz Identidade.

$$\begin{aligned}
B^{k+1} &= B^k + \frac{\gamma\gamma^t}{\delta^t\gamma} - \frac{B^k\delta^t\delta B^k}{\delta^t B^k \delta} \\
\delta &= x^{k+1} - x^k \\
\gamma &= \nabla_x(f(x^{k+1}) + g(x^{k+1})\lambda) - \nabla_x(f(x) + g(x)\lambda)
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

Como não há garantias de que a aproximação é definida positiva, uma atualização de γ foi proposta no intuito de garantir a condição citada (POWELL, 1983) explicitada na EQ. 3.18.

$$\begin{cases} \phi = \frac{0,8\delta^t B^k \delta}{\delta^t B^k \delta - \delta^t \gamma} , \text{ se } \delta^t \gamma < 0,2\delta^t B^k \delta \\ \gamma = \phi\gamma + (1 - \phi)B^k\delta \end{cases}
\tag{3.18}$$

Ainda no contexto de atualizações, verifica-se na EQ. 3.7 que qualquer valor de $\lambda^k > 0$ satisfaz a mesma, de modo que sua atualização para o passo seguinte pode ser feita a partir da norma da direção de descida (EQ. 3.19).

$$\lambda^k = \|d_0\|^2
\tag{3.19}$$

Aqui termina a apresentação dos fundamentos para a utilização do método de otimização FDIPA. A etapa seguinte consiste na validação dos algoritmos criados para as modelagens de ½ carro apresentadas no Capítulo 2.

4 IMPLEMENTAÇÃO E VERIFICAÇÃO DOS MODELOS

Nessa etapa do trabalho é feita a verificação dos códigos criados a partir dos modelos matemáticos descritos no Capítulo 2. Antes de testar os modelos de $\frac{1}{2}$ carro e carro completo restrito, é feita uma verificação da função que descrevem as excitações de base (E.Q. 2.10). Os parâmetros da mesma assim como as velocidades de teste (ATA, 2014) encontram-se na TAB. 4.1.

TAB 4.1 – Parâmetros do obstáculo (ATA, 2014)

Parâmetro	Valor
Largura (w)	0,5 m (pequena) – 2,5 m (média) – 5 m (grande)
Velocidade (v)	10 km/h (pequena) – 40 km/h (média) – 60 km/h (grande)
Altura (h)	0,1 m

Analisando sob a ótica da física do problema, se espera encontrar uma curva que, independente da largura do obstáculo, alcance sua altura máxima e que a mesma seja seu ponto de simetria. É de se esperar que quanto maior for a velocidade empregada no teste, menor será o comprimento de onda do sinal de excitação.

O resultado obtido na FIG. 4.1 corresponde à função de excitação de base com velocidade de 10 km/h para as três larguras do obstáculo descrito na TAB 4.1.

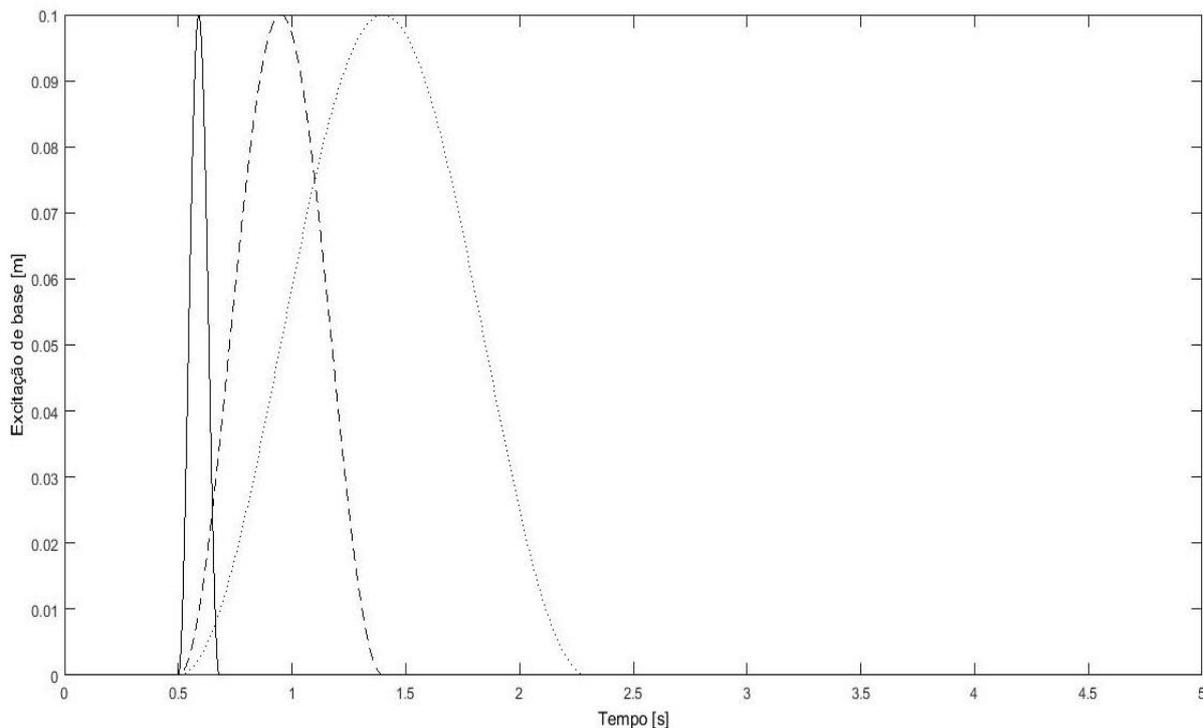


Figura 4.1 – Sinal de excitação com $w = 0,5$ m (continua), $w = 2,5$ m (tracejada) e $w = 5$ m (pontos) a 10 km/h.

Como se pode observar na FIG. 4.1, o algoritmo criado para simular a lombada foi corretamente implementado. Todas as três curvas apresentaram o comportamento esperado, com um aumento no período do sinal proporcional a largura implementada. As amplitudes das ondas são as mesmas e apresentam simetria no tempo discreto onde alcançam seu pico máximo.

Em ATA (2014) são feitas simulações com diferentes combinações de velocidade de teste e largura de obstáculo. Foi verificada a vibração de um carro de combate quando sujeito à excitações de base distintas. Esse estudo serviu para testar a resposta do sistema quando se acrescenta ou suprime o uso de amortecedores nos eixos.

No intuito de se padronizar os testes para essa tese, optou-se por utilizar a velocidade de 10 km/h e uma largura de 0.5 m para a lombada. Tal medida se torna necessária, pois quanto maior a velocidade empregada, maior será a frequência de oscilação do veículo a ser testado. Esse comportamento é esperado, mas dificulta a

verificação dos picos de oscilação oriundos da passagem de cada eixo do veículo. Este fato foi verificado também por CARVALHO (2015) ao utilizar o mesmo modelo de ATA (2013) em seu trabalho.

Para a validação dos códigos criados, será utilizado o método de Runge – Kutta de Quarta Ordem (RK4) modificado para resolver equações diferenciais de ordens superiores (DIEGUEZ, 2005). O passo de integração será de 10^{-3} e o tempo será discretizado em cinco mil pontos.

Para o modelo de $\frac{1}{2}$ carro, será utilizado o carro de combate M113 (ATA, 2014). Trata-se de um veículo blindado sobre lagartas com cinco eixos destinado ao transporte de pessoal. Apesar do uso de lagartas, as simplificações feitas por ATA (ATA, 2014) dispensam os efeitos da mesma sobre o veículo. Ou seja, ele considera que a excitação de base atua diretamente nas rodas de aço que são cobertas por uma lona de borracha. Além disso, as barras de torção presentes no veículo são representadas como molas.

Vale ressaltar que o modelo original do M113 estudado é denominado A3, que possui amortecedores apenas no 2º, 3º e 4º eixo. Entretanto, nesse trabalho será considerado que o mesmo possui amortecedores em todos os eixos, conforme descrito também no trabalho do qual suas informações foram retiradas (ATA, 2014). Assim será possível validar o código criado a partir dos dados extraídos da obra de referência. Os parâmetros do M113 se encontram na TAB. 4.2.

Tabela 4.2 – Parâmetros para o veículo M113

Parâmetro	Valor
Massa suspensa (m_s)	5109 kg
Momento de Inércia (I_y)	12856 kg.m ²
Distâncias dos eixos ao CG (do 1° ao 5°) (a_i)	1,35 m, 0,69 m, 0,02 m, - 0,66 m, - 1,32 m
Coefficiente de rigidez da mola da suspensão (K_i)	104000 N/m
Coefficiente de amortecimento (C_i)	22520 N.s/m
Massa não suspensa (m_{nsi})	113,5 kg
Coefficiente elástico do pneu (K_{pi})	613000 N/m

O resultado da simulação em comparação com os dados originais (ATA, 2014) é mostrado na FIG. 4.2.

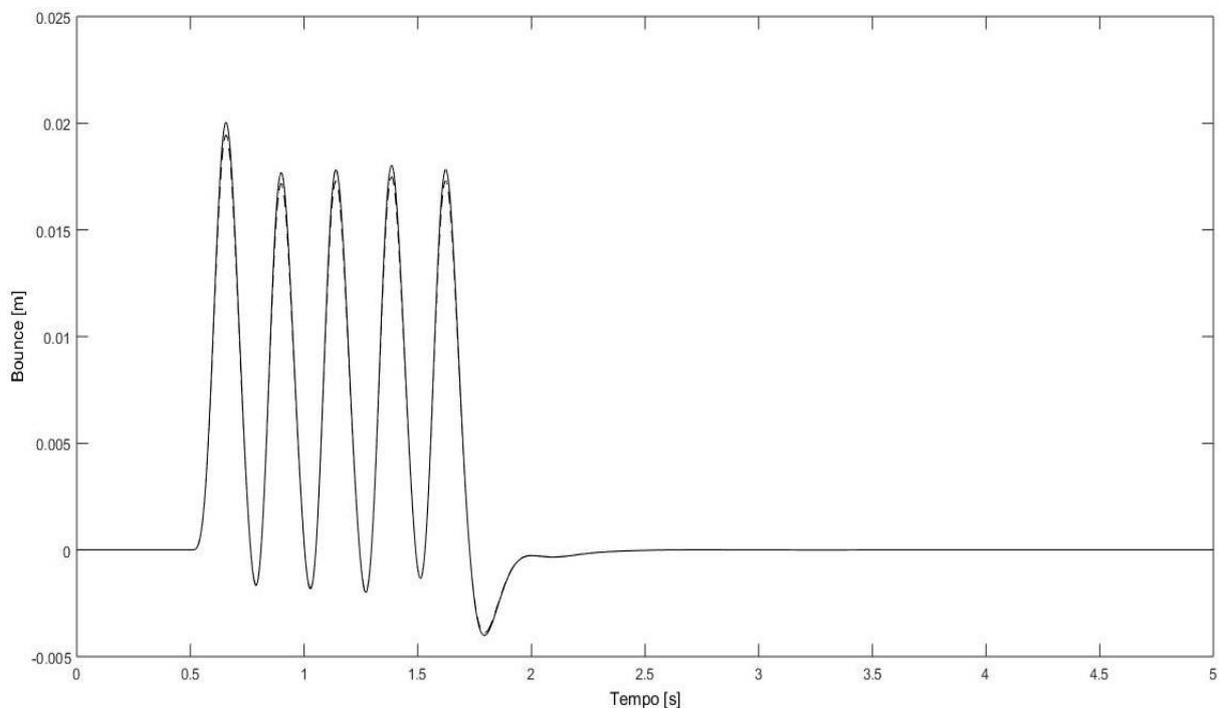


Figura 4.2 – *Bounce* com $v = 10$ km/h e $w = 0,5$ m (ATA – contínuo, Simulação – tracejado).

A FIG. 4.2 comprova que o código foi bem implementado, mostrando a sobreposição das curvas de *bounce* do M113. Os dados originais (ATA, 2014) foram extraídos com o auxílio da ferramenta *on-line* WebPlotDigitizer®. Como todas as distâncias entre eixos são superiores ao comprimento da lombada e o veículo está trafegando a uma velocidade baixa, fica evidente na FIG. 4.2 os cinco picos de deslocamento vertical do chassi devido a passagem de cada uma das rodas.

5 PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL

Nesse capítulo é abordada a forma como o método de otimização FDIPA é implementado no sistema dinâmico apresentado no Capítulo 2.

O objetivo do trabalho é a minimização dos picos de *bounce* de um veículo fazendo uso de suas curvas de dinâmica vertical para montar as restrições do problema. Para tal, uma variável auxiliar (β) é selecionada de modo a assumir sempre o valor do máximo deslocamento vertical do chassi. Ou seja, β é a função a ser otimizada. Assim, podemos definir o problema conforme descrito na EQ. 5.1.

$$\begin{cases} \text{minimizar } f(x) = \beta, \text{ tal que:} \\ Z_{CGi} - \beta \leq 0 \\ |\theta_i| - \theta_{\max} \leq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Para atender as condições da E.Q. 5.1, deve-se solucionar a E.Q. 2.4 para obtenção dos dados necessários para compor as restrições do problema. Para tal, se utiliza o RK4 discretizando as curvas desejadas. Assim, o problema é montado de forma que β seja maior ou igual a todo Z_{CGi} discreto obtido da solução das equações que regem a dinâmica vertical.

O termo θ_{\max} representa o valor máximo admitido para o *pitch*. Tal condição restritiva é necessária pois, conforme visto no Capítulo 2, as equações de movimento apresentadas admitem pequenos deslocamentos. Para garantir a linearidade da E.Q. 2.4, θ_{\max} assume o valor de 10° (GILLESPIE, 1992).

As simulações retratam a passagem do veículo por um obstáculo por um período de 5 segundos. Esse tempo é discretizado para obtenção das curvas da dinâmica vertical. O passo de integração adotado é de 10^{-3} , obtendo assim 5000 pontos discretos para cada curva. Ou seja, o número de equações restritivas será equivalente ao somatório de todos os pontos discretos necessários para a simulação.

Conforme visto no Capítulo 4, todas as passagens do veículo são feitas a velocidade de 10 km/h sobre um obstáculo de 0.5 m de largura. É imposta uma velocidade constante para a realização das simulações, pois a E.Q. 2.10 não admite uma frequência variante no tempo.

Tendo feito tais colocações, o procedimento adotado para todas as simulações seguirá a ordem descrita nas seções a seguir.

5.1 DECLARAÇÃO DE VARIÁVEIS

O arquivo *prob_opt* (Anexo) foi construído para que todas as variáveis do sistema dinâmico a ser otimizado sejam declaradas. Nessa etapa são inseridas as informações relativas aos dados do veículo e do obstáculo.

São selecionados os elementos que compõem o vetor x_0 , ou seja, que serão as variáveis de projeto para otimizar o sistema. Aqui são utilizados os coeficientes de rigidez e de amortecimento da suspensão do veículo. A variável auxiliar β_0 é inserida nesse vetor, de modo a assumir um valor suficientemente grande para iniciar o problema. Os limites máximos e mínimos cujos elementos de x_0 podem assumir são declarados.

Informações complementares como a velocidade de passagem, tempo em que percorre e passo de integração são estabelecidas aqui. Variáveis que não as que compõe o vetor x_0 são armazenadas em vetores distintos, separando-os em valores reais e inteiros.

5.2 PROGRAMA DE OTIMIZAÇÃO

O arquivo *faipa* que se encontra presente no arquivo *prob_opt* (Anexo) contém o algoritmo criado por Herskovits (1998) para implementação do método FDIPA. Nele são resolvidas as equações descritas no Capítulo 4 e são definidas as condições de

parada para o processo de otimização. São analisadas as normas dos vetores de direção de descida (d_0) e do lagrangeano (λ) de modo que, para garantir a convergência do método, é adotada uma tolerância inferior à 10^{-3} para ambos. O programa é interrompido quando um e/ou outro alcançam tal valor.

O gradiente das funções utilizadas é calculado pelo método de diferenças finitas, sendo o código para tal cálculo já nativo do arquivo *faipa*. Para tal, é necessário que o código receba as informações relativas a função a ser minimizada e as que compõem as restrições do problema.

5.3 FUNÇÕES

O arquivo *fun_opt* (Anexo) é chamado dentro do *faipa* e é responsável pela criação das funções utilizadas no problema proposto (E.Q. 5.1). Os vetores declarados em *prob_opt* são recebidos e utilizados para determinar a solução das equações de movimento descritas no Capítulo 2.

5.4 SOLUÇÃO DA DINÂMICA VERTICAL

Nessa etapa são montadas as matrizes que compõem a E.Q. 2.4 dentro do arquivo *sol_opt* (Anexo). Uma vez que as mesmas tenham sido preenchidas, pode-se extrair as curvas da dinâmica vertical por meio do método RK4. É montada a matriz com a solução do problema, cujas linhas representam cada um dos graus de liberdade e as colunas o valor obtido para cada tempo discreto.

5.5 PERFIL DE PISTA

O perfil de pista adotado é o descrito pela E.Q. 2. 10 e é implementada no arquivo *road_opt* (Anexo). Ele recebe a informação do tempo discretizado pelo *sol_opt* e devolve para o mesmo o vetor Força (E.Q. 2.9) atuante em cada uma das rodas do veículo.

6 RESULTADOS

A primeira simulação feita com base no modelo de ½ carro utilizará o M113 como veículo de teste. Para um primeiro problema mais simples, foram tomados como parâmetros de projeto os coeficientes de amortecimento nos cinco eixos, mais a variável auxiliar β . As restrições tomadas foram apenas as do próprio *bounce*. Ou seja, que $\beta \geq Z_{CGi}$ para todo $i = 1, 2, \dots, 5000$. Os parâmetros encontram-se na TAB 6.1. O resultado obtido é mostrado na FIG. 6.1.

TAB 6.1 – Valores iniciais para simulação de ½ carro com $x = [C_i \ \beta]$

Parâmetros	Valor Inicial	Valor Máximo	Valor Mínimo
Coeficiente de Amortecimento (C_i)	22520 Ns/m	30000 Ns/m	1000 N/m
Pico de Bounce (β_0)	2×10^{-2} m	1×10^{-1} m	5×10^{-3} m

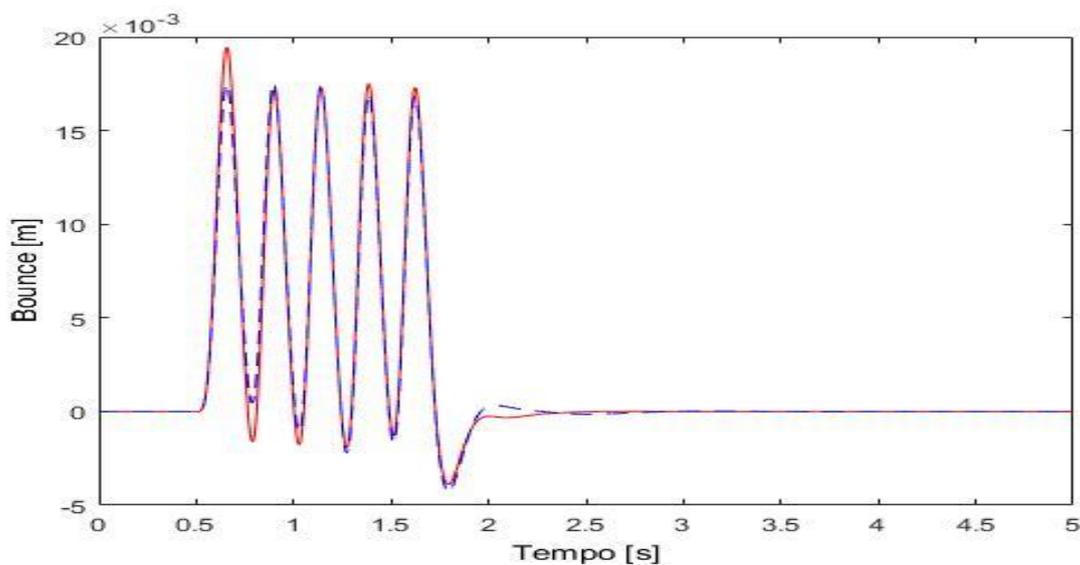


Figura 6.1 – *Bounce* com $x_0(C_i, \beta)$. (ATA – contínuo, Simulação – tracejado).

A FIG. 6.1 mostra o deslocamento vertical do chassi medido em seu centro de gravidade. O valor máximo de *bounce* registrado na simulação foi de $1,75 \times 10^{-2}$ m, enquanto a original foi de $1,94 \times 10^{-2}$ m implicando em uma redução de 10% do deslocamento em relação ao projeto original. O tempo total para convergência foi de 6 minutos e 7 segundos. Os valores dos novos parâmetros de projeto, juntamente com a variação percentual em relação aos dados originais podem ser vistos na TAB. 6.2 abaixo.

TAB 6.2 – Resultados da simulação de $\frac{1}{2}$ carro com $x = [C_i \ \beta]$

Parâmetros	Valor Inicial	Valor Final	Variação Percentual
C_1	22520 Ns/m	17518 Ns/m	- 22,21%
C_2	22520 Ns/m	20687 Ns/m	- 8,14%
C_3	22520 Ns/m	22882 Ns/m	+ 1,61%
C_4	22520 Ns/m	22785 Ns/m	+ 1,18%
C_5	22520 Ns/m	22646 Ns/m	+ 0,56%

Fica evidente ao comparar os dados da TAB. 6.2 com a FIG. 6.1 que o método funcionou de tal forma que a maior variação de valor ocorrida foi justamente no primeiro amortecedor, cuja ação é responsável pelo pico máximo de *bounce* no projeto do M113. A maior redução no coeficiente de amortecimento implica em uma menor força sendo aplicada no chassi (E.Q. 2.1), justificando a diminuição do maior pico de *bounce* quando o primeiro eixo passa pelo obstáculo. Com exceção desse e do segundo amortecedor, a variação dos demais foi pouco influente no novo comportamento.

Entretanto, ao analisarmos a FIG. 6.2, nota-se um comportamento peculiar da redução da função objetivo, que mostra que o método operou como esperado, reduzindo a mesma a cada iteração até atender um dos critérios de parada. Mas, sua convergência se deu de tal modo que acarretou na formação de níveis de redução bem distintas em alguns intervalos de iteração.

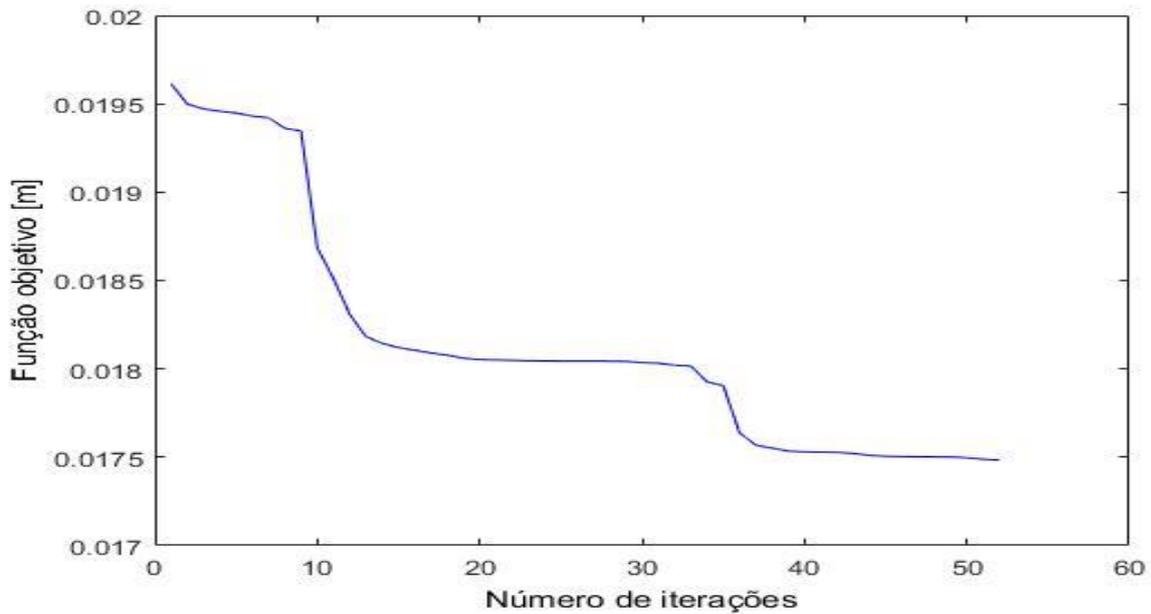


Figura 6.2 – Evolução da função objetivo para a simulação de ½ carro com $x = [C_i \ \beta]$

O método utilizado é de pontos interiores onde uma vez escolhido um x_0 dentro da região viável, ele irá convergir a cada iteração fornecendo um ponto x seguinte viável também. Assumindo x^* como sendo o ponto que é a solução do problema pode-se afirmar que $f(x^*) < f(x)$ para qualquer $x \in R^n$, ou seja, para todo o domínio de f , x^* irá prover o menor valor da própria f . Contudo, se não houver como afirmar que x_0 está em uma região desse domínio onde o mínimo de f é um mínimo global, o programa pode convergir e gerar um resultado de mínimo local. Esse comportamento é similar ao reportado por YOKOYAMA & SUZUKI (2005) e AL-KAZEMI & MOHAN (2002) ao tratarem de problemas de otimização de trajetória, cujo comportamento da função objetivo é sensível às condições iniciais.

A deparar-se com um ponto viável, cujas normas da direção de descida e/ou do lagrangeano sejam pequenos, mas não o suficiente para atender o critério de parada, mais um ponto é gerado no intuito de se reduzir a função. As FIG. 6.3 e FIG. 6.4 mostram esse comportamento do método, onde na ausência da conformidade dos critérios, ele gera uma nova direção, mesmo sendo maior do que a anterior, garantindo a redução da função até sua parada.

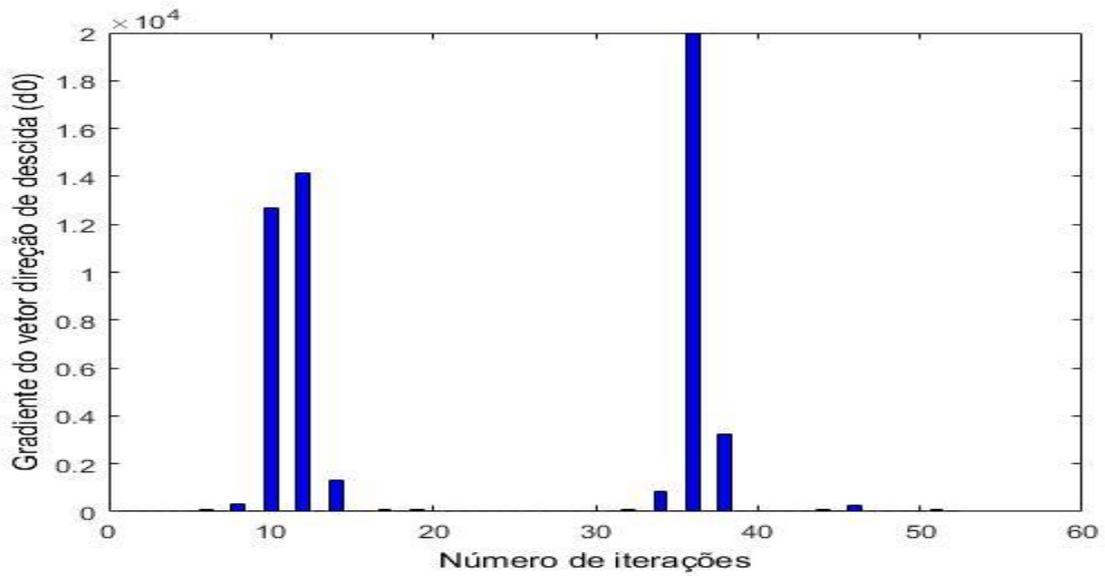


Figura 6.3 – Evolução do gradiente da direção para a simulação de ½ carro com $x = [C_i \ \beta]$.

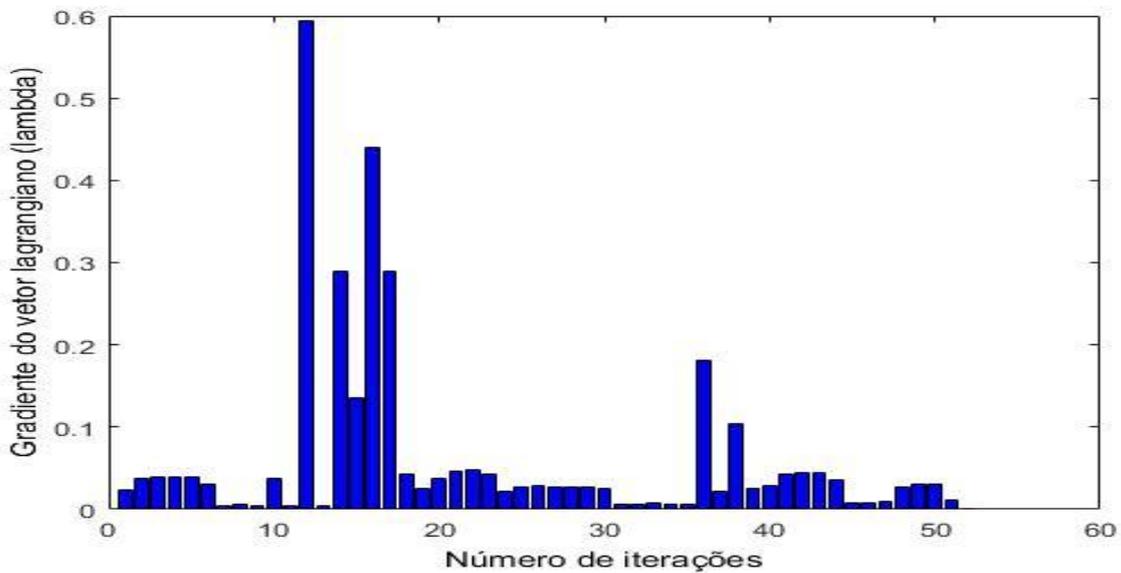


Figura 6.4 – Evolução do gradiente do vetor lagrangeano para a simulação de ½ carro com $x = [C_i \ \beta]$.

Uma analogia que explicita bem esse comportamento pode ser feita por meio do estudo das curvas de níveis do problema. Em problemas de até três variáveis de

projeto, é possível gerar um gráfico 2-D ou 3-D que represente as diferentes combinações de variáveis que resulte em um mesmo valor da função avaliada. A simulação realizada tem cinco variáveis de projeto mais uma auxiliar, impossibilitando a geração de tais gráficos.

Ao trabalhar com uma parcela do domínio estabelecido, mais limitado, $f(x)$ iria convergir para esse mesmo ponto, seja ele um ponto de mínimo global ou não. Do contrário, uma nova direção de descida será gerada para uma curva de nível abaixo da anterior, evitando um caso em que se fique restrito ao mínimo local.

Uma segunda simulação é feita, mas admitindo além dos coeficientes de amortecimento, os coeficientes de elasticidade das molas do veículo. As restrições se mantem as mesmas. Os parâmetros iniciais admitidos encontram-se na TAB 6.3 e resultado obtido encontra-se na FIG. 6.5.

Tabela 6.3 – Valores iniciais para simulação de ½ carro com $x = [C_i \ K_i \ \beta]$

Parâmetros	Valor Inicial	Valor Máximo	Valor Mínimo
Coeficiente de Amortecimento (C_i)	22520 Ns/m	30000 Ns/m	1000 N/m
Coeficiente de Rigidez (K_i)	104000 N/m	145000 N/m	10000 N/m
Pico de <i>Bounce</i> inicial (β_0)	2×10^{-2} m	1×10^{-1} m	5×10^{-3} m

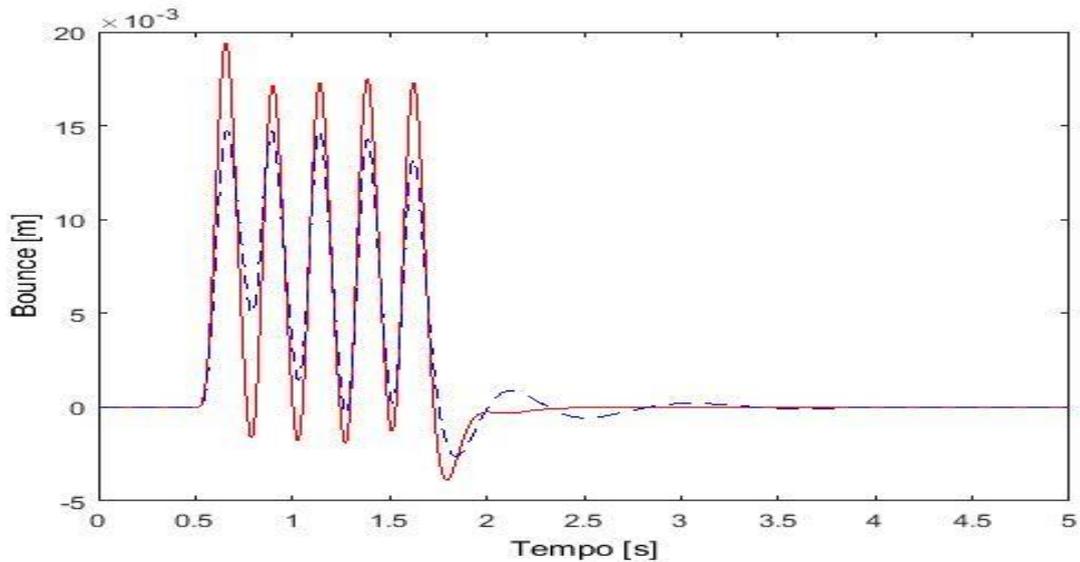


Figura 6.5 – Bounce com $x_0(C_i, K_i, \beta)$. (ATA – contínuo, Simulação – tracejado).

Da mesma forma como ocorreu na primeira simulação, esta também foi efetiva na minimização do bounce, apresentando um valor máximo de $1,47 \times 10^{-2}$ m; o que representa uma redução aproximada de 25% ante o original. O tempo para convergência foi de 52 minutos e 23 segundos.

Entretanto, observa-se que após a passagem do último eixo há uma pequena oscilação do *bounce* aos 2 segundos da simulação. Uma explicação para este comportamento pode ser dada ao se analisar o amortecimento modal do sistema, onde a frequência de oscilação do sistema de cada corpo rígido é avaliada (RAO, 2009).

Os valores dos novos parâmetros de projeto, juntamente com a variação percentual em relação aos dados originais são mostradas na TAB. 6.4.

TAB 6.4 – Resultados da simulação de ½ carro com $x = [C_i \ K_i \ \beta]$

Parâmetros	Valor Inicial	Valor Final	Variação Percentual
C_1	22520 Ns/m	17518 Ns/m	- 22,21%
C_2	22520 Ns/m	20687 Ns/m	- 8,14%
C_3	22520 Ns/m	22882 Ns/m	+ 1,61%
C_4	22520 Ns/m	22785 Ns/m	+ 1,18%
C_5	22520 Ns/m	22646 Ns/m	+ 0,56%
K_1	104000 N/m	107108 N/m	+ 2,99%
K_2	104000 N/m	103952 N/m	- 0,05%
K_3	104000 N/m	104143 N/m	+ 0,14%
K_4	104000 N/m	103879 N/m	- 0,12%
K_5	104000 N/m	103675 N/m	- 0,31%

Similar aos resultados da primeira simulação, os expressos na TAB. 6.4 também resultaram em uma maior variação dos valores dos coeficientes do par amortecedor/mola do primeiro eixo, apesar da redução dos coeficientes das molas serem inferiores aos demais. Claro, sendo o amortecedor responsável pela dissipação de energia do sistema, era de se esperar que as maiores mudanças ocorreriam com seus coeficientes.

A evolução da função objetivo ao longo do processo iterativo é mostrada na FIG. 6.6.

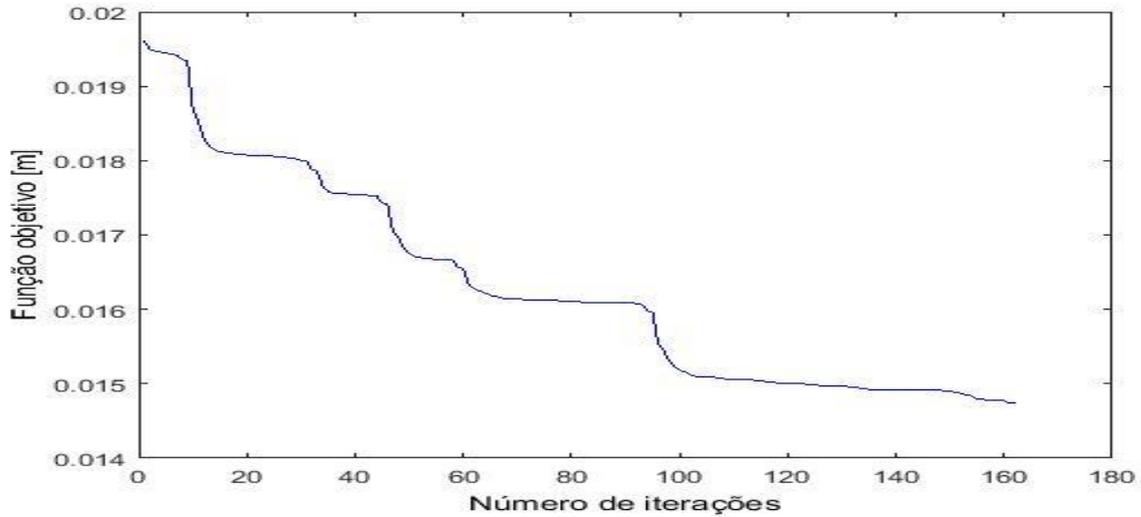


Figura 6.6 – Evolução da função objetivo para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro com $x = [C_i K_i \beta]$.

De forma análoga ao observado na FIG. 6.2, a redução da função objetivo apresenta um comportamento que caracteriza o problema como sensível às condições iniciais impostas YOKOYAMA & SUZUKI (2005) e AL-KAZEMI & MOHAN (2002). As normas da direção de descida e do vetor lagrangeano ao longo do processo iterativo são mostradas nas FIG. 6.7 e FIG. 6.8.

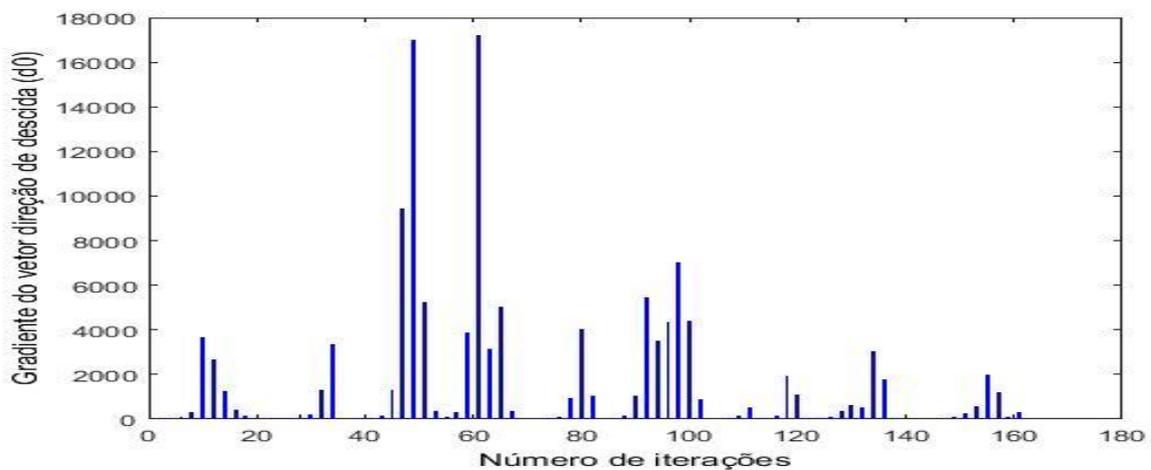


Figura 6.7 – Evolução do gradiente da direção para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro com $x = [C_i K_i \beta]$.

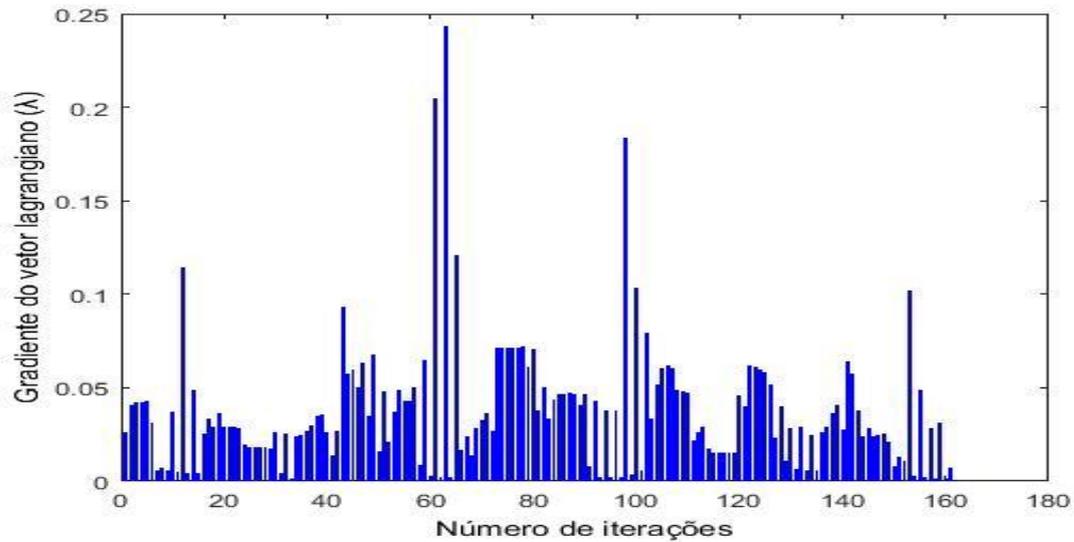


Figura 6.8 – Evolução do vetor lagrangeano para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro com $x = [C_i K_i \beta]$.

Observa-se na FIG. 6.7 que as maiores variações da norma da direção de descida ocorrem nas iterações onde há a mudança na redução da função objetivo. O mesmo fenômeno é observado na FIG. 6.2, corroborando com a hipótese de que as direções de descida calculadas dão origem a um ponto situado em uma região de mínimos locais.

Por fim, uma última simulação de $\frac{1}{2}$ carro é feita, mas incluindo também as restrições de *pitch* ao problema de otimização. Os valores iniciais são os mesmos descritos na TAB. 6.3 e o resultado é mostrado na FIG. 6.9.

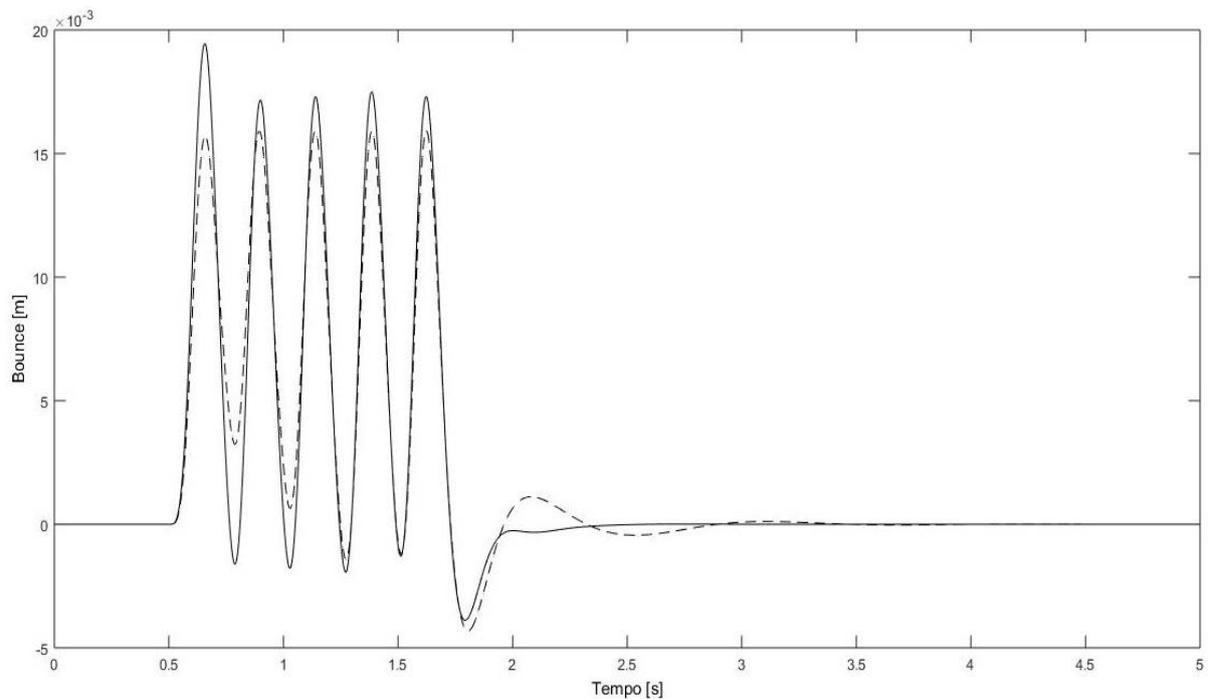


Figura 6.9 – *Bounce* com $x_0(C_i, K_i, \beta)$ e restrições de *pitch*. (ATA – contínuo, Simulação – tracejado).

O valor máximo de *bounce* registrado na simulação foi de $1,59 \times 10^{-2}$ m, enquanto a original foi de $1,94 \times 10^{-2}$ m implicando em uma redução de 18% do deslocamento em relação ao projeto original. O tempo para convergência foi de 1 hora e 34 minutos. Similar ao observado na FIG. 6.5, a nova curva de *bounce* obtida sugere que o fator de amortecimento deste também seja inferior ao do sistema dinâmico original.

Os valores dos novos parâmetros de projeto, juntamente com a variação percentual em relação aos dados originais podem ser vistos na TAB. 6.5.

TAB. 6.5 – Resultados da simulação de $\frac{1}{2}$ carro e restrições de *pitch* com $x = [C_i$
 $K_i \beta]$

Parâmetros	Valor Inicial	Valor Final	Variação Percentual
C_1	22520 Ns/m	12856 Ns/m	- 42,91%
C_2	22520 Ns/m	15344 Ns/m	- 31,87%
C_3	22520 Ns/m	19086 Ns/m	-15,25%
C_4	22520 Ns/m	21123 Ns/m	- 6,20%
C_5	22520 Ns/m	21368 Ns/m	- 5,11%
K_1	104000 N/m	103634 N/m	- 0,35%
K_2	104000 N/m	104059 N/m	+ 0,06%
K_3	104000 N/m	104170 N/m	+ 0,16%
K_4	104000 N/m	104016 N/m	+ 0,02%
K_5	104000 N/m	103695 N/m	- 0,33%

Os resultados obtidos nessa última simulação são os mais completos para a modelagem de $\frac{1}{2}$ carro, ao considerar a proposta do trabalho. Apesar da redução do pico de *bounce* aqui ser menor do que a avaliada na FIG. 6.5, a formulação deste problema de otimização difere dos demais, havendo o acréscimo das restrições de *pitch* também. Portanto, essa é tida como a mais realista, dadas as simplificações e hipóteses realizadas até esse momento.

A evolução da função objetivo é apresentada na FIG. 6.10, cujo comportamento segue o mesmo observado nas FIG. 6.2 e FIG. 6.6.

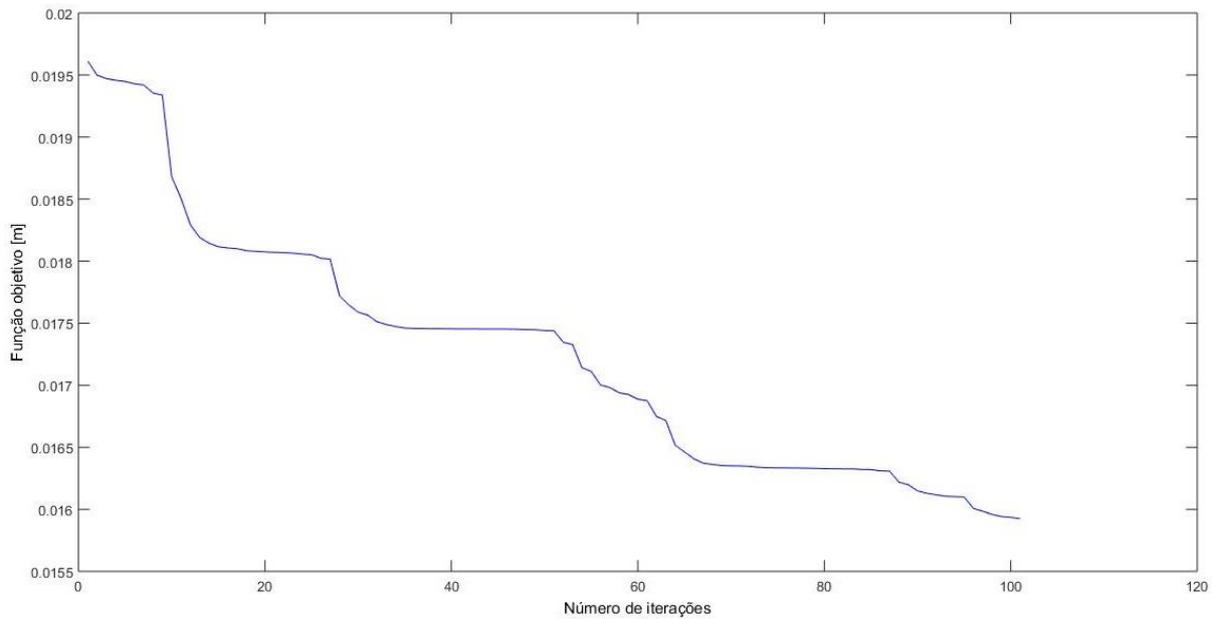


Figura 6.10 – Evolução da função objetivo para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro e restrição de *pitch* com $x = [C_i \ K_i \ \beta]$.

Similar as simulações anteriores, aqui também é observada as mudanças na redução da função objetivo nas iterações onde ocorrem as maiores variações da norma da direção de descida, conforme observado na FIG. 6.11.

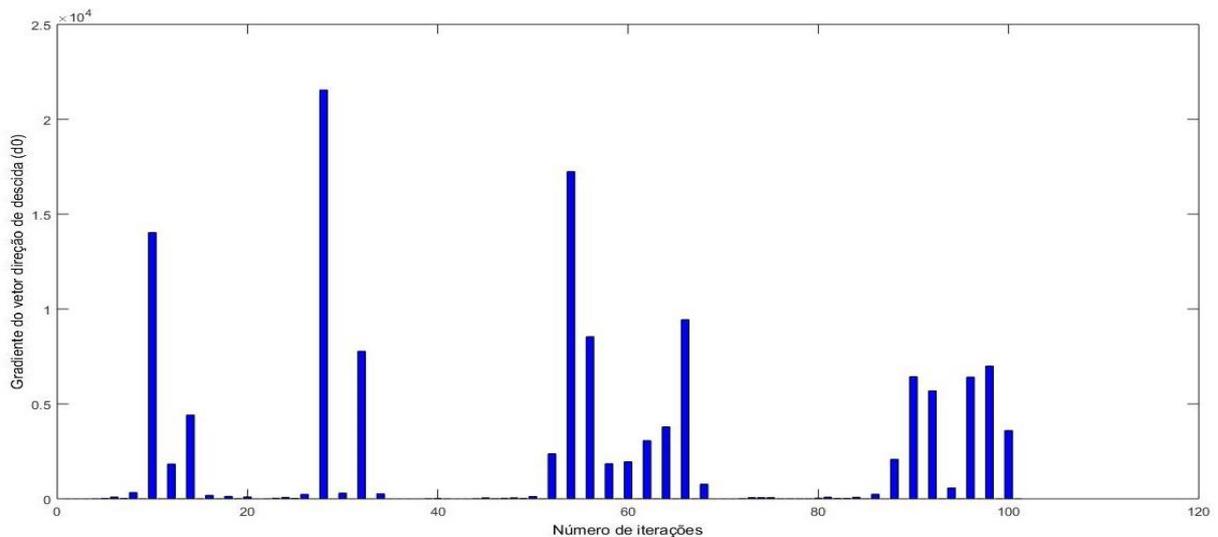


Figura 6.11 – Evolução da norma da direção para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro e restrição de *pitch* com $x = [C_i \ K_i \ \beta]$.

Por fim, a evolução do lagrangeano ao longo do processo iterativo é mostrada na FIG. 6.12.

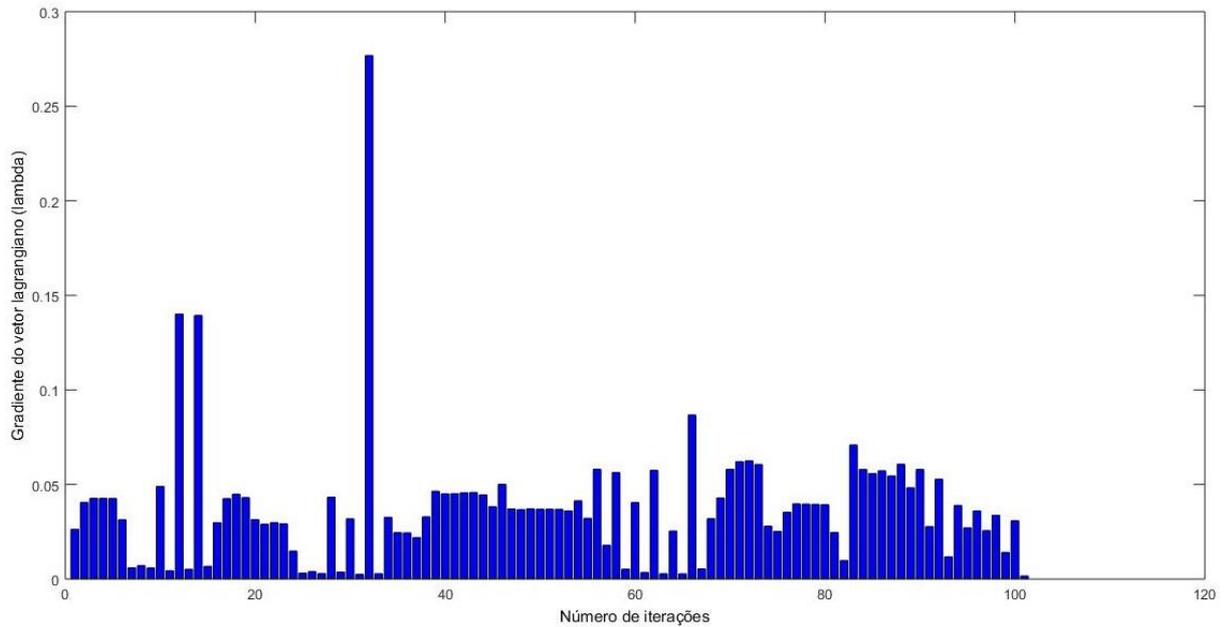


Figura 6.12 – Evolução da norma do vetor lagrangeano para a simulação de $\frac{1}{2}$ carro e restrição de *pitch* com $x = [C_i \ K_i \ \beta]$.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O trabalho desenvolvido aqui teve como objetivo a minimização da curva de *bounce* restrito as suas outras curvas dinâmicas. Para tal, adotou-se modelos matemáticos que descrevessem a dinâmica vertical de um veículo, considerando um sistema de suspensão passiva. Os parâmetros tidos como de projeto foram os coeficientes de rigidez e de amortecimento da mesma. Além disso, o mesmo visou a utilização do método de pontos interiores FDIPA, como uma forma de mostrar uma alternativa aos métodos comumente utilizados.

Os resultados obtidos por meio da modelagem de $\frac{1}{2}$ carro se mostraram satisfatórias ao que foi proposto. Os valores máximos de *bounce* de cada uma das simulações foi efetivamente reduzido em relação aos obtidos com os parâmetros originais do M113. Uma vez que o código que descreve as equações de movimento do veículo foi validado, a rotina de otimização e os novos parâmetros entregues puderam comprovar a eficácia do método utilizado. O uso de um veículo com cinco eixos mostrou que trabalhos como esse não são restritos a veículos de passeio convencionais.

A principal contribuição da tese é a utilização da metodologia de pontos interiores nos problemas de otimização de trajetória sujeita a restrições. Como pode ser visto no Capítulo 1, há um campo amplo de estudo que trata de problemas dessa natureza e o FDIPA vai de encontro com as necessidades dessa área. É descrito no Capítulo 4 que sua solução é obtida pela resolução de dois sistemas matriciais, cuja direção de descida viável é calculada com base na combinação desses dois resultados. Essa garantia de que o processo iterativo originará pontos que satisfaçam todas as restrições demandadas tornam o método uma ferramenta adequada para esse trabalho. Portanto, o uso dessa metodologia para outros problemas de otimização, como o de controle ótimo, é promissor.

As figuras que descrevem a evolução da função objetivo mostram que há espaço para a utilização de um método em paralelo para a determinação de um ponto inicial viável, conforme observado em outros trabalhos (YOKOYAMA & SUZUKI, 2005 e AL-KAZEMI & MOHAN, 2002). Isso serviria para acelerar o processo de convergência e evitaria as oscilações por regiões de possíveis pontos de mínimos locais

O problema de otimização foi formulado de modo a utilizar uma função que assume o valor máximo de *bounce* obtido pelas equações de movimento do sistema. Essa trajetória, assim como a de *pitch*, é discretizada e compõe as restrições empregadas no método proposto. Embora o objetivo tenha sido concluído, foi observado uma variação no comportamento dinâmico relativo a mudança no fator de

amortecimento do sistema. Para trabalhos futuros, o uso de restrições de trajetória aliadas às funções que descrevam a vibração do sistema proposto é sugerido.

Os gradientes das funções utilizadas na tese foram calculados por diferenças finitas. Uma sugestão para complementar trabalhos futuros é a resolução pelas derivadas analíticas do problema caso possam ser extraídas. A desvinculação do sistema pode ser feita por uma análise de autovalores e autovetores. Assim é possível realizar uma comparação com os resultados da aproximação numérica.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AL-KAZEMI, Buthainah; MOHAN, Chilukuri K. Multi-phase generalization of the particle swarm optimization algorithm. In: **Evolutionary Computation, 2002. CEC'02. Proceedings of the 2002 Congress on.** IEEE, 2002. p. 489-494.
- ATA, W. G.; OYADIJI, S. O. An investigation into the effect of suspension configurations on the performance of tracked vehicles traversing bump terrains. **Vehicle System Dynamics**, v. 52, n. 7, p. 969-991, 2014.
- BAUMAL, A. E.; MCPHEE, J. J.; CALAMAI, P. H. Application of genetic algorithms to the design optimization of an active vehicle suspension system. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 163, n. 1-4, p. 87-94, 1998.
- BETTS, John T. Survey of numerical methods for trajectory optimization. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 21, n. 2, p. 193-207, 1998.
- BETTS, John T.; HUFFMAN, William P. Path-constrained trajectory optimization using sparse sequential quadratic programming. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 16, n. 1, p. 59-68, 1993.
- BIEGLER, Lorenz T. An overview of simultaneous strategies for dynamic optimization. **Chemical Engineering and Processing: Process Intensification**, v. 46, n. 11, p. 1043-1053, 2007.
- CARVALHO, MICHELLE SORAIA DE Estimativa de suspensões passivas de veículos militares empregando um modelo de $\frac{1}{2}$ carro - Rio de Janeiro: **Instituto Militar de Engenharia**, 2015.
- DARUS, Rosheila; SAM, Yahaya Md. Modeling and control active suspension system for a full car model. In: **Signal Processing & Its Applications, 2009. CSPA 2009. 5th International Colloquium on.** IEEE, 2009. p. 13-18.
- DIEGUEZ, José Paulo P. Métodos de cálculo numérico. Fundação Ricardo Franco. Rio de Janeiro, Brazil: **Instituto Militar de Engenharia**. Coleção Disseminar, 2005.

- GILLESPIE, Thomas D. Fundamentals of Vehicle Dynamics. Warrendale, PA: **Society of Automotive Engineers**. 1992.
- HACÍ, A. Suspension optimization of a 2-DOF vehicle model using a stochastic optimal control technique. **Journal of sound and vibration**, v. 100, n. 3, p. 343-357, 1985.
- HARGRAVES, Charles R.; PARIS, Stephen W. Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 10, n. 4, p. 338-342, 1987.
- HERSKOVITS, José. Feasible direction interior-point technique for nonlinear optimization. **Journal of optimization theory and applications**, v. 99, n. 1, p. 121-146, 1998.
- IKENAGA, Scott et al. Active suspension control of ground vehicle based on a full-vehicle model. In: **American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000**. IEEE, 2000. p. 4019-4024.
- JAZAR, Reza N. **Vehicle dynamics: theory and application**. Springer, 2017.
- KRTOLICA, R.; HROVAT, D. Optimal active suspension control based on a half-car model. In: **Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on**. IEEE, 1990. p. 2238-2243.
- Peralta, A O et al.; Ride Comfort Analysis of an AWD Vehicle Travelling on Different Types of Pavements; **Society of Automotive Engineers**.
- POWELL, Michael JD. The convergence of variable metric methods for nonlinearly constrained optimization calculations. In: **Nonlinear programming 3**. 1978. p. 27-63.
- VALÁŠEK, Michael et al. Development of semi-active road-friendly truck suspensions. **Control Engineering Practice**, v. 6, n. 6, p. 735-744, 1998.
- YOKOYAMA, Nobuhiro; SUZUKI, Shinji. Modified genetic algorithm for constrained trajectory optimization. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 28, n. 1, p. 139-144, 2005.

ANEXO

prob_opt

```
%%Instituto Militar de Engenharia - IME
%%Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
%%Seção de Ensino 4 - SE4
%%Orientando: André da Silva Moraes
%%Orientador: José Herskovits Norman
%%Programa: Otimização de trajetória vertical veicular
%%Data de criação: dd/mm/aaaa
%%Data da última modificação: dd/mm/aaaa
%%Descrição: Programa criado para defesa de tese de mestrado

clc;
clear;
format longG

nrodas=5; %%número de rodas
mb=5109; %%kg - massa do chassi
Iy=12856; %%kg*m2 - momento de inércia do chassi em relação ao CG

L(1)=1.35; %%m - posição do ponto de fixação da suspensão 1 no chassi em
relação ao CG
L(2)=0.69; %%m - posição do ponto de fixação da suspensão 2 no chassi em
relação ao CG
L(3)=0.02; %%m - posição do ponto de fixação da suspensão 3 no chassi em
relação ao CG
L(4)=-0.66; %%m - posição do ponto de fixação da suspensão 4 no chassi em
relação ao CG
L(5)=-1.32; %%m - posição do ponto de fixação da suspensão 5 no chassi em
relação ao CG

V=10/3.6; %%m/s - velocidade do carro

td(1)=0; %%s - delay entre a aplicação do deslocamento na roda 1 e 1
td(2)=(L(1)-L(2))/V; %%s - delay entre a aplicação do deslocamento na roda 1
e 2
td(3)=(L(1)-L(3))/V; %%s - delay entre a aplicação do deslocamento na roda 1
e 3
td(4)=(L(1)-L(4))/V; %%s - delay entre a aplicação do deslocamento na roda 1
e 4
td(5)=(L(1)-L(5))/V; %%s - delay entre a aplicação do deslocamento na roda 1
e 5

for i=1:1:nrodas
    mw(i)=113.5; %%kg - massa da roda i
    kapas(i)=104000; %%N/m - constante de rigidez da mola da suspensão i
    Cs(i)=22520; %%N*s/m - coeficiente de amortecimento da suspensão i
    kapaw(i)=613000; %%N/m - constante de rigidez do pneu i
end

nequacao=2*nrodas+4;
yn(1:nequacao)=0;

xn=0; %%ponto de início da integração
xmax=5; %%ponto final de integração

iutil=[nrodas nequacao]; %%vetor dos inteiros utilizados
rutil=[mb Iy L mw kapas xn xmax h yn V td]; %%vetor dos reais utilizados
```

```

nvar=11; %%número de variáveis
ncstr= (xmax-xn)/h; %%número de restrições (exceto dos tipo caixa)

z0=0.02; %%m - variavel auxiliar BETA
x0 = [Cs(1); Cs(2); Cs(3); Cs(4); Cs(5); kapas(1); kapas(2); kapas(3);
kapas(4); kapas(5); z0]; %%ponto inicial
vlb = [1000 1000 1000 1000 1000 10000 10000 10000 10000 10000 0.005];
%%limite inferior das restrições
vub = [30000 30000 30000 30000 30000 145000 145000 145000 145000 145000
0.1]; %%limite superior das restrições

lvlb=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]; %%contabiliza limite inferior
lvub=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]; %%contabiliza limite superior

fun='fun_opt'; %%computa a função objetivo e as funções restritivas
gfun='gfunXX'; ; %%computa o gradiente da função objetivo e das funções
restritivas

[data,idata]=fdata; %%controle dos parâmetros do método

[x,f,g,lambda0,mu0,counter] = faipa(fun,gfun,x0,vlb,vub,nvar,ncstr
, lvlb,lvub,data,idata,iutil,rutil);

```

fun_opt

```
function [f,g]=fun_opt(x,indf,indg,iutil,rutil)

nvar = length(x);

f=[];g=[];

if indf==1
    f=x(nvar);
end

Cs(1)=x(1);
Cs(2)=x(2);
Cs(3)=x(3);
Cs(4)=x(4);
Cs(5)=x(5);
kapas(1)=x(6);
kapas(2)=x(7);
kapas(3)=x(8);
kapas(4)=x(9);
kapas(5)=x(10);

nrodas=iutil(1);
nequacao=iutil(2);
mb=rutil(1);
Iy=rutil(2);
L=rutil(3:7);
mw=rutil(8:12);
kapaw=rutil(13:17);
xn=rutil(18);
xmax=rutil(19);
h=rutil(20);
yn=rutil(21:21+nequacao-1);
V=rutil(21+nequacao);
td=rutil(21+nequacao+1:21+nequacao+nrodas);
sol=zeros(5000,nequacao)';

sol=sol_opt(nrodas,L,Cs,kapas,kapaw,h,xn,xmax,yn,V,td,mb,Iy,mw);%%solução
da dinâmica vertical

g =-x(nvar) + sol(1:5000,1)';
```

sol_opt

```
function valor=sol_opt(nrodas,L,Cs,kapas,kapaw,h,xn,xmax,yn,V,td,mb,Iy,mw)
```

```
contador=1; %%contador usado para criar os vetores de saída de dados
```

```
C=zeros(nrodas+2,nrodas+2);
```

```
K=zeros(nrodas+2,nrodas+2);
```

```
M=[mb Iy mw(1) mw(2) mw(3) mw(4) mw(5)];
```

```
M=diag(M);
```

```
C(1,1)=0;
```

```
C(1,2)=0;
```

```
C(2,2)=0;
```

```
for i=1:1:nrodas
```

```
    C(1,1)=C(1,1)+Cs(i);
```

```
    C(1,2)=C(1,2)+(L(i)*Cs(i));
```

```
    C(2,2)=C(2,2)+((L(i)^2)*Cs(i));
```

```
end
```

```
C(2,1)=C(1,2);
```

```
for i=3:1:nrodas+2
```

```
    C(1,i)=-Cs(i-2);
```

```
    C(i,1)=C(1,i);
```

```
    C(2,i)=-L(i-2)*Cs(i-2);
```

```
    C(i,2)=C(2,i);
```

```
    C(i,i)=Cs(i-2);
```

```
end
```

```
K(1,1)=0;
```

```
K(1,2)=0;
```

```
K(2,2)=0;
```

```
for i=1:1:nrodas
```

```
    K(1,1)=K(1,1)+kapas(i);
```

```
    K(1,2)=K(1,2)+(L(i)*kapas(i));
```

```
    K(2,2)=K(2,2)+((L(i)^2)*kapas(i));
```

```
end
```

```
K(2,1)=K(1,2);
```

```
for i=3:1:nrodas+2
```

```
    K(1,i)=-kapas(i-2);
```

```
    K(i,1)=K(1,i);
```

```
    K(2,i)=-L(i-2)*kapas(i-2);
```

```
    K(i,2)=K(2,i);
```

```
    K(i,i)=kapas(i-2)+kapaw(i-2);
```

```
end
```

```
z=zeros(nrodas+2,1);
```

```
dz=zeros(nrodas+2,1);
```

```
r=zeros(nrodas+2,1);
```

```
while xn<=xmax
```

```

w=road_opt(xn,V,td,kapaw,nrodas)
r(3:nrodas+2,1)=w;
k1=h*dz;
d2z=M\(-C*dz-K*z+r);
l1=h*d2z;
k2=h*(dz+l1/2);
w=road_opt(xn+h/2,V,td,kapaw,nrodas);
r(3:nrodas+2,1)=w;
d2z=M\(-C*(dz+l1/2)-K*(z+k1/2)+r);
l2=h*d2z;
k3=h*(dz+l2/2);
w=road_opt(xn+h/2,V,td,kapaw,nrodas);
r(3:nrodas+2,1)=w;
d2z=M\(-C*(dz+l2/2)-K*(z+k2/2)+r);
l3=h*d2z;
k4=h*(dz+l3);
w=road_opt(xn+h,V,td,kapaw,nrodas);
r(3:nrodas+2,1)=w;
d2z=M\(-C*(dz+l3)-K*(z+k3)+r);
l4=h*d2z;
z=z+(k1+2*(k2+k3)+k4)/6;
dz=dz+(l1+2*(l2+l3)+l4)/6;
w=road_opt(xn,V,td,kapaw,nrodas);
r(3:nrodas+2,1)=w;

yn(1)=z(1);
yn(2)=dz(1);
yn(3)=z(2);
yn(4)=dz(2);
yn(5)=z(3);
yn(6)=dz(3);
yn(7)=z(4);
yn(8)=dz(4);
yn(9)=z(5);
yn(10)=dz(5);
yn(11)=z(6);
yn(12)=dz(6);
yn(13)=z(7);
yn(14)=dz(7);

xn=xn+h;

%%preparação de vetoes para a saída de dados
posicao(contador)=xn;

valor(contador,:)=yn(:)';

aceleracao_bounce(contador) =d2z(1);

aceleracao_angular(contador)=d2z(2);

contador=contador+1;

rm(contador,:)=r(:)';

zm(contador,:)=z(:)';
end

```

road_opt

```
function wroad=road_opt(xn,V,td,kapaw,nrodas)

hl=0.1;%%m - altura da lombada
wl=0.5;%%m - largura da lombada
fr=V/wl;%%Hz - frequência de passagem pela lombada
wr=2*pi*fr;%%rad/s - frequência de passagem pela lombada

wroad=zeros(nrodas,1);

for i=1:1:nrodas
    if xn>=0.5+td(i) && xn<=0.5+td(i)+(1/fr)
        wroad(i)=0.5*hl*kapaw(i)*(1-cos(wr*(xn-td(i)-0.5)));
    end
end
```