

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

TC ANDRÉ LOUZADA MOREIRA

**METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO DE MODELOS EM ESCALA DE
VEÍCULOS MILITARES**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências em Engenharia de Defesa.

Orientadores: Jorge Audrin Morgado de Gois - Dr.- Ing.

Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE.

Rio de Janeiro

2011

C2011

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80- Praia Vermelha

Rio de Janeiro – RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmар ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários ou citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e dos orientadores.

623.6 Moreira, André Louzada.
L892

Metodologia de Avaliação de Modelos em Escala de Veículos Militares / André Louzada Moreira – Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2011.

224 p.:il,graf,tab.

Tese de doutorado – Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2011

1. Veículos militares. 2. Veículos a motor. 3. Dinâmica

I. Título II. Instituto Militar de Engenharia

CDD 623.6

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

TC ANDRÉ LOUZADA MOREIRA

**METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO DE MODELOS EM ESCALA DE
VEÍCULOS MILITARES**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências em Engenharia de Defesa.

Orientadores: Jorge Audrin Morgado de Gois - Dr. Ing.

Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE.

Aprovada em 11 de fevereiro de 2011 pela seguinte Banca Examinadora:

Jorge Audrin Morgado de Gois, Dr. - Ing. Do IME – Presidente

Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE. Do IME

Mauro Speranza Neto, D.Sc. da PUC/RJ

Fernando Ribeiro da Silva, D.Sc. do IME

Carlos Magluta, D.Sc. da UFRJ

Alessandro Jacoud Peixoto, D.Sc. da UFRJ

Rio de Janeiro

2011

À minha filha, à minha esposa, aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

A Deus, Pai de Bondade e Misericórdia, que nos concede graças abundantemente, e que me conduziu até aqui em minha vida. Aos meus Pais, Bertoldo e Maria José, pelo amor, dedicação e exemplo. À minha esposa, Solange, pelo amor, compreensão e apoio. À nossa filha Isabel, por todo o amor e inspiração com que Deus me abençoa em seus sorrisos e brincadeiras.

Ao Prof. Archibald Joseph Macintyre (in memoriam), pelo amor com que ensinava.

Ao Prof. Clódio Alberto Pastro Sarzeto, pela amizade e por suas proveitosas lições de dinâmica.

Ao Prof. Fernando Ribeiro da Silva, meu orientador de mestrado, pelo incentivo e apoio. Ao Maj Jorge Audrin Morgado de Gois, meu orientador neste trabalho, por ter assumido a tarefa de me orientar e ter acreditado que eu seria capaz de concluir o curso com êxito. Ao TC Paulo Cesar Pellanda, meu orientador neste trabalho, pelas longas horas dedicadas a ouvir minhas colocações, e por suas proveitosas intervenções. Ao Prof. Mauro Speranza Neto, por ter disponibilizado sua cópia da dissertação de mestrado sob sua orientação que foi o ponto de partida para o presente trabalho. Ao TC Ricardo Eiji Hamaoka, meu chefe de Seção no IME, pelo apoio e amizade. Aos amigos Jorge, David, Simões e Leonardo, pelo auxílio em assuntos em que têm mais experiência que eu. Ao amigo Luiz Paulo Gomes Ribeiro, por seu constante incentivo. A todos os companheiros de curso de pós-graduação no IME, pelo apoio e amizade. A todos os integrantes do IME, que com sua dedicação fazem as coisas acontecerem por aqui. Aos professores civis e militares que acreditaram no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa no IME e trabalharam incansavelmente por sua implementação e reconhecimento junto à CAPES.

“Entrega o teu caminho ao Senhor, confia Nele, e
o mais Ele fará.”

(Salmos 37 v.5)

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	10
LISTA DE TABELAS.....	14
LISTA DE SÍMBOLOS.....	16
1 INTRODUÇÃO.....	22
1.1 Motivação e apresentação do problema	22
1.2 Posicionamento do trabalho.....	23
1.3 Organização do trabalho.....	28
2 SIMILARIDADE NA DINÂMICA VERTICAL DE ¼ DE CARRO.....	32
2.1 Introdução	32
2.2 Determinação dos parâmetros π	33
2.3 Equação diferencial de movimento na forma adimensional	37
2.4 Vibração livre do modelo de ¼ de carro adimensional não amortecido	42
2.5 Vibração livre do modelo de ¼ de carro adimensional amortecido	44
2.6 Semelhança dos modelos físicos.....	46
2.7 Excitação de base.....	47
2.7.1 Degrau	48
2.7.2 Senoidal.....	50
2.7.3 Conclusão	53
2.8 Semelhança em ¼ de carro – Simulações e resultados.....	53
3 SIMILARIDADE NA DINÂMICA VERTICAL DE ¼ CARRO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE.....	75
3.1 Introdução	75
3.2 Equação diferencial de movimento na forma adimensional	76
3.3 Determinação dos parâmetros π	81
3.4 Semelhança de um quarto de carro com dois graus de liberdade – Simulações e resultados	83

4	MODELO DE ¼ DE CARRO COM UM GRAU DE LIBERDADE E SUSPENSÃO ATIVA	94
4.1	Introdução	94
4.2	Breve introdução sobre suspensão ativa	94
4.3	Modelo de ¼ de carro com um grau de liberdade e suspensão ativa	95
4.4	Semelhança em um quarto de carro com suspensão ativa – Simulações e resultados	100
5	OTIMIZAÇÃO DA SIMILARIDADE DINÂMICA INCOMPLETA – MÉTRICA RMS DO ERRO	106
5.1	Introdução	106
5.2	Idéia fundamental.....	106
5.3	Métrica	107
5.4	Otimização da similaridade dinâmica incompleta.....	109
5.5	Otimização do modelo de ¼ de carro com dois graus de liberdade – Simulações e resultados	110
5.6	Otimização híbrida da similaridade dinâmica incompleta.....	115
6	SIMILARIDADE NA DINÂMICA VERTICAL DO CARRO COM SETE GRAUS DE LIBERDADE	119
6.1	Introdução	119
6.2	Equação diferencial de movimento na forma adimensional	120
7	OTIMIZAÇÃO DA SIMILARIDADE DINÂMICA INCOMPLETA – MÉTRICA H_2 E H_∞	134
7.1	Introdução	134
7.2	Forma de estado das equações diferenciais adimensionais	134
7.3	Otimização da similaridade dinâmica incompleta – Métricas H_2 e H_∞	135
7.4	Norma H_2	136
7.5	Norma H_∞	137
7.6	Otimização da similaridade dinâmica incompleta.....	138
7.7	Sistema diferença	139
7.8	Simulações e resultados	143

8	CONSIDERAÇÕES SOBRE A METODOLOGIA PROPOSTA	164
8.1	Introdução	164
8.2	Critério intuitivo (Baseado na afirmativa de Brennan)	165
8.3	Adimensionalização da equação diferencial de governo.....	167
8.4	Metodologia proposta.....	168
8.5	Testes e resultados.....	169
8.6	Comparação dos critérios	173
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	177
9.1	Contribuição.....	177
9.2	Trabalhos futuros	178
10	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	180
11	APÊNDICES	182
11.1	APÊNDICE 1: SIMILARIDADE NA DINÂMICA VERTICAL DE ½ CARRO SIMÉTRICO – ESTUDO DE ROLL	183
11.2	APÊNDICE 2: SIMILARIDADE NA DINÂMICA VERTICAL DE ½ CARRO ASSIMÉTRICO – ESTUDO DE PITCH	200
11.3	APÊNDICE 3: MODELO DE ¼ DE CARRO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE E SUSPENSÃO ATIVA.....	211
11.4	APÊNDICE 4: PARÂMETROS π DO VEÍCULO COM SETE GRAUS DE LIBERDADE.....	219
11.5	APÊNDICE 5: ELEMENTOS DIFERENTES DE ZERO DAS MATRIZES DE ESTADO E ENTRADAS.....	223

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG. 2.1	Modelo de $\frac{1}{4}$ de carro	34
FIG. 2.2	Quarto de carro adimensional	41
FIG. 2.3	Análise de semelhança por meio da adimensionalização	54
FIG. 2.4	Deslocamento do protótipo	55
FIG. 2.5	Velocidade do protótipo.....	55
FIG. 2.6	Deslocamento do modelo em escala	56
FIG. 2.7	Velocidade do modelo em escala.....	57
FIG. 2.8	Deslocamento adimensional	60
FIG. 2.9	Velocidade adimensional	60
FIG. 2.10	Deslocamento do modelo em escala para diferentes valores de b	61
FIG. 2.11	Deslocamento do protótipo para diferentes valores de b	61
FIG. 2.12	Deslocamento adimensional para diferentes valores de π_4	62
FIG. 2.13	Previsão do comportamento de um protótipo a partir do comportamento de um modelo em escala	63
FIG. 2.14	Deslocamento do modelo em escala para cond. iniciais	64
FIG. 2.15	Velocidade do modelo em escala para cond. iniciais	64
FIG. 2.16	Deslocamento adimensional para cond. iniciais.....	65
FIG. 2.17	Velocidade adimensional para cond. iniciais	65
FIG. 2.18	Deslocamento do protótipo para cond. iniciais	66
FIG. 2.19	Velocidade do protótipo para cond. iniciais	66
FIG. 2.20	Deslocamento do modelo em escala para excit. base degrau	67
FIG. 2.21	Velocidade do modelo em escala para excit. base degrau.....	68
FIG. 2.22	Deslocamento adimensional para excit. base degrau	68
FIG. 2.23	Velocidade adimensional para excit. base degrau	69
FIG. 2.24	Deslocamento do protótipo para excit. base degrau	69
FIG. 2.25	Velocidade do protótipo para excit. base degrau	70
FIG. 2.26	Deslocamento do modelo em escala para excit. base senoidal	71
FIG. 2.27	Velocidade do modelo em escala para excit. base senoidal	71
FIG. 2.28	Deslocamento adimensional para excit. base senoidal	72
FIG. 2.29	Velocidade adimensional para excit. base senoidal	72
FIG. 2.30	Deslocamento do protótipo para excit. base senoidal	73

FIG. 2.31	Velocidade do protótipo para excit. base senoidal	73
FIG. 3.1	Modelo de $\frac{1}{4}$ carro com 2 DOF	76
FIG. 3.2	Previsão do comportamento do protótipo a partir do comportamento de um modelo em escala	84
FIG. 3.3	Deslocamento da massa suspensa do protótipo para cond. iniciais.....	86
FIG. 3.4	Velocidade da massa suspensa do protótipo para cond. iniciais.....	86
FIG. 3.5	Deslocamento do pneu do protótipo para cond. iniciais	87
FIG. 3.6	Velocidade do pneu do protótipo para cond. iniciais	87
FIG. 3.7	Deslocamento da massa susp. do prot. para excit. base degrau	88
FIG. 3.8	Velocidade da massa susp. do prot. para excit. base degrau	89
FIG. 3.9	Deslocamento do pneu do prot. para excit. base degrau	89
FIG. 3.10	Velocidade do pneu do prot. para excit. base degrau	90
FIG. 3.11	Deslocamento da massa susp. do prot. para excit. base senoidal	91
FIG. 3.12	Velocidade da massa susp. do prot. para excit. base senoidal	91
FIG. 3.13	Deslocamento do pneu do prot. para excit. base senoidal	92
FIG. 3.14	Velocidade do pneu do prot. para excit. base senoidal	92
FIG. 4.1	Modelo $\frac{1}{4}$ carro com 1 DOF com suspensão ativa.....	96
FIG. 4.2	Deslocamento para cond. iniciais com ganho zero	102
FIG. 4.3	Velocidade para cond. iniciais com ganho zero	102
FIG. 4.4	Deslocamento para cond. iniciais. Sistema em malha fechada.....	104
FIG. 4.5	Velocidade para cond. iniciais. Sistema em malha fechada	104
FIG. 5.1	Métrica RMS	107
FIG. 5.2	Modelo $\frac{1}{4}$ carro com 2 DOF	110
FIG. 5.3	Deslocamento adimensional - comparação.....	112
FIG. 5.4	Velocidade adimensional - comparação.....	113
FIG. 5.5	Deslocamento adimensional do pneu - comparação.....	113
FIG. 5.6	Velocidade adimensional do pneu - comparação.....	114
FIG. 5.7	Modelo de $\frac{1}{4}$ carro com 2 DOF e suspensão ativa.....	115
FIG. 5.8	Deslocamento adimensional dos modelos ótimo e péssimo	118

FIG. 6.1	Modelo de carro com 7 DOF	119
FIG. 7.1	Diagrama de blocos da diferença da saída dos sistemas	140
FIG. 7.2	Deslocamento vertical adimensional - otimização por norma H_2	147
FIG. 7.3	Velocidade vertical adimensional - otimização por norma H_2	147
FIG. 7.4	Velocidade angular adimensional em x - otimização por norma H_2	148
FIG. 7.5	Velocidade angular adimensional em y - otimização por norma H_2	148
FIG. 7.6	Ângulo de roll - otimização por norma H_2	149
FIG. 7.7	Ângulo de pitch - otimização por norma H_2	149
FIG. 7.8	Desloc. vert. pneu diant. esquerdo - otimização por norma H_2	150
FIG. 7.9	Veloc. vert. pneu diant. esquerdo - otimização por norma H_2	150
FIG. 7.10	Desloc. vert. pneu diant. direito - otimização por norma H_2	151
FIG. 7.11	Veloc. vert. pneu diant. direito - otimização por norma H_2	151
FIG. 7.12	Desloc. vert. pneu tras. esquerdo - otimização por norma H_2	152
FIG. 7.13	Veloc. vert. pneu tras. esquerdo - otimização por norma H_2	152
FIG. 7.14	Desloc. vert. pneu tras. direito - otimização por norma H_2	153
FIG. 7.15	Veloc. vert. pneu tras. direito - otimização por norma H_2	153
FIG. 7.16	Deslocamento vertical adimensional - otimização por norma H_∞	156
FIG. 7.17	Velocidade vertical adimensional - otimização por norma H_∞	156
FIG. 7.18	Velocidade angular adimensional em x - otimização por norma H_∞	157
FIG. 7.19	Velocidade angular adimensional em y - otimização por norma H_∞	157
FIG. 7.20	Ângulo de roll - otimização por norma H_∞	158
FIG. 7.21	Ângulo de pitch - otimização por norma H_∞	158
FIG. 7.22	Desloc. vert. pneu diant. esquerdo - otimização por norma H_∞	159
FIG. 7.23	Veloc. vert. pneu diant. esquerdo - otimização por norma H_∞	159
FIG. 7.24	Desloc. vert. pneu diant. direito - otimização por norma H_∞	160
FIG. 7.25	Veloc. vert. pneu diant. direito - otimização por norma H_∞	160
FIG. 7.26	Desloc. vert. pneu tras. esquerdo - otimização por norma H_∞	161
FIG. 7.27	Veloc. vert. pneu tras. esquerdo - otimização por norma H_∞	161
FIG. 7.28	Desloc. vert. pneu tras. direito - otimização por norma H_∞	162
FIG. 7.29	Veloc. vert. pneu tras. direito - otimização por norma H_∞	162
FIG. 8.1	Modelo de $\frac{1}{4}$ de carro	165
FIG. 8.2	Variação da norma H_2 em função da razão de π_4	174

FIG. 8.3	Varição da norma H_∞ em função da razão de π_4	175
FIG. 8.4	Comparativo das normas H_2 e H_∞ em função da razão π_4	176

LISTA DE TABELAS

TAB. 2.1	Parâmetros do protótipo.....	34
TAB. 2.2	Matriz dimensional dos parâmetros do protótipo.....	34
TAB. 2.3	Submatriz dimensional – Base mínima.....	35
TAB. 2.4	Parâmetros do protótipo.....	54
TAB. 2.5	Parâmetros do modelo em escala.....	54
TAB. 2.6	Sistema 1 - Parâmetros do modelo em escala.....	58
TAB. 2.7	Sistema 2 - Parâmetros do modelo em escala.....	58
TAB. 2.8	Sistema 3 - Parâmetros do modelo em escala.....	58
TAB. 2.9	Sistema 1 - Parâmetros do protótipo.....	58
TAB. 2.10	Sistema 2 - Parâmetros do protótipo.....	58
TAB. 2.11	Sistema 3 - Parâmetros do protótipo.....	59
TAB. 2.12	Comportamento do sistema de acordo com o valor de π_4	59
TAB. 3.1	Parâmetros do modelo em escala.....	85
TAB. 3.2	Parâmetros do protótipo.....	85
TAB. 3.3	Parâmetros π	85
TAB. 4.1	Parâmetros do protótipo para ganho zero.....	101
TAB. 4.2	Parâmetros do modelo em escala para ganho zero.....	101
TAB. 4.3	Parâmetros do protótipo.....	103
TAB. 4.4	Parâmetros do modelo em escala.....	103
TAB. 5.1	Valores dos parâmetros para otimização.....	111
TAB. 5.2	Resultados ótimo e péssimo.....	111
TAB. 5.3	Valores dos parâmetros do protótipo.....	116
TAB. 5.4	Valores dos parâmetros do modelo em escala.....	116
TAB. 5.5	Conjunto pesquisado de valores dos ganhos.....	117
TAB. 5.6	Valores ótimos e péssimos dos ganhos.....	117
TAB. 7.1	Parâmetros do protótipo.....	144

TAB. 7.2	Faixa de variação dos parâmetros do modelo em escala para otimização com norma H_2 e H_∞	145
TAB. 7.3	Resultados ótimo e péssimo para norma H_2	146
TAB. 7.4	Resultados ótimo e péssimo para norma H_∞	155
TAB. 8.1	Parâmetros do protótipo	167
TAB. 8.2	Parâmetros do primeiro modelo em escala	167
TAB. 8.3	Parâmetros do segundo modelo em escala	167
TAB. 8.4	Razões de parâmetros π	167
TAB. 8.5	Parâmetros do protótipo	169
TAB. 8.6	Parâmetros do primeiro modelo em escala	169
TAB. 8.7	Parâmetros do segundo modelo em escala	169
TAB. 8.8	Razões dos parâmetros π e norma H_2	170
TAB. 8.9	Parâmetros do protótipo	170
TAB. 8.10	Parâmetros do primeiro modelo em escala	170
TAB. 8.11	Parâmetros do segundo modelo em escala	171
TAB. 8.12	Razões dos parâmetros π e norma H_2	171
TAB. 8.13	Parâmetros do protótipo	171
TAB. 8.14	Parâmetros do primeiro modelo em escala	172
TAB. 8.15	Parâmetros do segundo modelo em escala	172
TAB. 8.16	Razões dos parâmetros π e norma H_2	172
TAB. 8.17	Parâmetros do protótipo	172
TAB. 8.18	Parâmetros do primeiro modelo em escala	172
TAB. 8.19	Parâmetros do segundo modelo em escala	172
TAB. 8.20	Razões dos parâmetros π e norma H_2	173

LISTA DE SÍMBOLOS

- ζ - fração de amortecimento
- ζ^* - fração de amortecimento adimensional
- ω_n - frequência natural
- ω_n^* - frequência natural adimensional
- T^* - período adimensional
- $\bar{\lambda}$ - maior autovalor
- ω_x - velocidade angular em x
- ω_y - velocidade angular em y
- ω_z - velocidade angular em z
- A** - matriz de estado
- \mathbf{a}_G - aceleração do centro de gravidade
- A_m - amplitude de excitação no modelo
- A_m^* - amplitude de excitação adimensional no modelo
- A_p - amplitude de excitação no protótipo
- A_p^* - amplitude de excitação adimensional no protótipo
- b - constante de amortecimento
- B** - matriz de entradas
- b_{eq} - amortecimento equivalente
- b_f - amortecimento dianteiro
- b_l - amortecimento esquerdo
- b_r - amortecimento direito
- b_r - amortecimento traseiro
- b_t - constante de amortecimento do pneu
- b_{tlf} - amortecimento do pneu dianteiro esquerdo
- b_{tlr} - amortecimento do pneu traseiro esquerdo
- b_{trf} - amortecimento do pneu dianteiro direito
- b_{trr} - amortecimento do pneu traseiro direito
- C** - matriz de saída
- cte - constante
- D** - matriz de transmissão direta

dz_r^*/dt^*	-	excitação de base adimensional (velocidade)
dz_r/dt	-	excitação de base (velocidade)
dz_{roadlf}^*/dt^*		excitação de base adimensional dianteiro esquerdo
dz_{roadlr}^*/dt^*		excitação de base adimensional traseiro esquerdo
dz_{roadrf}^*/dt^*		excitação de base adimensional dianteiro direito
dz_{roadrr}^*/dt^*		excitação de base adimensional traseiro direito
F	-	força
g	-	aceleração da gravidade
H_G	-	momento angular em relação ao centro de gravidade
I_G	-	tensor de inércia em relação a centro de gravidade
I_{ii}	-	momento de inércia em relação ao eixo i
I_{ij}	-	produto de inércia em relação ao plano ij
I_p	-	inércia polar de pitch ou de roll
J	-	funcional
K	-	matriz de ganho de realimentação de estado
k	-	rigidez de mola
k_{eq}	-	rigidez equivalente
k_f	-	rigidez dianteira
k_l	-	rigidez esquerda
k_r	-	rigidez direita
k_r	-	rigidez traseira
k_t	-	rigidez do pneu
k_{tlf}	-	rigidez do pneu dianteiro esquerdo
k_{tlr}	-	rigidez do pneu traseiro esquerdo
k_{trf}	-	rigidez do pneu dianteiro direito
k_{trr}	-	rigidez do pneu traseiro direito
L	-	dimensão comprimento
L₁	-	comprimento do veículo
L₂	-	largura do veículo
L_c	-	gramiano de controlabilidade
l_f	-	comprimento à frente do CG
l_{front}	-	comprimento à frente do CG
l_l	-	comprimento à esquerda do CG
l_{left}	-	comprimento à esquerda do CG
L_o	-	gramiano de observabilidade

- l_r - comprimento à direita do CG
- l_r - comprimento atrás do CG
- l_{rear} - comprimento atrás do CG
- l_{right} - comprimento à direita do CG
- M - dimensão massa
- m - massa
- M_i - momento em torno do eixo i
- m_s - massa suspensa
- m_t - massa não suspensa (massa do pneu)
- m_{tif} - massa do pneu dianteiro esquerdo
- m_{tir} - massa do pneu traseiro esquerdo
- m_{trf} - massa do pneu dianteiro direito
- m_{trr} - massa do pneu traseiro direito
- \emptyset - ângulo de Euler
- Q,R** - matrizes de ponderação
- T - dimensão tempo
- t^* - tempo adimensional
- u - entrada
- V - dimensão velocidade
- v^* - velocidade adimensional
- v_{eq} - velocidade
- v_s^* - velocidade adimensional da massa suspensa
- v_t^* - velocidade adimensional do pneu
- x_j - expoente de dimensão
- y - saída
- z - deslocamento vertical da massa suspensa
- z** - vetor de estado
- z^* - deslocamento adimensional
- z_{eq} - deslocamento da massa até a posição de equilíbrio estático
- z_{eqs} - deslocamento de equilíbrio da massa suspensa
- z_r - excitação de base (deslocamento)
- z_r^* - excitação de base adimensional (deslocamento)
- z_{rm}^* - excitação de base adimensional no modelo (deslocamento)
- z_{roadlf}^* - excitação de base adimensional dianteiro esquerdo

- z_{roadlr}^* - excitação de base adimensional traseiro esquerdo
- z_{roadrf}^* - excitação de base adimensional dianteiro direito
- z_{roadrr}^* - excitação de base adimensional traseiro direito
- z_{rp}^* - excitação de base adimensional no protótipo(deslocamento)
- z_s^* - deslocamento adimensional da massa suspensa
- z_t^* - deslocamento adimensional do pneu
- ϑ - ângulo de Euler
- π_i - parâmetro π_i adimensional
- τ - constante de tempo
- τ_m - constante de tempo do modelo
- τ_p - constante de tempo do protótipo
- ψ - ângulo de Euler
- Ω - velocidade angular do referencial móvel

RESUMO

A utilização de modelos em escala para a predição do comportamento dinâmico de protótipos, baseada na análise de semelhança, tem despertado crescente interesse da comunidade científica. A aplicação da análise de semelhança ao estudo da dinâmica vertical de veículos militares é de grande interesse para o Exército Brasileiro, não somente porque a dinâmica vertical está diretamente relacionada ao conforto das guarnições e, conseqüentemente, à sua eficiência em combate, mas também porque a predição do comportamento dinâmico do protótipo em tamanho real durante o desenvolvimento do seu projeto pode proporcionar economia de tempo e de recursos.

Esta tese propõe uma nova metodologia para predição do comportamento dinâmico de protótipos com base em ensaios de modelos em escala que apresentem similaridade dinâmica incompleta em relação aos respectivos protótipos. A técnica proposta aborda o problema da predição do comportamento dinâmico sob um enfoque que considera a modelagem matemática do sistema e a análise de semelhança de uma maneira conjunta e apresenta uma nova ferramenta para projeto, análise e calibração de modelos em escala.

As equações diferenciais de governo do sistema são adimensionalizadas e os coeficientes resultantes são tomados como sendo os parâmetros adimensionais que garantem a similaridade dinâmica completa no domínio adimensional. Para os casos práticos em que a similaridade dinâmica completa é difícil, ou mesmo impossível de ser alcançada, é proposto quantificar a similaridade dinâmica incompleta por meio do uso de algumas métricas escolhidas, aplicáveis a modelos de sistemas dinâmicos. Isso permite otimizar a similaridade dinâmica para determinar qual é o melhor modelo em escala possível de ser construído tanto pelo uso somente de componentes disponíveis no comércio (otimização combinatória) como também pelo projeto de alguns componentes principais (programação não-linear).

O método proposto é ilustrado por meio de exemplos de complexidade crescente, que envolvem desde o modelo de um quarto de veículo com um grau de liberdade até o modelo de um veículo completo com sete graus de liberdade.

ABSTRACT

The use of scale models to predict the dynamic behavior of prototypes, based on similarity analysis, has attracted increasing attention from the scientific community. Application of similarity analysis to the study of vertical dynamics of military vehicles is of great interest for the Brazilian Army, not only because vertical dynamics is directly related to the comfort of the crew members and hence to their combat effectiveness, but also because predicting the dynamic behavior of the full-scale prototype during its design can provide savings in time and resources.

This thesis proposes a new methodology for predicting the dynamic behavior of prototypes based on tests of scale models presenting partial dynamic similarity in relation to their respective prototypes. The proposed technique addresses the problem of predicting the dynamic behavior from a jointly perspective that considers the mathematical modeling of the system in tandem with similarity analysis, and presents a new tool for design, analysis and calibration of scale models.

The differential equations governing the system are made dimensionless and the resulting coefficients are taken as the dimensionless parameters that guarantee the complete dynamic similarity in the dimensionless domain. For the practical cases where the complete dynamic similarity is difficult or even impossible to be achieved, it is proposed to measure the dynamic similarity (in)completeness by using some chosen metrics applied to dynamic system models. This allows to optimize the dynamic similarity to determine which is the best scale model can be constructed either by using only commercial off-the-shelf components (combinatorial optimization) or by designing some key components (nonlinear programming).

The proposed method is illustrated through examples of increasing complexity, which involve several models from one degree-of-freedom quarter-car model to seven degree-of-freedom full vehicle model.

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO E APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Constata-se nos últimos anos um crescente interesse pela aplicação da teoria da similaridade ao estudo da dinâmica de veículos.

O interesse pela análise de semelhança no estudo do comportamento dinâmico de veículos passa pelo uso da teoria da similaridade no estudo da dinâmica vertical, longitudinal e direcional (que associa dinâmica longitudinal e lateral) de veículos. Este trabalho propõe uma nova metodologia para o uso da similaridade dinâmica incompleta na predição do comportamento de um protótipo, por meio do ensaio de um modelo em escala.

Tradicionalmente, a indústria automobilística tem se valido de estudos da dinâmica de veículos que são validados por meio de testes em protótipos. Esses protótipos são unidades por ela produzidas. A larga escala de fabricação garante que os elevados custos dessa metodologia sejam diluídos pelas grandes quantidades de unidades comercializadas. Recentemente, porém, aspectos ligados à segurança e facilidade de locais apropriados para os testes, aliados ao menor custo, têm direcionado esforços no sentido do uso da teoria da semelhança para predição do comportamento dinâmico de veículos através do uso de modelos em escala. Os aspectos relacionados a locais de teste, segurança na realização dos testes e custo são mais relevantes à medida que o tamanho do veículo em questão aumenta e a escala de produção diminui. Assim, estes aspectos que têm uma determinada relevância no estudo da dinâmica de um veículo pequeno tornam-se mais relevantes no estudo de veículos de médio e de grande portes como, por exemplo, caminhões. Este fator de relevância atinge extremos quando se trata do estudo do comportamento dinâmico de veículos blindados que são fabricados para o Exército Brasileiro, pelos problemas (segurança e locais apropriados para ensaio) relativos ao tamanho dos protótipos a serem ensaiados e, principalmente, pelos elevados custos dos testes do protótipo uma vez que a escala de produção dos mesmos é relativamente pequena.

Devido aos fatores apresentados acima, o estudo da teoria da similaridade aplicada à dinâmica de um veículo apresenta interesse para a indústria automobilística de uma maneira geral e em especial para a indústria de defesa voltada para a fabricação de viaturas militares.

1.2 POSICIONAMENTO DO TRABALHO

A abordagem da modelagem específica para o estudo da dinâmica de veículos tem sido amplamente usada há algum tempo.

O interesse em modelos em escala para análise dinâmica de veículos tem aumentado ultimamente com trabalhos que abordam diferentes aspectos da dinâmica de um veículo por meio da análise de semelhança. A abordagem por um ou outro enfoque tem sido em grande parte estagnada como citado em BRENNAN (2004). O presente trabalho apresenta um enfoque conjunto que envolve a análise de semelhança e a modelagem específica para o estudo da dinâmica de veículos aqui aplicado à análise da sua dinâmica vertical. Exemplos do uso da modelagem específica para o estudo da dinâmica de veículos são dados por SHEN e outros (2007) e por ALLEYNE (1997), entre outros.

A análise dimensional para o estudo da dinâmica de veículos foi também empregada recentemente por diversos autores. BRENNAN e ALLEYNE (1999) apresentam um equipamento de teste para veículos em escala. BRENNAN e ALLEYNE (2000) apresentam um simulador chamado ‘The Illinois Roadway Simulator’ (IRS) que consiste em um equipamento de teste em escala usado para o estudo da dinâmica de veículos e controle. Neste equipamento veículos em escala se deslocam relativamente sobre uma superfície que simula a estrada.

Em ALLEYNE e BRENNAN (2001), os autores apresentam vantagens do uso de equipamentos e veículos em escala para validar dados resultantes de simulações de comportamento dinâmico de veículos com controladores. Tais vantagens se ligam principalmente a fatores relacionados a custo e segurança dos ensaios. Além disso, os autores apresentam o uso de modelos em escala como sendo apropriado para a pesquisa que se desenvolve em instituições de ensino. Em QUAGLIA e SORLI (2001), os autores apresentam

um modelo adimensional e considerações para o projeto de uma suspensão pneumática com reservatório auxiliar.

O projeto, simulação, implementação e teste de um sistema de freio antibloqueio de rodas (freio ABS) em um modelo em escala de 1/5 foi apresentado por PATIL e outros (2003). Nesse trabalho, os autores demonstram o uso de um sistema em escala de laboratório como uma etapa efetiva, tanto do ponto de vista do custo como do tempo, na avaliação do projeto do controle no ciclo de desenvolvimento do produto. A simulação integrada e os procedimentos de teste revelaram a necessidade de reprojeter o sistema de freio.

A descrição de como modelos em escala podem ser usados para facilitar a prototipagem de sistemas de controle em veículos foi apresentada por LONGORIA e outros (2000). Os autores mostram que sistemas em escala podem ser efetivamente usados para avaliar e simular estágios críticos no projeto de veículos e procedimentos de prototipagem virtual pela consideração apropriada da similaridade dinâmica. Os autores ressaltam também que a interação pneu-solo nos sistemas em escala exibe características semelhantes às aquelas observadas em sistemas em tamanho real, o que é confirmado por testes de laboratório.

Modelos em escala têm sido cada vez mais usados para investigar a dinâmica não planar tais como 'roll' (rolagem), 'pitch' (arfagem) e 'jackknifing' (configuração em "L") para sistemas compostos, mas pequena atenção tem sido dada às condições de similaridade dinâmica para estes casos. BRENNAN (2004) apresenta métodos para obter a similaridade para dinâmica não planar.

O uso da análise dimensional para estudo de pneus dos veículos em escala foi apresentado por POLLEY e ALLEYNE (2004). A motivação para esse estudo foi a visão de que o comportamento não-linear realístico dos pneus nos veículos em escala determina a seu desempenho dinâmico. No exame do comportamento dos pneus numa abordagem adimensional, apresentam-se parâmetros chave dos pneus que conduzem à semelhança de comportamento entre os pneus em escala e em tamanho real. A introdução destes parâmetros permite o desenvolvimento de modelos em escala que possuem um elevado grau de similaridade com os protótipos em tamanho real, mas que são mais econômicos e mais seguros para realização dos testes. Este estudo foi continuado em POLLEY e ALLEYNE (2006), onde dados experimentais foram usados para comparar características não-lineares de pneus em escala e em tamanho real.

Em WITAYA e outros (2009), descrevem o desenvolvimento de um veículo em escala para simulação de interação dinâmica. O objetivo desses veículos em escala é seu uso em um ambiente em escala em que haja interação com um operador.

A dinâmica longitudinal foi estudada por VERMA e outros (2008), onde a teoria dos parâmetros Π de Buckingham foi aplicada ao problema de se construir um modelo em escala de um veículo cuja dinâmica longitudinal e do ‘power train’ (trem de força) fosse semelhante à de um veículo sobre rodas multiuso de alta mobilidade (‘high-mobility multipurpose wheeled vehicle’ - HMMWV) em tamanho real. O veículo em escala usa simulação com ‘hardware-in-the-loop’ (HIL) para capturar algumas das características dinâmicas do HMMWV e outras são emuladas ‘onboard’ em tempo real. Isso foi feito com o objetivo final de testar algoritmos de prevenção de colisão onde diversos desses veículos em escala seriam usados.

KITTIRUNGSÍ (2008) apresenta uma técnica de projeto que adapta o projeto de um sistema para atender novos requisitos. A técnica utilizada para o modelo em escala foca na manutenção de características desejáveis do projeto original por meio de modificações mínimas no mesmo. É usada uma métrica desenvolvida por pesquisadores que trabalham com redução de ordem do modelo baseada na atividade relativa de cada variável aliada à análise dimensional. A importância relativa de cada lei de escala é determinada, o que permite que sejam desprezadas as variáveis menos importantes, dando assim maior liberdade para a construção do modelo em escala.

Apesar de amplamente citada nos trabalhos acima, aspectos relativos à similaridade dinâmica entre os sistemas – que é obtida pela semelhança das equações diferenciais de governo dos sistemas – são pouco explorados. Pesquisadores da área de dinâmica de veículos adotam o enfoque da modelagem específica ou da análise dimensional de maneira estanque, conforme se pode ver em BRENNAN (2004).

O primeiro trabalho que aplica uma métrica para quantificar a similaridade dinâmica incompleta, com objetivo de otimizar uma função custo, é o trabalho de KITTIRUNGSÍ (2008). O presente trabalho é o segundo trabalho a propor uma nova metodologia para quantificar a similaridade dinâmica incompleta com objetivo de otimizá-la, diferindo, porém, do trabalho de KITTIRUNGSÍ, pelo objetivo da pesquisa, pela técnica de obtenção dos

parâmetros Π adimensionais e pelas métricas usadas na quantificação da similaridade dinâmica incompleta.

Assim, o presente trabalho apresenta a proposta de uma nova metodologia baseada em um enfoque conjunto que considera o modelo específico do veículo em associação com a análise dimensional, buscando semelhança dinâmica completa entre o protótipo e o modelo em escala. Neste trabalho, pretende-se seguir este enfoque conjunto, teoria da similaridade e modelagem específica, de uma maneira sequencial, passando pela determinação dos parâmetros Π , adimensionalização das equações diferenciais de governo dos sistemas e análise das condições necessárias à similaridade das excitações de base de modo a se obter a similaridade dinâmica completa entre o protótipo e o modelo em escala.

São apresentadas inicialmente as condições para a obtenção de modelos em escala que apresentem semelhança dinâmica para o estudo da dinâmica vertical de um veículo modelado como um quarto de carro. Os resultados obtidos demonstram que o uso da teoria da similaridade aplicada a este caso permite obter a similaridade dinâmica completa, o que valida o procedimento da predição do comportamento da dinâmica vertical de um quarto de carro através do uso de um modelo em escala apropriado.

O prosseguimento do trabalho se ocupa da dinâmica do movimento de 'roll' do veículo. Nesta fase do trabalho, o veículo passa a ser modelado como meio carro apresentando propriedades de simetria em relação a um plano longitudinal que passa pelo seu centro de massa. O estudo revela que, para este caso particular, também é possível estabelecer a similaridade dinâmica completa entre o modelo em escala e o protótipo. Dessa forma, o mesmo procedimento de predição do comportamento dinâmico do sistema usado para a dinâmica vertical de um quarto de carro (sistema com um grau de liberdade) pode ser estendido para a análise dinâmica do movimento de 'roll' associado ao 'bounce' (deslocamento vertical) de um veículo modelado como meio carro (sistema com dois graus de liberdade). Tal estudo é apresentado no APÊNDICE 1. O estudo da dinâmica vertical de um quarto de carro com dois graus de liberdade e também da dinâmica vertical de meio carro em movimento de 'bounce' associado ao movimento de 'pitch', onde o modelo não apresenta simetria em relação ao plano transversal que passa pelo seu centro de massa, também conduzem à similaridade dinâmica completa, aplicando-se o procedimento adotado para a dinâmica vertical de um quarto de carro com um grau de liberdade. Deste modo, com diversos modelos de complexidade crescente analisados, a similaridade dinâmica completa pode ser

obtida pelo enfoque conjunto (análise de similaridade e modelagem específica) apresentado no trabalho. Tal estudo se encontra nos APENDICES 3 e 2, respectivamente.

A similaridade dinâmica completa obtida pelo procedimento proposto leva a considerar o caso em que a similaridade dinâmica incompleta ocorre. Da análise desta conjectura, surge a proposta de uma nova metodologia para otimização da similaridade dinâmica incompleta que ocorre na prática.

Como citado anteriormente, este trabalho difere do trabalho de KITTIRUNGSI, pelo objetivo da pesquisa, pela técnica de obtenção dos parâmetros Π adimensionais e pelas métricas usadas na quantificação da similaridade dinâmica incompleta. Em KITTIRUNGSI (2008), o objetivo da pesquisa é “desenvolver um método para escalar as saídas de um sistema existente para atender novas especificações desejadas, conservando suas propriedades desejáveis” (atender novos requisitos de projeto). O objetivo da presente pesquisa é apresentar uma nova metodologia de predição do comportamento de sistemas dinâmicos por meio de modelos em escala que apresentem similaridade dinâmica incompleta com o protótipo e que sejam possíveis de serem construídos. A metodologia proposta no presente trabalho apresenta o desenvolvimento de uma ferramenta para projeto, calibração e análise de modelos em escala visando à predição do comportamento dinâmico de protótipos.

Em KITTIRUNGSI (2008), a sequência para obtenção dos parâmetros Π adimensionais é a que se segue:

1. identificação das equações diferenciais de governo do sistema de interesse;
2. identificação das variáveis e parâmetros que aparecem nas equações de governo e identificação das suas unidades fundamentais;
3. identificação da fórmula dimensional associada a cada variável;
4. determinação do número de parâmetros Π adimensionais;
5. derivação dos parâmetros Π .

Nesta tese, propõe-se adotar a seguinte sequência para a obtenção dos parâmetros Π adimensionais:

1. identificação das equações diferenciais de governo do sistema de interesse;
2. adimensionalização (parametrização) das equações diferenciais de governo por meio do cálculo de coeficientes adimensionais das diferenciais adimensionais;

3. adoção dos coeficientes da equação diferencial de governo adimensional obtida na etapa 2 como parâmetros Π adimensionais.

A sequência proposta para obtenção dos parâmetros Π adimensionais conduz a um conjunto de parâmetros Π que não é mínimo, mas que assegura a similaridade dinâmica completa no espaço adimensional.

KITTIRUNGSÍ (2008) usa uma métrica desenvolvida para redução de ordem de modelo para quantificar a similaridade dinâmica aproximada. A métrica consiste na distância a uma hipersuperfície calculada num espaço multidimensional distorcido, onde a distorção do espaço é dada pela ponderação das dimensões pela chamada “atividade” do parâmetro, que está diretamente associada à porcentagem de energia que transita pelo componente considerado. KITTIRUNGSÍ cita ainda a dificuldade de se obter uma métrica para tratar o problema. Neste trabalho são usadas três normas para a quantificação da similaridade dinâmica incompleta: RMS do erro adimensional, norma H_2 e norma H_∞ da diferença dos sistemas adimensionais gerados a partir do modelo em escala e do protótipo. Vale ressaltar que a metodologia proposta segue um caminho em que três diferentes normas podem ser usadas como métricas para quantificar a similaridade dinâmica incompleta, revelando a flexibilidade da metodologia.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta tese se apresenta organizada em oito capítulos, além desta introdução, e quatro APÊNDICES. No CAP. 2 é apresentado o enfoque conjunto que consiste na aplicação da teoria da similaridade em conjunto com a modelagem da dinâmica vertical de um veículo considerado como um quarto de carro. Nesse capítulo é mostrado que a aplicação da análise de semelhança ao estudo da dinâmica vertical de um veículo modelado como um quarto de carro, utilizando-se este novo enfoque proposto, leva a resultados satisfatórios, em termos de similaridade dinâmica completa.

No CAP. 3, adota-se um procedimento semelhante ao utilizado no CAP. 2 para se obter a semelhança dinâmica completa em um modelo de um quarto de carro com dois graus de liberdade. Nesse ponto é proposta uma nova ordem para a sequência a ser seguida,

fazendo-se a determinação dos parâmetros Π a partir do resultado da adimensionalização das equações diferenciais de governo do sistema, e não mais por meio da utilização das matrizes dimensionais. Essa nova sequência adotada conduz à similaridade dinâmica completa para o modelo de um quarto de carro com dois graus de liberdade.

No CAP. 4, é realizado o estudo da similaridade de um sistema modelado como 1/4 de carro com um grau de liberdade dotado de um sistema de suspensão ativa. As equações diferenciais de governo do modelo são escritas e isso permite obter o equacionamento do sistema na sua representação em espaço de estados diretamente das equações diferenciais do modelo sem ter que passar antes pela função de transferência. Partindo-se da equação diferencial de governo do sistema dimensional e utilizando-se as parametrizações utilizadas no CAP. 2, chega-se à equação diferencial de governo adimensional do sistema em malha fechada, o que permite estabelecer as condições necessárias para que haja similaridade dinâmica completa dos sistemas em malha fechada, uma vez que a similaridade dos sistemas em malha aberta já tenha sido obtida. Isso permite obter as relações diretas a serem atendidas entre os ganhos no protótipo e no modelo em escala para que a similaridade dinâmica completa seja obtida para os sistemas em malha fechada. No CAP. 4 são também simulados sistemas em malha aberta e em malha fechada para os quais é alcançada a similaridade dinâmica completa.

No CAP. 5, é considerado o fato de a similaridade dinâmica completa ser difícil ou mesmo impossível de ser obtida na prática, embora ela seja teoricamente possível. A partir desta consideração, surge a idéia fundamental da metodologia proposta, que consiste na otimização da similaridade dinâmica incompleta com o objetivo de se determinar, dentre os modelos em escala possíveis de serem construídos, aquele que apresenta a melhor similaridade dinâmica com o protótipo do qual se deseja prever o comportamento. Para que seja possível a otimização, deve ser definida uma função-objetivo (uma métrica) que possibilite determinar o modelo em escala que apresenta a melhor similaridade dinâmica incompleta entre dois modelos em escala analisados. A métrica proposta consiste no valor RMS do erro adimensional nas variáveis de estado entre os sistemas adimensionais resultantes do protótipo e do modelo em escala que está sendo analisado. Otimizações combinatórias para um modelo de um quarto de carro com dois graus de liberdade revelam que os resultados ótimos apresentam uma pequena variação em função do tipo de excitação do sistema analisado (condições iniciais, excitação de base degrau, senoidal, etc). Apesar da pequena

variação, a metodologia se mostra bastante estável para o uso da métrica RMS do erro adimensional.

No CAP. 6, é desenvolvido um modelo de veículo com sete graus de liberdade. Adotando-se algumas simplificações, as equações diferenciais de governo foram obtidas para o modelo em questão, o que resultou em um modelo linear. Seguindo o algoritmo da metodologia proposta, estas equações diferenciais de governo foram adimensionalizadas e deram origem a um sistema adimensional também linear. À semelhança dos modelos mais simples desenvolvidos em capítulos precedentes e nos APÊNDICES, também para este modelo foi atingida a similaridade dinâmica completa. Assim, para o veículo completo, também se pode aplicar a metodologia proposta.

A métrica proposta para a metodologia apresentada no CAP. 5 gera sistemas ótimos levemente dependentes do tipo de entrada aplicada e da discretização do intervalo de tempo considerado na otimização. Com o objetivo de padronizar a metodologia proposta e torná-la mais estável do ponto de vista do sistema ótimo alcançado, propõe-se o uso de uma métrica de sistema já padronizada. Assim, no CAP. 7, propõe-se o uso das normas \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ para se atingir estes objetivos. Para o cálculo das normas \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ , o sistema linear adimensional desenvolvido no CAP. 6 é colocado na forma de estado e otimizações são conduzidas segundo a metodologia proposta, fornecendo resultados promissores. Para o mesmo conjunto de valores pesquisados, o mesmo sistema ótimo foi obtido tanto com o emprego da norma \mathcal{H}_2 como com o emprego da norma \mathcal{H}_∞ , o que comprova que o uso das normas padronizadas proporcionou estabilidade à metodologia proposta tornando-a ainda mais confiável.

No CAP. 8, são apresentadas considerações sobre a metodologia proposta, onde dois tipos de critérios de quantificação da similaridade dinâmica incompleta são considerados. Nesse capítulo é mostrado que a escolha das métricas a serem utilizadas para a quantificação da similaridade dinâmica incompleta deve ser criteriosa.

No CAP. 9, são apresentadas a contribuição do trabalho e sugestões de trabalhos futuros.

O APÊNDICE 1 apresenta a modelagem do veículo como meio carro. Uma vez que, à medida que o modelo vai se tornando mais completo, existe uma maior dificuldade em se obter a semelhança entre o modelo em escala e o protótipo, o estudo realizado anteriormente e

agora apresentado no APÊNDICE 1 se ocupa do modelo de meio carro em movimento de ‘roll’, para o qual é razoável se admitir que o carro possua simetria em relação a um plano longitudinal que passa pelo seu centro de massa. No APÊNDICE 1, é usado um procedimento semelhante ao utilizado no capítulo 2 para mostrar que a aplicação do novo enfoque que compreende a análise de semelhança em conjunto com a modelagem específica também é eficiente para o veículo modelado como meio carro simétrico.

No APÊNDICE 2, os procedimentos adotados no CAP. 2 executados na sequência proposta no CAP. 3 são seguidos para se chegar à similaridade dinâmica completa no modelo de meio carro assimétrico em movimento de ‘bounce’ associado ao movimento de ‘pitch’.

No APÊNDICE 3, os procedimentos adotados nos CAP. 2 e 4 são utilizados para se determinar a similaridade dinâmica completa também para o modelo de um quarto de carro com suspensão ativa e dois graus de liberdade. É importante notar que, nos casos estudados nos três apêndices citados acima, a similaridade dinâmica completa foi atingida para os modelos considerados.

O APÊNDICE 4 traz os parâmetros Π para o modelo de veículo com sete graus de liberdade. O APÊNDICE 5 apresenta os elementos diferentes de zero das matrizes de estado e de entradas do sistema linear para o veículo de sete graus de liberdade.

2 SIMILARIDADE NA DINÂMICA VERTICAL DE ¼ DE CARRO

2.1 INTRODUÇÃO

Com o objetivo de fazer um estudo da similaridade aplicada a um quarto de carro, inicia-se com a determinação dos parâmetros adimensionais de interesse para o problema. Esta determinação é feita seguindo os passos do algoritmo apresentado por CARNEIRO (1993) e LLERENA (2000), e pode resultar em diversos grupos de parâmetros Π adimensionais. Pode-se notar, entretanto, que, de maneira semelhante à mecânica dos fluidos, os parâmetros Π que possuem um significado físico simples associado a eles são os de maior importância no estudo de similaridade do modelo.

O segundo passo consiste na adimensionalização da equação diferencial de governo do sistema. Para isso, parametrizam-se o deslocamento vertical z , a velocidade vertical dz/dt e o tempo t ; e, a partir destas parametrizações, estabelecem-se as relações entre as diferenciais, o que leva à equação diferencial de governo do domínio dimensional para o domínio adimensional.

O sistema não amortecido resultante da adimensionalização do sistema apresenta certas características de interesse para essa parametrização do tempo utilizada. A frequência natural não amortecida para o sistema adimensional é sempre igual à unidade, e seu período é sempre igual à 2π unidades do tempo adimensionalizado t^* .

Outro aspecto de interesse mostrado nesse capítulo, resultante da adimensionalização do sistema amortecido, é que o valor do parâmetro Π_4 , que surge na adimensionalização da equação diferencial de governo, serve para avaliar o comportamento subamortecido, criticamente amortecido ou superamortecido do sistema adimensional, que é o mesmo do sistema dimensional, uma vez que os sistemas são semelhantes.

Para concluir a adimensionalização do sistema, estabelece-se a relação entre a excitação de base nos domínios dimensional e adimensional e analisam-se as relações para excitação de base degrau e senoidal.

Ao final do capítulo é apresentada a aplicação da teoria da similaridade ao modelo de 1/4 de carro. Para isso, partindo-se de um protótipo determinado, estabelece-se o modelo em escala que lhe é semelhante. Determinam-se os modelos adimensionais a partir do protótipo e a partir do modelo em escala e comparam-se os resultados obtidos com os sistemas adimensionais. Como os resultados são coincidentes, parte-se para a previsão do comportamento do protótipo a partir do modelo em escala sem mesmo simular o protótipo. Os resultados obtidos das simulações mostram a eficiência da teoria da semelhança aplicada à dinâmica vertical de 1/4 de carro.

2.2 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS Π

Para obter o sistema adimensional a partir do sistema dado, representado esquematicamente na FIG. 2.1, inicia-se com a listagem dos parâmetros do sistema dimensional que se supõe sejam significantes para descrevê-lo.

Escolhe-se um conjunto de dimensões básicas que formam uma base na qual as dimensões dos parâmetros de interesse do sistema são escritas como produto destas dimensões básicas elevadas a expoentes racionais.

Contanto que sejam linearmente independentes as grandezas podem constituir uma base. Diversas bases são apresentadas na literatura e podem ser usadas, sendo as mais comuns para estudo de similaridade em veículos as bases comprimento-massa-tempo $[LMT]$ e velocidade-massa-tempo $[VMT]$.

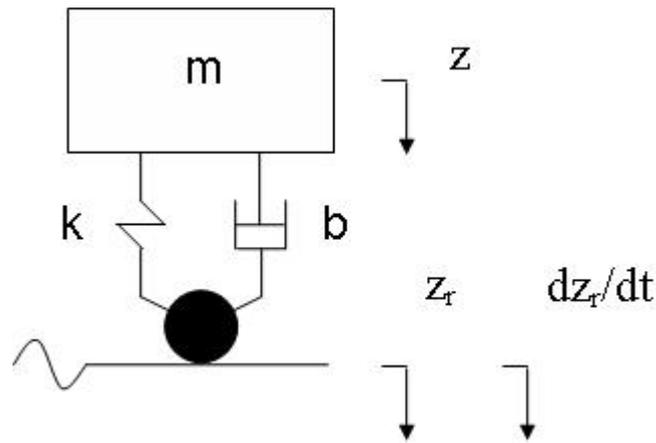


FIG. 2.1: Modelo de ¼ de carro.

Adotando-se a base $[LMT]$, os parâmetros de interesse do sistema e suas respectivas dimensões expressas na base escolhida são apresentados na TAB. 2.1.

Escreve-se a matriz dimensional da tabela TAB. 2.2, que relaciona as dimensões da base com os parâmetros de interesse do problema por meio de expoentes racionais. O posto da submatriz 3×3 , que contém os parâmetros básicos, determina a dimensão da base mínima requerida para representar os demais parâmetros do problema em função das dimensões básicas escolhidas.

TAB. 2.1: Parâmetros do protótipo.

Símbolo	Descrição	dimensão
z_{eq}	deslocamento	$[L]$
m	Massa	$[M]$
k	Rigidez	$[MT^{-2}]$
b	coef. amortecimento	$[MT^{-1}]$
τ	Tempo	$[T]$
g	Gravidade	$[LT^{-2}]$

TAB. 2.2: Matriz dimensional dos parâmetros do protótipo.

grandeza	z_{eq}	m	τ	k	b	g
$[L]$	1	0	0	0	0	1
$[M]$	0	1	0	1	1	0
$[T]$	0	0	1	-2	-1	-2

O determinante da submatriz quadrada de ordem 3, dada na TAB. 2.3, é igual a 1 e seu posto é igual a 3. Dessa forma, são requeridas 3 dimensões básicas para descrever os demais parâmetros e a base necessária é de dimensão 3, sendo pois a base $[LMT]$. Tem-se, então, três grandezas fundamentais e são necessários três grupos Π adimensionais a serem determinados.

Escrevendo-se o produto de parâmetros elevados a expoentes racionais (a serem determinados) na EQ. 2.1, buscam-se grupos de parâmetros adimensionais formados por combinação dos parâmetros de interesse elevados a expoentes racionais a serem determinados. Partindo-se da EQ. 2.1 e expressando os parâmetros de interesse por suas respectivas dimensões na base $[LMT]$, tem-se a EQ. 2.2

TAB. 2.3: Submatriz dimensional – base mínima.

grandezas	z_{eq}	m	T
$[L]$	1	0	0
$[M]$	0	1	0
$[T]$	0	0	1

$$z_{eq}^{x_1} m^{x_2} \tau^{x_3} k^{x_4} b^{x_5} g^{x_6} \quad (2.1)$$

$$(L)^{x_1} (M)^{x_2} (T)^{x_3} (MT^{-2})^{x_4} (MT^{-1})^{x_5} (LT^{-2})^{x_6} \quad (2.2)$$

Para que os parâmetros Π sejam adimensionais, a soma dos expoentes de cada dimensão básica no produto dado pela EQ. 2.2 deve ser igual a zero.

Obtêm-se, assim, as relações entre os expoentes dos parâmetros igualando-se a zero a soma dos expoentes das dimensões básicas no produto da EQ. 2.2, o que conduz às equações EQ. 2.3, 2.4 e 2.5.

$$L : x_1 + 0 + 0 + 0 + 0 + x_6 = 0 \quad (2.3)$$

$$M : 0 + x_2 + 0 + x_4 + x_5 + 0 = 0 \quad (2.4)$$

$$T : 0 + 0 + x_3 - 2x_4 - x_5 - 2x_6 = 0 \quad (2.5)$$

São atribuídos valores para três dos coeficientes x_i (expoentes de dimensão) e obtêm-se os três coeficientes x_i (expoentes de dimensão) restantes através das relações dadas nas equações EQ. 2.3, 2.4 e 2.5.

Fazendo $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ e $x_6 = 0$, tem-se $x_5 = -2$ pela EQ. 2.5, $x_2 = 1$ pela EQ. 2.4 e $x_1 = 0$ pela EQ. 2.3; o primeiro grupo adimensional está apresentado na EQ. 2.6.

$$\Pi_1 = z_{eq}^0 m^1 \tau^0 k^1 b^{-2} g^0 = \frac{mk}{b^2} \quad (2.6)$$

Fazendo $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ e $x_6 = 0$, tem-se $x_1 = 0$ pela EQ. 2.3, $x_5 = 1$ pela EQ. 2.5 e $x_2 = -1$ pela EQ. 2.4; o segundo grupo adimensional está apresentado na EQ. 2.7.

$$\Pi_2 = z_{eq}^0 m^{-1} \tau^1 k^0 b^1 g^0 = \frac{b\tau}{m} \quad (2.7)$$

Fazendo $x_2 = 0$, $x_4 = 1$ e $x_6 = 0$, tem-se $x_1 = 0$ pela EQ. 2.3, $x_5 = -1$ pela EQ. 2.4 e $x_3 = 1$ pela EQ. 2.5; o terceiro grupo adimensional está apresentado na EQ. 2.8.

$$\Pi_3 = z_{eq}^0 m^0 \tau^1 k^1 b^{-1} g^0 = \frac{k\tau}{b} \quad (2.8)$$

Este procedimento pode ser usado para criar diversos parâmetros Π adimensionais, mas a análise dimensional e a teoria da semelhança aplicada a fluidos revelam que os principais parâmetros Π descobertos são aqueles que possuem um significado físico simples associado a eles. As razões disso ficarão claras mais adiante.

Assim, com o objetivo de obter parâmetros Π que tenham um significado físico associado a eles, consideram-se das equações EQ. 2.3, 2.4 e 2.5 assumindo valores diferentes para os expoentes de dimensão x_i .

Fazendo $x_3 = -2$, $x_5 = 0$ e $x_6 = -1$, tem-se $x_1 = 1$ pela EQ.2.3, $x_4 = 0$ pela EQ. 2.5 e $x_2 = 0$ pela EQ. 2.4; o primeiro grupo adimensional resultante está apresentado na EQ. 2.9.

$$\Pi_1 = z_{eq}^1 m^0 \tau^{-2} k^0 b^0 g^{-1} = \frac{z_{eq}}{g\tau^2} = \frac{mz_{eq}}{mg\tau^2} \quad (2.9)$$

Fazendo $x_1 = 1$, $x_4 = 0$ e $x_5 = 1$, tem-se $x_6 = -1$ pela EQ.2.3, $x_2 = -1$ pela EQ. 2.4 e $x_3 = -1$ pela EQ.2.5; o segundo grupo adimensional está apresentado na EQ. 2.10.

$$\Pi_2 = z_{eq}^1 m^{-1} \tau^{-1} k^0 b^1 g^{-1} = \frac{bz_{eq}}{mg\tau} \quad (2.10)$$

Fazendo $x_1 = 1$, $x_4 = 1$ e $x_5 = 0$, tem-se $x_6 = -1$ pela EQ. 2.3, $x_2 = -1$ pela EQ. 2.4 e $x_3 = 0$ pela EQ. 2.5; o terceiro grupo adimensional está apresentado na EQ. 2.11.

$$\Pi_3 = z_{eq}^1 m^{-1} \tau^0 k^1 b^0 g^{-1} = \frac{kz_{eq}}{mg} \quad (2.11)$$

O grupo Π_1 dado pela EQ. 2.9 representa a razão entre a força de inércia e a força gravitacional que age no corpo. Este grupo é equivalente ao número de Froude usado nos estudos de semelhança em mecânica dos fluidos. O grupo Π_2 dado pela EQ. 2.10 representa a razão entre a força de amortecimento viscoso e a força gravitacional que age no corpo, e o grupo Π_3 dado pela EQ. 2.11 representa a razão entre a força elástica e a força gravitacional.

Como dado pelas equações EQ. 2.9, 2.10 e 2.11, os grupos adimensionais possuem um significado físico claro, o que será fundamental na adimensionalização da equação diferencial com objetivo de obter a similaridade dinâmica.

2.3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MOVIMENTO NA FORMA ADIMENSIONAL

FOX e outros (2010) realizam a adimensionalização da equação de Navier-Stokes. Neste trabalho, segue-se a mesma sequência utilizada em FOX e outros (2010) para a equação de Navier-Stokes, aqui para a equação diferencial de governo do sistema, com o objetivo de obter sua forma adimensional.

Para obter a equação diferencial de governo do sistema na forma adimensional, inicia-se pela parametrização da coordenada que representa o deslocamento vertical z , da velocidade vertical dz/dt , e do tempo t , estabelecendo as relações entre essas grandezas nos domínios dimensional e adimensional.

Para a parametrização da coordenada z , dada em metros, que se refere ao grau de liberdade de deslocamento vertical da massa (conforme FIG. 2.1), utiliza-se o valor da variável z_{eq} dado pela EQ. 2.12, que é o deslocamento da massa do sistema em metros até a posição de equilíbrio estático. Desse modo, a variável deslocamento no domínio adimensional, z^* , é dada pela EQ. 2.13.

$$z_{eq} = \frac{m \cdot g}{k} \quad (2.12)$$

$$z^* = \frac{z}{z_{eq}} \quad (2.13)$$

Para a parametrização do tempo t , em segundos, define-se um valor de tempo τ , em segundos, pela EQ. 2.14 e estabelece-se a parametrização do tempo no domínio adimensional t^* pela divisão do tempo t por τ , como dado na EQ. 2.15.

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.14)$$

$$t^* = \frac{t}{\tau} \quad (2.15)$$

Para a parametrização da velocidade, utiliza-se z_{eq} e τ definidas em EQ. 2.12 e 2.14, respectivamente, para definir uma velocidade v_{eq} em m/s dada pela EQ. 2.16. A velocidade v_{eq} assim definida não possui um significado físico imediato como z_{eq} , o que não impede que seja usada para parametrizar as velocidades pela relação dada na EQ. 2.17.

$$v_{eq} = \frac{z_{eq}}{\tau} \quad (2.16)$$

$$v^* = \frac{dz^*}{dt^*} = \frac{1}{v_{eq}} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (2.17)$$

A equação diferencial de movimento que rege o sistema modelado como apresentado esquematicamente na FIG. 2.1, ao se assumir que a massa parte da posição de equilíbrio estático (origem do referencial z coincidente com a posição de equilíbrio estático), é dada pela EQ. 2.18:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_r}{dt} \right) + k(z - z_r) = 0 \quad (2.18)$$

Para tornar adimensional esta equação diferencial, adota-se um procedimento termo a termo. Assim, considerando as parametrizações expressas nas equações EQ. 2.13 e 2.15, respectivamente, chega-se às relações entre diferenciais e variáveis no domínio dimensional e adimensional expressas pelas equações EQ. 2.19 a 2.23.

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \left[\frac{d\left(\frac{z}{z_{eq}}\right)z_{eq}}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \right] = \frac{z_{eq}}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} \quad (2.19)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\left(\frac{z}{z_{eq}}\right)z_{eq}}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{z_{eq}}{\tau} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} \quad (2.20)$$

$$\frac{dz_r}{dt} = \frac{d\left(\frac{z_r}{z_{eq}}\right)z_{eq}}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{z_{eq}}{\tau} \cdot \frac{dz_r^*}{dt^*} \quad (2.21)$$

$$z = \left(\frac{z}{z_{eq}}\right)z_{eq} = z_{eq} \cdot z^* \quad (2.22)$$

$$z_r = \left(\frac{z_r}{z_{eq}}\right)z_{eq} = z_{eq} \cdot z_r^* \quad (2.23)$$

Substituindo-se as relações dadas nas EQ. 2.19 a 2.23 na EQ. 2.18, chega-se à forma da equação diferencial de movimento do sistema dada pela EQ. 2.24.

$$\frac{m \cdot z_{eq}}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \frac{b \cdot z_{eq}}{\tau} \cdot \left(\frac{dz^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + k \cdot z_{eq} \cdot (z^* - z_r^*) = 0 \quad (2.24)$$

A despeito de as variáveis z^* e t^* estarem adimensionalizadas, a EQ. 2.24 tem dimensão de força, por conta dos coeficientes das variáveis e dos diferenciais. Com o objetivo de tornar essa equação adimensional, divide-se a EQ. 2.24 pelo produto $m \cdot g$, o que faz com que ela fique na forma adimensional apresentada na EQ. 2.25.

$$\frac{m \cdot z_{eq}}{m \cdot g \cdot \tau^2} \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \frac{b \cdot z_{eq}}{m \cdot g \cdot \tau} \cdot \left(\frac{dz^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + \frac{k \cdot z_{eq}}{m \cdot g} \cdot (z^* - z_r^*) = 0 \quad (2.25)$$

Agora que a equação diferencial EQ. 2.25 está adimensional, seus coeficientes possuem um significado físico claro e simples. O primeiro coeficiente adimensional representa a razão entre a força de inércia e a força gravitacional. O segundo coeficiente adimensional representa a razão entre a força de dissipação viscosa e a força gravitacional. O

terceiro coeficiente adimensional representa a razão entre a força elástica e a força gravitacional.

Além de possuir o mesmo significado físico dos grupos Π adimensionais determinados na Seção 2.2, os coeficientes adimensionais da equação diferencial adimensionalizada EQ. 2.25 são iguais aos parâmetros Π dados pelas equações EQ. 2.9, 2.10 e 2.11, o que permite que a EQ. 2.25 seja reescrita como dado pela EQ. 2.26.

$$\Pi_1 \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \Pi_2 \cdot \left(\frac{dz^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + \Pi_3 \cdot (z^* - z_r^*) = 0 \quad (2.26)$$

Pode-se, assim, representar o sistema dimensional da FIG. 2.1 no domínio adimensional pelo sistema representado na FIG. 2.2, onde aparecem somente variáveis e parâmetros adimensionais, e os parâmetros Π_1 , Π_2 e Π_3 estão associados à inércia, amortecimento e rigidez do sistema original, respectivamente (o que também pode ser notado pelas expressões dos parâmetros Π dadas nas EQ. 2.9, 2.10 e 2.11).

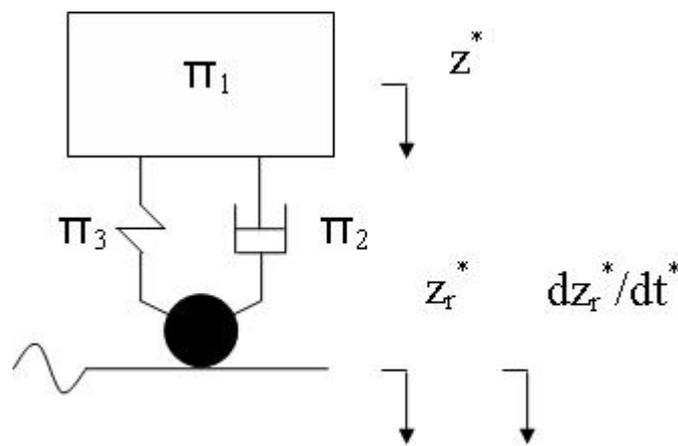


FIG. 2.2: Quarto de carro adimensional.

Dividindo-se a EQ. 2.26 por Π_1 , chega-se à EQ. 2.27, em que só figura o parâmetro adimensional Π_4 dado pela EQ. 2.28.

$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \Pi_4 \cdot \left(\frac{dz^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + (z^* - z_r^*) = 0 \quad (2.27)$$

$$\Pi_4 = \frac{\Pi_2}{\sqrt{\Pi_1 \cdot \Pi_3}} \quad (2.28)$$

A EQ. 2.27 fornece as condições necessárias para a semelhança dinâmica de dois sistemas como apresentados na FIG. 2.1:

1- os sistemas devem ter as mesmas condições iniciais em posição z_0^* e velocidade dz_0^*/dt^* adimensionais;

2- os sistemas devem ter as mesmas expressões para as excitações de base adimensionais z_r^* e dz_r^*/dt^* ;

3- o valor do parâmetro $\Pi_4 = \frac{\Pi_2}{\sqrt{\Pi_1 \cdot \Pi_3}}$ deve ser o mesmo para os dois sistemas, o que é assegurado pela igualdade dos parâmetros Π para os dois sistemas.

2.4 VIBRAÇÃO LIVRE DO MODELO DE ¼ DE CARRO ADIMENSIONAL NÃO AMORTECIDO

Partindo-se da equação diferencial adimensional de movimento para dinâmica vertical de um quarto de carro e fazendo b , z_r e dz_r/dt iguais a zero (ver FIG. 2.1), o que implica em Π_2 , z_r^* e dz_r^*/dt^* iguais a zero, a EQ. 2.26 se reduz à equação EQ. 2.29.

$$\Pi_1 \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \Pi_3 z^* = 0 \quad (2.29)$$

A EQ. 2.29 é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes. A solução geral desta equação tem a forma da EQ. 2.30, de um modo geral, usando expansão em série da solução como usado em OGATA (2006) e DIMAROGONAS (1996).

$$z^*(t^*) = a^* \cdot \cos(\omega^* t^*) + b^* \cdot \text{sen}(\omega^* t^*) \quad (2.30)$$

Usando expressões complexas para as funções harmônicas dadas pela EQ. 2.31, onde $\sqrt{-1} = i$, uma solução harmônica pode ser escrita na forma da EQ. 2.32, onde X^* e p^* são constantes complexas a serem determinadas.

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \text{sen}(x) \quad (2.31)$$

$$z^*(t^*) = X^* e^{p^* t^*} \quad (2.32)$$

A substituição da EQ. 2.32 na EQ. 2.29 conduz à EQ. 2.33, que implica que a EQ. 2.32 é a solução da EQ. 2.29 para qualquer valor de X^* se a EQ. 2.34 valer. Assim, tem-se que p^* é o valor da frequência de oscilação do sistema que modela um quarto de carro não amortecido sujeito a condições iniciais dada na EQ. 2.35.

$$X^* (\Pi_1 \cdot p^{*2} + \Pi_3) = 0 \quad (2.33)$$

$$p^{*2} = -\frac{\Pi_3}{\Pi_1} \quad (2.34)$$

$$p^* = \pm i \cdot \omega_n^* \quad (2.35)$$

$$\omega_n^* = \sqrt{\frac{\Pi_3}{\Pi_1}} = 1 \quad (2.36)$$

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega^*} = 2\pi \quad (2.37)$$

O valor da frequência natural não amortecida do sistema é dado pela EQ. 2.36. A frequência natural de vibração do sistema adimensional do modelo de um quarto de carro não amortecido é sempre igual à unidade para esta parametrização do tempo, e o período, dado pela EQ. 2.37, é sempre igual a 2π .

2.5 VIBRAÇÃO LIVRE DO MODELO DE ¼ DE CARRO ADIMENSIONAL AMORTECIDO

Partindo-se da equação diferencial adimensional de movimento e fazendo z_r e dz_r/dt iguais a zero (ver FIG. 2.1), o que implica em z_r^* e dz_r^*/dt^* iguais a zero (ver FIG 2.2 e equações EQ 2.13 e 2.17), a EQ 2.27 se reduz à EQ. 2.38.

$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \Pi_4 \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + z^* = 0 \quad (2.38)$$

A EQ.2.38 está na forma da EQ. 2.39, com $\omega_n^*=1$ dado pela EQ. 2.36. Assim, tem-se $\zeta^* = \Pi_4/2 = \zeta$ (EQ. 2.40) e a fração de amortecimento, ‘damping ratio’, do sistema adimensional, ζ^* , é igual à do sistema dimensional, ζ , que é igual à metade do parâmetro adimensional Π_4 . Isso revela que a fração de amortecimento ζ não muda para a parametrização do sistema utilizada.

$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + 2 \cdot \zeta^* \cdot \omega_n^* + \omega_n^{*2} = 0 \quad (2.39)$$

$$\zeta^* = \frac{\Pi_4}{2} = \zeta \quad (2.40)$$

Pode-se notar uma correspondência entre os sistemas dimensional e adimensional representados pelas FIG 2.1 e 2.2, respectivamente, em vibrações livres no que se refere ao cálculo da frequência natural não amortecida ω_n e da fração de amortecimento ζ expressas pelas equações EQ. 2.41 e 2.42, respectivamente.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e para o sistema adimensional} \quad \omega_n^* = \sqrt{\frac{\Pi_3}{\Pi_1}} = 1 \quad (2.41)$$

$$\zeta = \frac{b}{2 \cdot \sqrt{m \cdot k}} \quad \text{e para o sistema adimensional} \quad \zeta^* = \frac{\Pi_2}{2 \cdot \sqrt{\Pi_1 \cdot \Pi_3}} = \frac{\Pi_4}{2} \quad (2.42)$$

O parâmetro adimensional Π_4 é o único parâmetro que figura na EQ. 2.38 e com a adequada correspondência expressa na TAB. 2.12, o parâmetro Π_4 pode ser usado para avaliar de maneira rápida o comportamento subcrítico, crítico ou supercrítico do amortecimento do

sistema adimensional (e também do sistema dimensional), que deve ser o mesmo (uma vez que os sistemas são similares).

2.6 SEMELHANÇA DOS MODELOS FÍSICOS

Os primeiros registros da análise de semelhança são devidos a Galileu e à sua teoria da “fraqueza dos gigantes”. O desenvolvimento da análise de semelhança passa pelos estudos de Maxwell e Fourier, entre outros, e prossegue no campo da mecânica dos fluidos. A condução de experimentos em modelos em escala para prever o comportamento de protótipos em tamanho real ainda tem sido amplamente empregada em problemas de fluidos para contornar dificuldades associadas à sua solução numérica, apesar da possibilidade do uso de ‘clusters’ e supercomputadores. O uso desta técnica em sólidos passa por análise de estruturas e, mais recentemente, pela dinâmica de veículos, onde vantagens ligadas ao menor custo e maior segurança dos ensaios em modelos têm despertado o interesse de pesquisadores da área.

Para que um ensaio em modelo possa fornecer dados que, por meio de escalas, representem o comportamento do protótipo em tamanho real, uma das condições necessárias é que a forma de excitação dos dois deve ser semelhante (equivalente). Além disso, o modelo e o protótipo devem ter semelhança geométrica, o que impõe que ambos tenham a mesma forma geométrica e que suas dimensões correspondentes estejam relacionadas por um fator de escala constante. No caso de esforços exercidos por um escoamento sobre um corpo, os escoamentos no modelo em escala e no protótipo devem ser semelhantes. Mais precisamente, os escoamentos no modelo e no protótipo devem ser cinematicamente semelhantes, isto é, as velocidades em pontos correspondentes devem ter a mesma direção, mesmo sentido e devem estar relacionadas por um fator de escala constante. Isto implica que a conformação das linhas de corrente correspondentes dos dois escoamentos devem estar relacionadas por um fator de escala constante. A semelhança cinemática exige também que os regimes de escoamento sejam os mesmos no modelo e no protótipo. A semelhança dinâmica é atingida quando os dois escoamentos apresentam distribuição de forças tais que idênticos tipos de forças sejam paralelas e tenham seus módulos relacionados por um fator de escala constante (FOX e outros (2010)).

As exigências da semelhança dinâmica são mais restritivas. Os escoamentos devem possuir semelhança geométrica e cinemática para serem dinamicamente semelhantes. A semelhança dinâmica é obtida igualando-se os parâmetros Π adimensionais para o modelo e o protótipo.

Por analogia, para analisar o comportamento da dinâmica vertical do protótipo de um veículo modelado como um quarto de carro através do ensaio no modelo em escala, deve-se ter as semelhanças geométrica, cinemática e dinâmica, se possível.

Para a semelhança geométrica, as dimensões do modelo em escala e do protótipo devem estar relacionadas por um fator de escala constante. A semelhança cinemática impõe que as excitações de base em deslocamento e velocidade sejam correspondentes, como será detalhado na seção 2.7.

Finalmente, uma vez que a semelhança cinemática é alcançada, a semelhança dinâmica (mais restritiva) no comportamento do modelo e do protótipo requer que a equação diferencial de governo adimensional (EQ. 2.26 ou EQ. 2.27) seja a mesma para os sistemas, o que é obtido pela igualdade dos parâmetros Π adimensionais do modelo e do protótipo, como nos problemas de fluidos.

2.7 EXCITAÇÃO DE BASE

Embora exista solução analítica para os sistemas adimensionais estudados nas seções 2.4 e 2.5 (vibração livre de 1/4 de carro não amortecida e vibração livre de 1/4 de carro amortecida), o interesse neste trabalho é pelas soluções numéricas. Um dos motivos para isso é o fato de que quando o sistema está submetido a uma vibração forçada, o estudo do comportamento do modelo de um grau de liberdade, como mostrado na FIG 2.1, possui solução analítica difundida para o caso da ação de uma força. No caso de bancada de testes de vibrações de chassis em tamanho real, a entrada para o sistema se dá através de um deslocamento (ou velocidade) prescrito na base, como no modelo da FIG. 2.1. Além disso, a solução numérica permite a previsão do comportamento do protótipo mesmo quando a forma da excitação de base não puder ser facilmente definida por uma função analítica. Por esses motivos, a solução numérica é importante na modelagem do comportamento do veículo e é estudada neste

trabalho. Outro aspecto importante da solução numérica são as possibilidades geradas por ela na solução de problemas de otimização.

A correspondência da excitação de base no modelo e no protótipo decorre da necessidade de semelhança cinemática, como visto anteriormente, e tem por base o domínio adimensional.

Partindo-se da equação diferencial de movimento adimensional, EQ. 2.27, tem-se que a excitação de base é dada por z_r^* ou dz_r^*/dt^* . Para estabelecer a correspondência destas funções adimensionais com as funções dimensionais no protótipo e no modelo em escala, faz-se o estudo a seguir para z_r^* , que vale também para dz_r^*/dt^* .

A base para a determinação da semelhança cinemática em z_r^* e dz_r^*/dt^* se encontra no domínio adimensional, ou seja, estas funções devem ser iguais nas equações adimensionalizadas do modelo e do protótipo, EQ. 2.27, o que é necessário também para a semelhança dinâmica.

2.7.1 DEGRAU

Definindo, portanto, uma excitação de base do tipo degrau de amplitude A^* em $t^* = 1$, no domínio adimensional, como na EQ. 2.43, e considerando as parametrizações dadas em EQ. 2.13, 2.14 e 2.15, tem-se as entradas correspondentes no modelo e no protótipo dadas pelas equações EQ. 2.44 e 2.45, respectivamente.

$$\begin{cases} z_r^* = 0, & \text{se } t^* < 1 \\ z_r^* = A^*, & \text{se } t^* \geq 1 \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\begin{cases} z_{rm}^* = 0, & \text{se } \frac{t}{\tau_m} < 1 \\ z_{rm}^* = A^* \cdot z_{0m}, & \text{se } \frac{t}{\tau_m} \geq 1 \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\begin{cases} z_{rp}^* = 0, & \text{se } \frac{t}{\tau_p} < 1 \\ z_{rp}^* = A^* \cdot z_{0p}, & \text{se } \frac{t}{\tau_p} \geq 1 \end{cases} \quad (2.45)$$

Assim, para simular um degrau de amplitude A_p em $t_p = t_{0p}$ segundos no protótipo, deve-se aplicar ao modelo em escala um degrau de amplitude $A_m = A_p \cdot z_{eqm} / z_{eqp}$ em $t_m = t_{0p} \cdot \tau_m / \tau_p$ segundos, conforme as equações EQ. 2.46, 2.47 e 2.48.

$$\begin{cases} z_{rp} = 0, & \text{se } t_p < t_{0p} \\ z_{rp} = A_p, & \text{se } t_p \geq t_{0p} \end{cases} \quad (2.46)$$

A EQ. 2.46 para o protótipo corresponde à Eq. 2.47 no domínio adimensional. A EQ. 2.47, no domínio adimensional, corresponde à EQ. 2.48 para o modelo em escala.

$$\begin{cases} z_r^* = 0, \Rightarrow \tau_p \cdot t^* < t_{0p} & \text{se } t^* < \frac{t_{0p}}{\tau_p} \\ z_r^* = \frac{A_p}{z_{eqp}}, \Rightarrow \tau_p \cdot t^* > t_{0p} & \text{se } t^* > \frac{t_{0p}}{\tau_p} \end{cases} \quad (2.47)$$

$$\begin{cases} z_{rm} = 0, & \text{se } t_m < \frac{t_{0p} \cdot \tau_m}{\tau_p} \\ z_{rm} = \frac{A_p \cdot z_{eqm}}{z_{eqp}}, & \text{se } t_m > \frac{t_{0p} \cdot \tau_m}{\tau_p} \end{cases} \quad (2.48)$$

Assim, tem-se a relação entre as excitações de base no protótipo e no modelo de modo que estas sejam equivalentes, possibilitando, desta forma, que a excitação de base aplicada ao modelo em escala possa ser usada para prever o comportamento do protótipo.

2.7.2 SENOIDAL

A literatura apresenta gráficos e tabelas que relacionam frequência de vibração e amplitude de deslocamento à sensação de conforto do ser humano a elas exposto. Estes dados são obtidos em testes e expressam a sensação de conforto por critérios subjetivos como ‘imperceptível’, ‘perceptível’, ‘desagradável’, ‘excessivamente desagradável’, etc. Assim, para se realizar ensaios em modelos em escala com o objetivo de se prever o comportamento do protótipo, deve-se determinar a relação que deve existir entre amplitude e frequência necessárias no modelo para reproduzir condições de teste equivalentes ao que se espera no protótipo.

Para fazer a correspondência de uma excitação de base z_r^* (ou dz_r^*/dt^*) senoidal, analisa-se a correspondência entre a frequência adimensional ω^* senoidal, e a frequência dimensional ω .

A frequência dimensional ω tem unidade rad/s e dimensão $[T^{-1}]$ e a dimensão da constante de conversão τ presente na EQ. 2.14 é segundos, s, e sua dimensão é $[T]$. Cada unidade em t^* é dada pela relação da EQ. 2.49, o que leva à relação da EQ. 2.50.

$$1 \cdot t^* = \frac{\tau_{\text{segondos}}}{\tau_{\text{segonds cte}}} \quad (2.49)$$

$$\tau_{seconds\ cte} = \frac{\tau_{seconds}}{1 \cdot t^*} \quad (2.50)$$

Fazendo $\omega^* = \omega \cdot \tau$, como dado pela EQ. 2.51, e substituindo a EQ. 2.50 na EQ. 2.51, tem-se a EQ. 2.52, sendo ω^* dado em radianos por unidade de t^* .

$$\omega^* = \omega \cdot \tau = \omega \cdot \frac{rad}{s} \cdot \tau_{seconds\ cte} \quad (2.51)$$

$$\omega^* = \omega \cdot \frac{rad}{s} \cdot \frac{\tau(s_{cte})}{1 \cdot t^*} = \omega \cdot \tau \left(\frac{rad}{1 \cdot t^*} \right) \quad (2.52)$$

O parâmetro $\omega \cdot \tau$, que é utilizado para a adimensionalização da frequência para este problema, é equivalente ao número de Strouhal, $St = \omega \cdot L / V_\infty$, em problemas de fluidos, quando as condições limites no escoamento são funções senoidais de frequência ω . Considerando uma excitação de base de forma senoidal, tem-se a relação dada na EQ. 2.53, usando as equações EQ. 2.13, 2.15 e 2.51.

$$A^* \cdot \text{sen}(\omega^* \cdot t^*) = \frac{A}{z_{eq}} \cdot \text{sen}(\omega \cdot \tau \cdot t^*) \quad (2.53)$$

Como comentado anteriormente, a base para a determinação da semelhança cinemática encontra-se no domínio adimensional. Para que as excitações de base no modelo e no protótipo sejam equivalentes, estas devem corresponder à mesma função no domínio adimensional $z_r^* = A^* \cdot \text{sen}(\omega^* \cdot t^*)$. Portanto, usando a EQ. 2.52, as excitações de base no protótipo e do modelo devem satisfazer à EQ. 2.54.

$$\frac{A_m}{z_{eq\ m}} \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot \tau_m \cdot t^*) = A^* \cdot \text{sen}(\omega^* \cdot t^*) = \frac{A_p}{z_{eq\ p}} \cdot \text{sen}(\omega_p \cdot \tau_p \cdot t^*) \quad (2.54)$$

Como a amplitude adimensional A^* deve ser a mesma para as duas excitações de base, como dado pela EQ. 2.55, estabelece-se a relação entre as amplitudes da excitação de base no protótipo e no modelo em escala pela EQ. 2.56 .

$$\frac{A_m}{z_{eq\ m}} = \frac{A_p}{z_{eq\ p}} = A^* \quad (2.55)$$

$$A_m = \frac{A_p \cdot z_{eq\ m}}{z_{eq\ p}} \quad (2.56)$$

Para a igualdade da frequência adimensional ω^* , deve-se ter a relação dada pela EQ. 2.57, que conduz à EQ. 2.58, que relaciona a frequência a que deve ser submetido o modelo em escala para reproduzir uma frequência desejada no protótipo.

$$\omega_m \cdot \tau_m = \omega_p \cdot \tau_p = \omega^* \quad (2.57)$$

$$\omega_m = \frac{\omega_p \cdot \tau_p}{\tau_m} \quad (2.58)$$

Assim, para uma excitação de base senoidal, tanto as amplitudes quanto as frequências de excitação são diferentes para o modelo e para o protótipo, e estão relacionadas pelas equações EQ. 2.56 e 2.58, respectivamente.

2.7.3 CONCLUSÃO

Com as relações de amplitude e frequência dadas nas equações EQ. 2.48, 2.56 e 2.58, respectivamente, pode-se de determinar a forma de excitação do modelo para que esta seja equivalente à excitação que se deseja analisar no protótipo, seja ela um degrau ou uma função senoidal (harmônica).

2.8 SEMELHANÇA EM 1/4 DE CARRO – SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Com o objetivo de prever o comportamento do protótipo de um quarto de carro, como mostrado esquematicamente na FIG. 2.1, a partir de um modelo em escala, busca-se um modelo adimensional que possua, se possível, semelhança geométrica, cinemática e dinâmica, inicialmente com o protótipo e depois com o modelo em escala. Aqui o caminho percorrido será do protótipo para o modelo adimensional e do modelo em escala para o modelo adimensional, de modo que o modelo adimensional seja semelhante aos dois primeiros. O caminho para análise de semelhança é mostrado esquematicamente na FIG. 2.3.

Para as simulações apresentadas neste trabalho são usados para o protótipo valores de parâmetros presentes na literatura. Os valores de parâmetros dos modelos em escala foram tomados considerando-se um fator de escala desejado sobre o valor do parâmetro do protótipo. Na fase em que se busca a similaridade dinâmica completa entre o modelo em escala e o protótipo, estes valores são determinados em relações estritas. Na fase de otimização da similaridade dinâmica incompleta, os valores dos parâmetros do modelo em escala variam dentro de uma base discreta que, embora restrita, aumenta em muito o grau de liberdade das variáveis de projeto do modelo em escala, fornecendo milhares de possibilidades de combinações.

Considerando um protótipo de um quarto de carro, como representado esquematicamente na FIG. 2.1, com valores dos parâmetros dados na TAB. 2.4 e condições iniciais dadas por $z_{0p} = -0.1\text{m}$ e $dz_{0p}/dt = 0\text{ m/s}$, obtêm-se as FIG. 2.4 e 2.5, que mostram o resultado da simulação do protótipo no espaço dimensional.

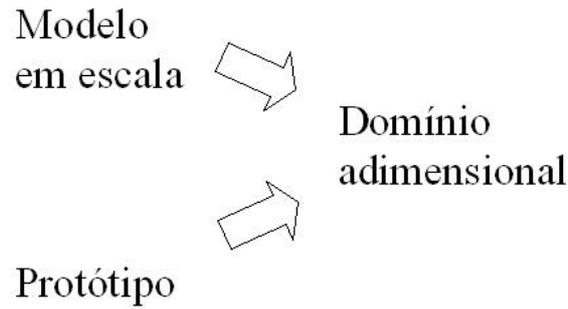


FIG 2.3: Análise de semelhança por meio da adimensionalização.

TAB. 2.4: Parâmetros do protótipo.

m_p	365 kg
k_p	17500 N/m
b_p	0 N.s/m

Para que o modelo em escala seja semelhante ao protótipo deve haver semelhança geométrica, cinemática e dinâmica, asseguradas por um conjunto de condições iniciais correspondentes e pela igualdade dos parâmetros Π adimensionais. Assim, para um modelo em escala com valores dos parâmetros dados na TAB. 2.5 e condições iniciais dadas por $z_{0m} = -0.01$ m e $dz_{0m}/dt = 0$ m/s, tem-se a saída dada nas FIG. 2.6 e 2.7.

TAB. 2.5: Parâmetros do modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	4800 N/m
b_m	0 N.s/m

As FIG. 2.6 e 2.7 mostram o resultado da simulação do modelo em escala no domínio dimensional.

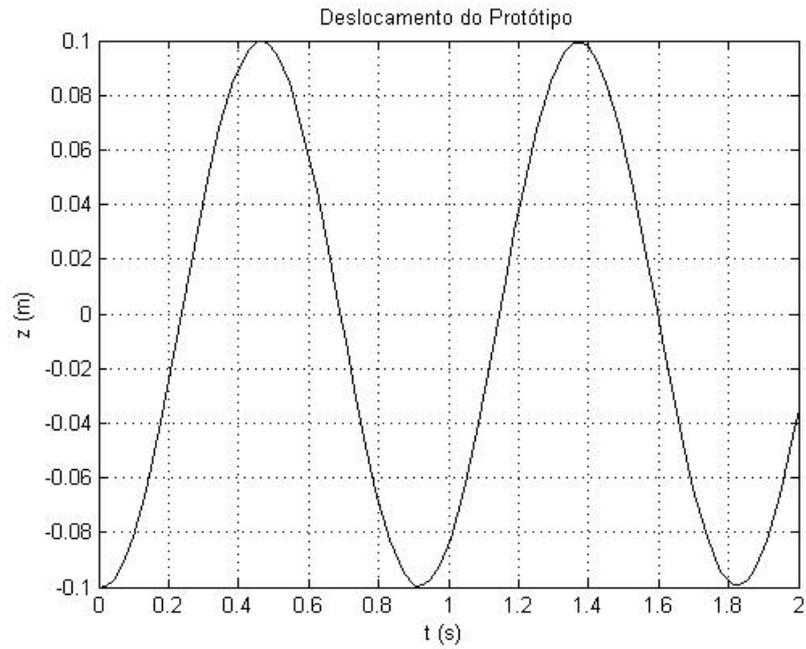


FIG. 2.4: Deslocamento do protótipo.

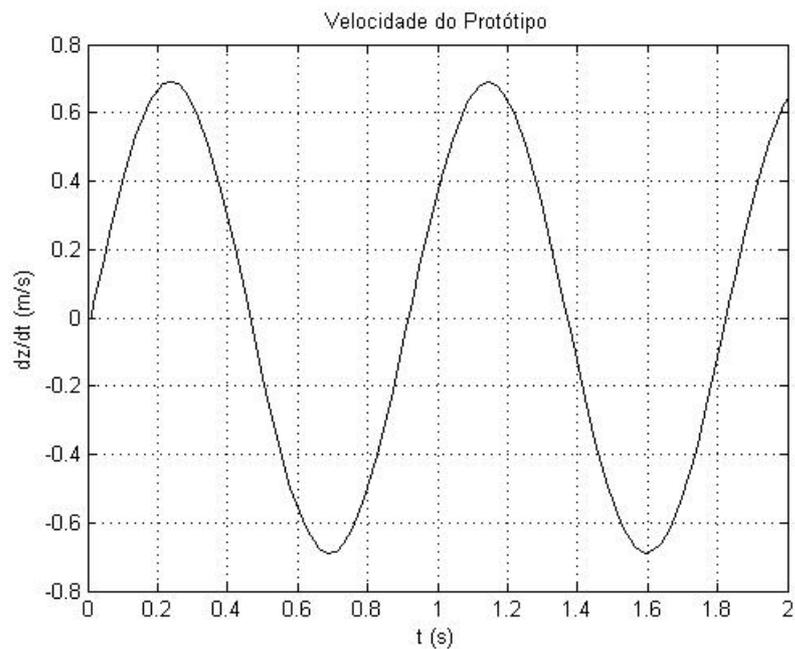


FIG. 2.5: Velocidade do protótipo.

Com as parametrizações dadas nas EQ. 2.12 a 2.17 e empregando a EQ. 2.26 com z_r^* e dz_r^*/dt^* iguais a zero e condições iniciais dadas por $z_0^* = -0.488$ e $dz_0^*/dt^* = 0$, a equação diferencial de governo do sistema adimensional fica como na EQ. 2.59.

$$\Pi_1 \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \Pi_3 \cdot z^* = 0 \quad (2.59)$$

Uma vez que as condições iniciais do protótipo e do modelo são correspondentes e os parâmetros Π adimensionais dos dois sistemas são os mesmos, a EQ. 2.59 representa o sistema adimensional resultante da adimensionalização tanto do protótipo como do modelo. Em consequência, os dois sistemas (protótipo e modelo em escala) apresentam idêntico comportamento no domínio adimensional, como pode ser visto nas FIG. 2.8 e 2.9. Isso é o que permite a predição do comportamento do protótipo através do ensaio do modelo em escala utilizando a análise de semelhança.

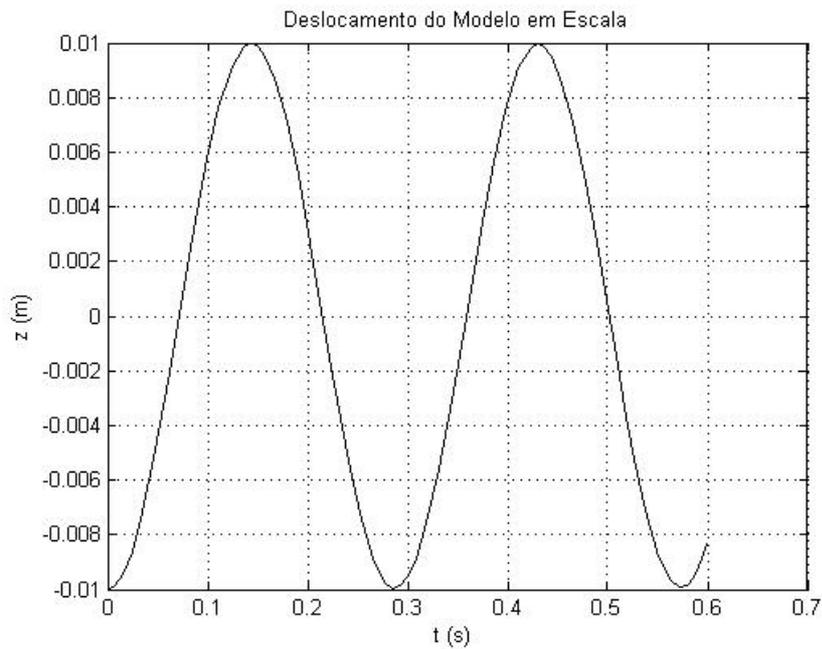


FIG. 2.6: Deslocamento do modelo em escala.

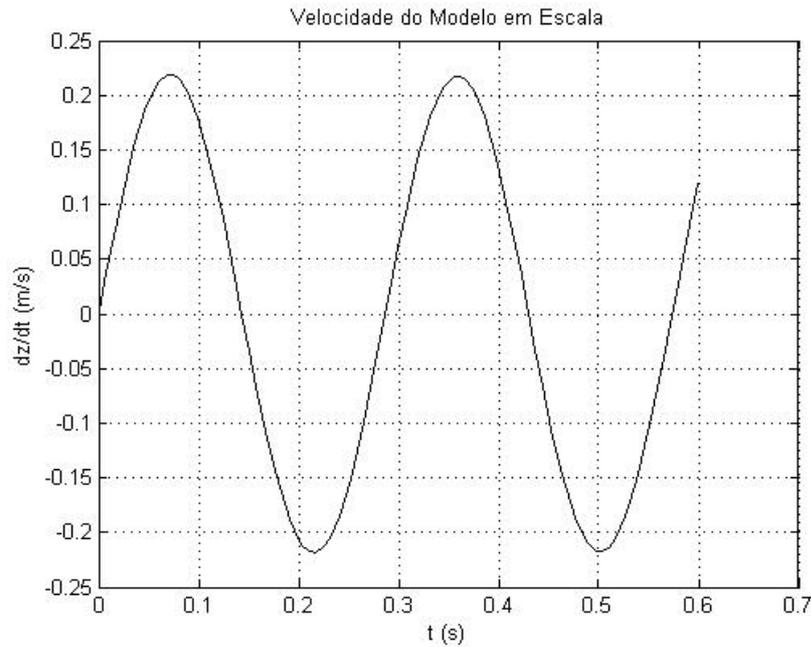


FIG. 2.7: Velocidade do modelo em escala.

Pode-se notar que a frequência natural no protótipo é de $\omega_n = 6.92$ rad/s e o período é de $T = 0.9069$ s, como mostrado na FIG. 2.4.

A frequência é unitária e o período é igual a 2π no sistema adimensional resultante, tanto do protótipo quanto do modelo, para a parametrização do tempo utilizada, o que pode ser visto na FIG. 2.8.

Agora são simulados três sistemas com valores dos parâmetros dados pelas TAB 2.6 a 2.11. As equações adimensionais estão na forma da EQ. 2.18 com dz_r/dt e z_r iguais a zero. As equações adimensionais estão na forma da EQ. 2.38, onde o único parâmetro adimensional que figura é o coeficiente do segundo termo, o parâmetro adimensional Π_4 . As equações adimensionais dos sistemas são dadas pelas EQ. 2.60 a 2.62.

Pelo valor do coeficiente do segundo termo, pode-se inferir o comportamento do amortecimento subcrítico, crítico ou supercrítico dos sistemas conforme a TAB. 2.12.

Os resultados da simulação dos sistemas são dados nas FIG. 2.10, 2.11 e 2.12. Pode-se notar que o comportamento subcrítico, crítico ou supercrítico do amortecimento do sistema adimensional é regido pelo valor do parâmetro adimensional Π_4 , conforme TAB. 2.12.

TAB. 2.6: Sistema 1 - Parâmetros do modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	4800 N/m
b_m	91.02 N.s/m

TAB. 2.7: Sistema 2 - Parâmetros do modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	4800 N/m
b_m	438.18 N.s/m

TAB. 2.8: Sistema 3 - Parâmetros do modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	4800 N/m
b_m	780.18 N.s/m

TAB. 2.9: Sistema 1 - Parâmetros do protótipo.

m_p	365 kg
k_p	17500 N/m
b_p	1050 N.s/m

TAB. 2.10: Sistema 2 - Parâmetros do protótipo.

m_p	365 kg
k_p	17500 N/m
b_p	5044.70 N.s/m

TAB. 2.11: Sistema 3 - Parâmetros do protótipo.

m_p	365 kg
k_p	17500 N/m
b_p	9000 N.s/m

TAB. 2.12: Comportamento do sistema de acordo com o valor de Π_4 .

$0 \leq \Pi_4 < 2$	Amortecimento subcrítico
$\Pi_4 = 2$	Amortecimento crítico
$\Pi_4 > 2$	Amortecimento supercrítico

$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + 0.4154 \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + z^* = 0 \quad (2.60)$$

$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + 2 \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + z^* = 0 \quad (2.61)$$

$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + 3.5610 \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + z^* = 0 \quad (2.62)$$

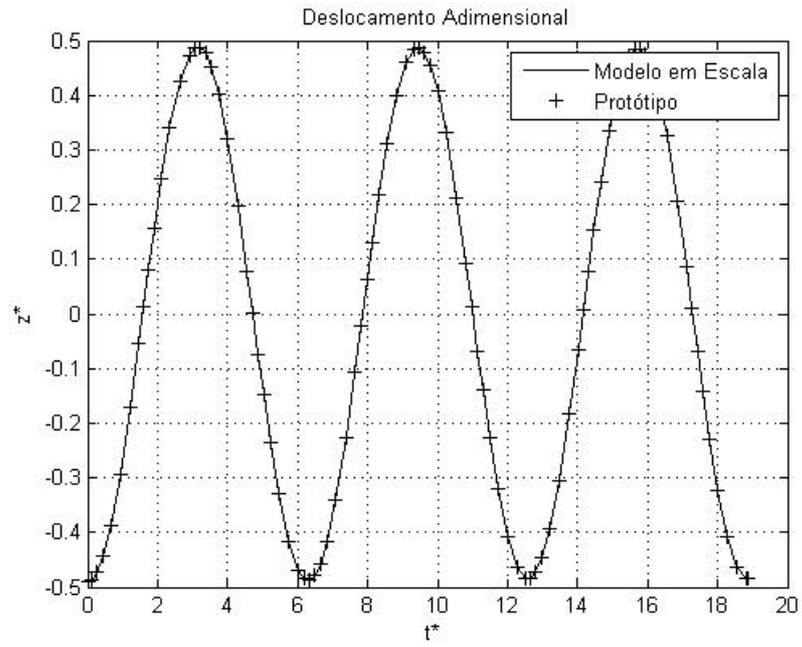


FIG. 2.8: Deslocamento adimensional.

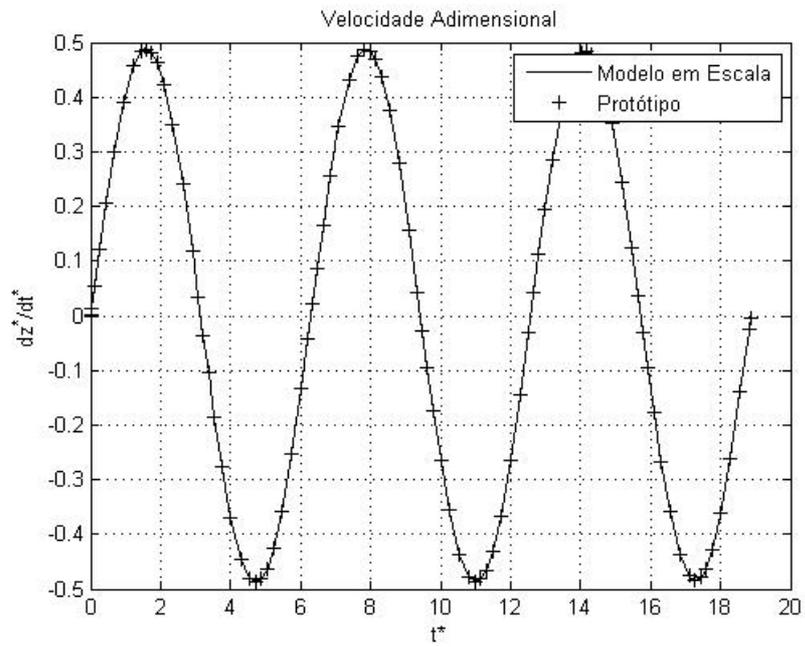


FIG. 2.9: Velocidade adimensional.

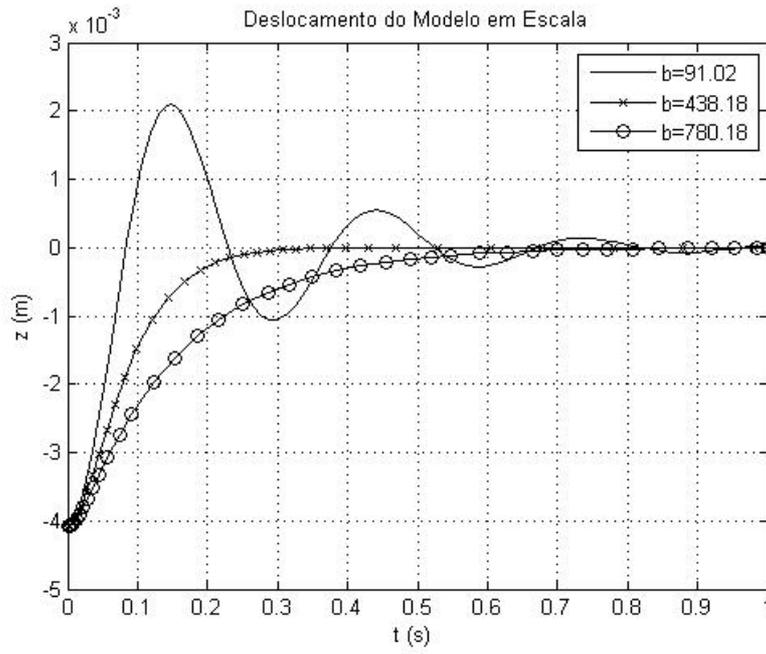


FIG. 2.10: Deslocamento do modelo em escala para diferentes valores de b .

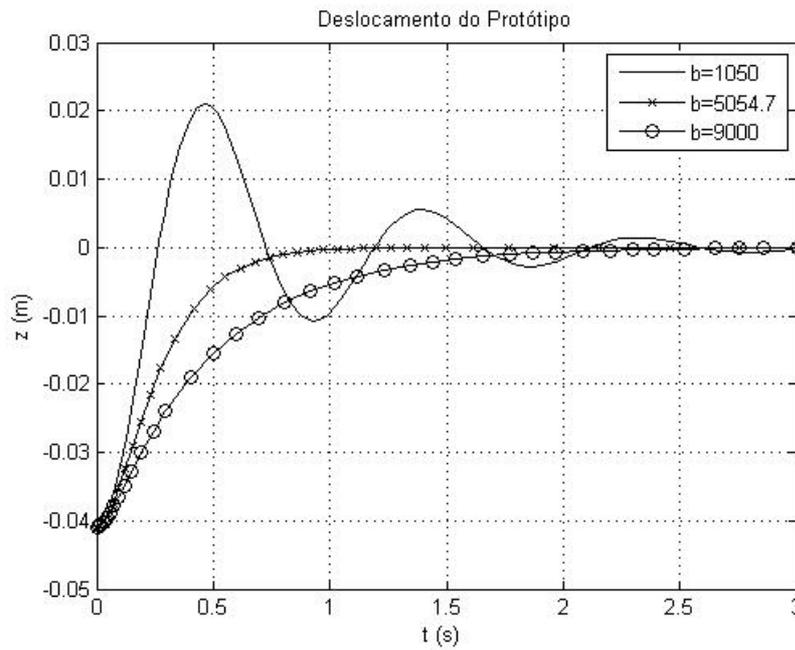


FIG. 2.11: Deslocamento do protótipo para diferentes valores de b .

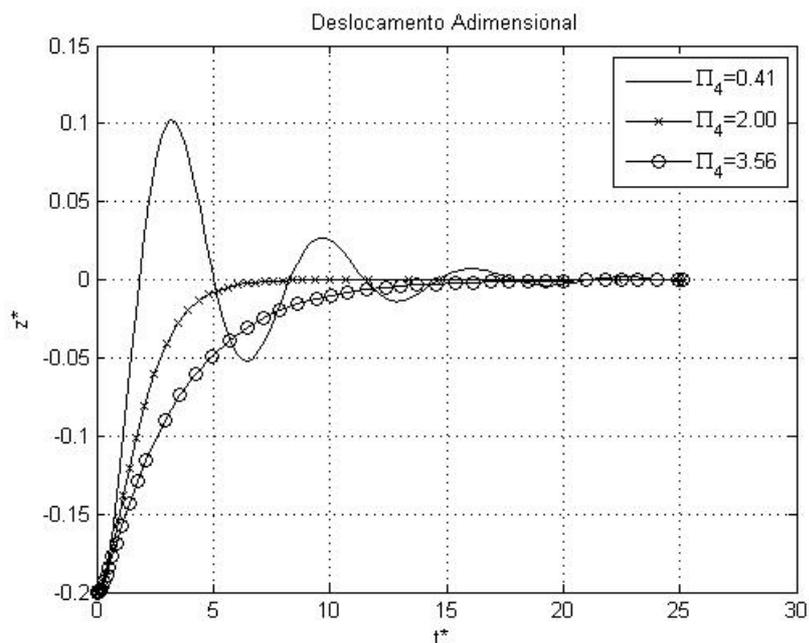


FIG. 2.12: Deslocamento adimensional para diferentes valores de Π_4 .

Uma vez mostrado o caminho que leva do protótipo e do modelo em escala para o modelo adimensional, conforme a FIG. 2.3, parte-se para o objetivo final que é prever o comportamento do protótipo a partir do modelo em escala passando por um modelo adimensional. Este caminho está mostrado esquematicamente na FIG. 2.13.

Para percorrer este caminho, segue-se o seguinte algoritmo:

1- Parte-se do protótipo e determina-se o modelo em escala semelhante, igualando-se condições iniciais, excitações de base e parâmetros adimensionais correspondentes.

2- Constrói-se o modelo adimensional a partir do modelo em escala, usando-se as parametrizações das equações EQ. 2.13, 2.15 e 2.17.

3- Simula-se o modelo adimensional, obtendo-se resultados adimensionais que valem tanto para o modelo quanto para o protótipo, uma vez que a equação diferencial de governo adimensional deve ser a mesma para ambos.

4- Obtém-se os resultados do protótipo sem simulá-lo, partindo-se do modelo adimensional e utilizando-se as equações de parametrização EQ. 2.13, 2.15 e 2.17.

5-Simula-se o protótipo para comparar os valores das variáveis resultantes da previsão do seu comportamento a partir do modelo adimensional gerado do modelo em escala e para a simulação direta do protótipo.

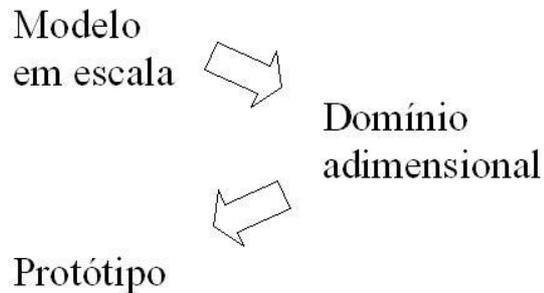


FIG. 2.13: Previsão do comportamento de um protótipo a partir do comportamento de um modelo em escala.

Considerando-se o protótipo cujos parâmetros dão dados na TAB. 2.9 e condições iniciais $z_{0p} = -0.1$ m e $dz_{0p}/dt = 0$ m/s, segue-se o algoritmo apresentado para obter o modelo em escala cujos parâmetros são dados pela TAB. 2.6 e condições iniciais $z_{0m} = -0.01$ m e $dz_{0m}/dt = 0$ m/s. A simulação do modelo em escala resulta nas saídas dadas nas FIG. 2.14 e 2.15.

Para o sistema adimensional, a equação diferencial de governo tem a forma da EQ. 2.38, com condições iniciais $z_0^* = -0.488$ e $dz_0^*/dt = 0$. A simulação do modelo adimensional conduz às saídas das FIG. 2.16 e 2.17. Utilizando-se as relações dadas pelas equações EQ. 2.13, 2.15 e 2.17, obtém-se a saída do protótipo para a entrada dada sem mesmo simulá-lo. Estes resultados estão mostrados nas FIG. 2.18 e 2.19, onde são comparados com os resultados obtidos da simulação direta do protótipo.

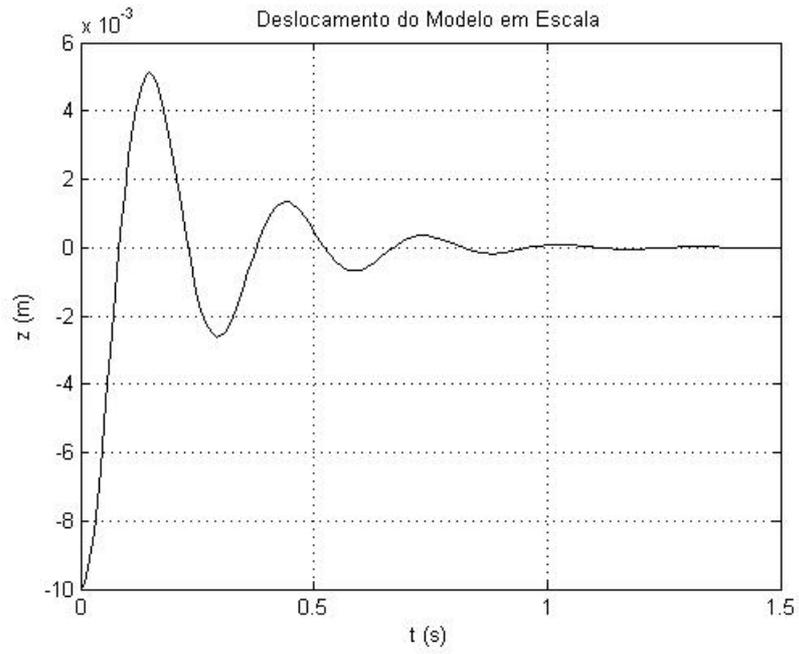


FIG. 2.14: Deslocamento do modelo em escala para condições iniciais.

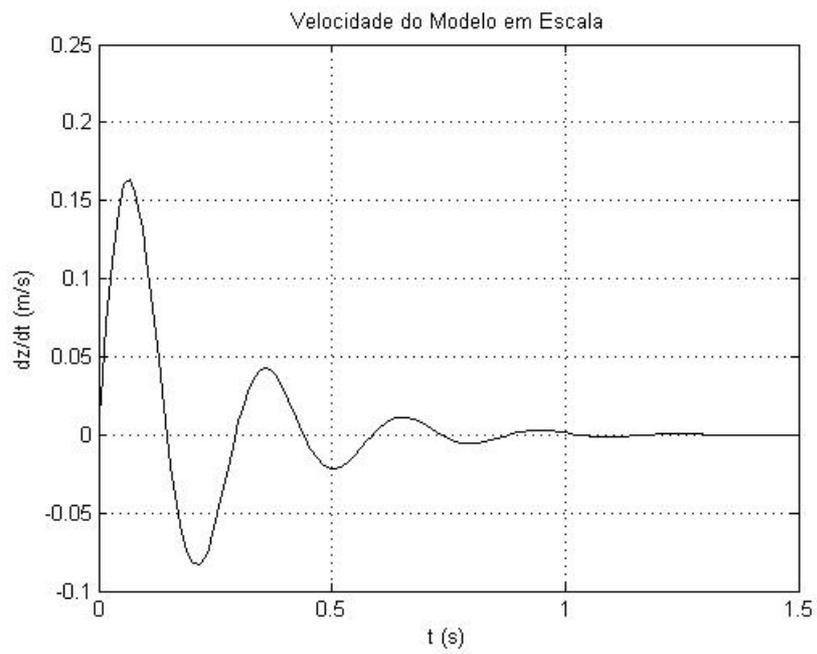


FIG. 2.15: Velocidade do modelo em escala para condições iniciais.

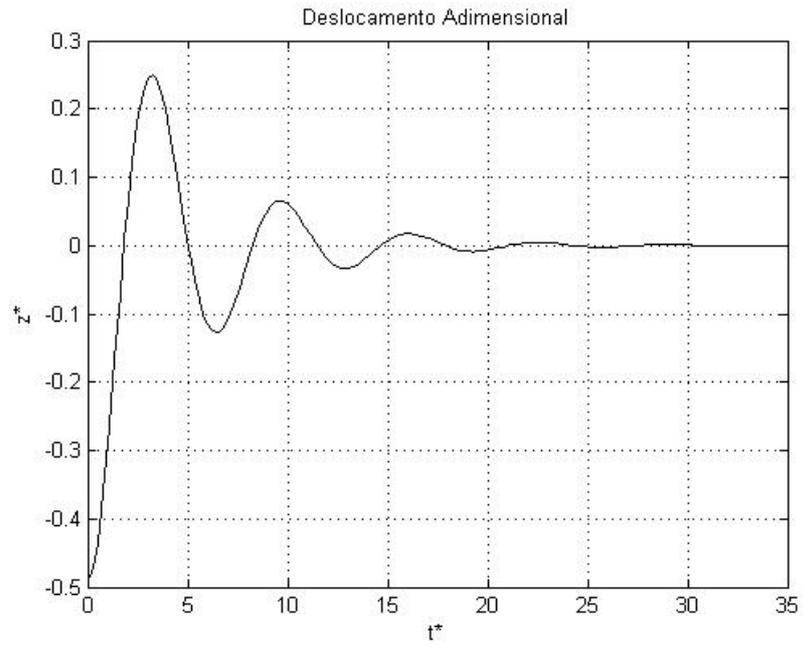


FIG. 2.16: Deslocamento adimensional para condições iniciais.

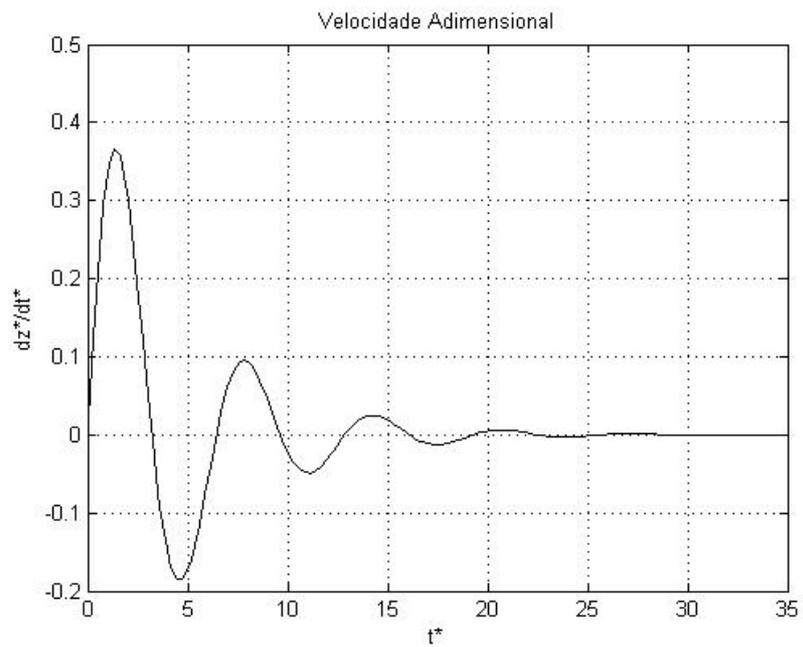


FIG. 2.17: Velocidade adimensional para condições iniciais.

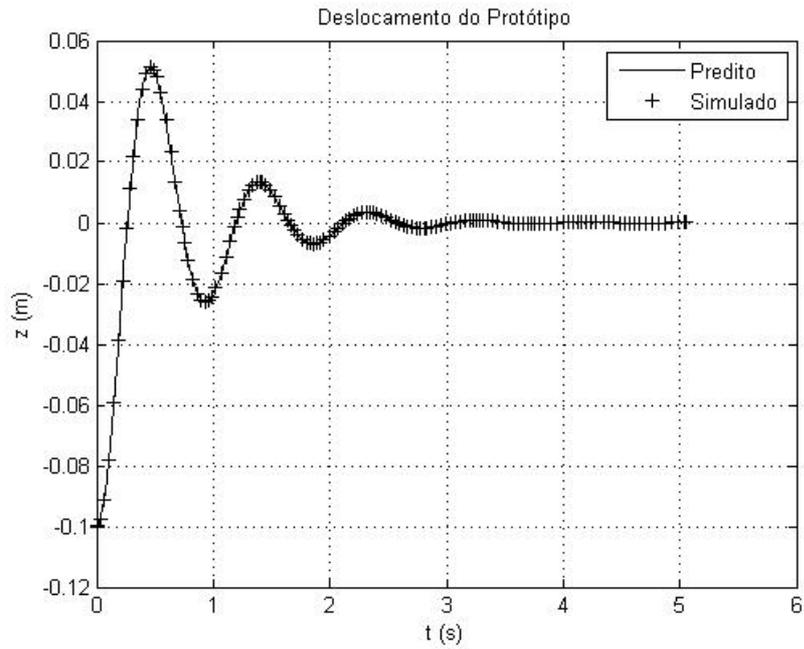


FIG. 2.18: Deslocamento do protótipo para condições iniciais.

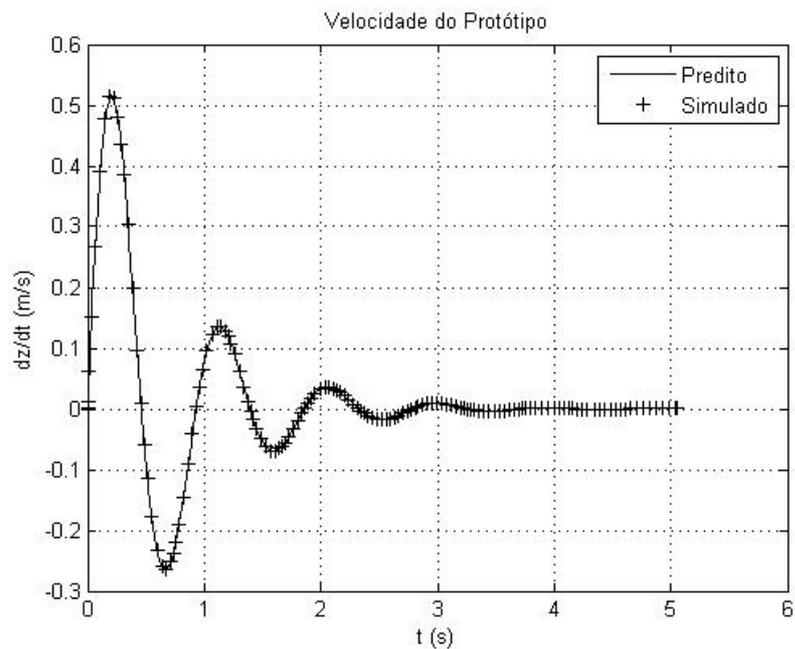


FIG. 2.19: Velocidade do protótipo para condições iniciais.

Considerando-se ainda o protótipo cujos parâmetros são dados pela TAB. 2.9 com condições iniciais $z_{0p} = 0$ m e $dz_{0p}/dt = 0$ m/s e excitação de base em degrau dada pela EQ. 2.46, onde $t_{0p} = 1$ s e $A_p = 0.1$ m, obtém-se o mesmo modelo em escala com parâmetros dados

pela TAB. 2.6, com condições iniciais $z_{0m} = 0$ m e $dz_{0m}/dt = 0$ m/s e excitação de base dada pela EQ. 2.48, onde z_{eqm} e z_{eqp} são dadas pela EQ.2.12, e τ_m e τ_p são dados pela EQ. 2.14 e podem ser calculados com os valores dos parâmetros nas TAB. 2.6 e 2.9.

A simulação do modelo em escala resulta nas saídas dadas pelas FIG. 2.20 e 2.21.

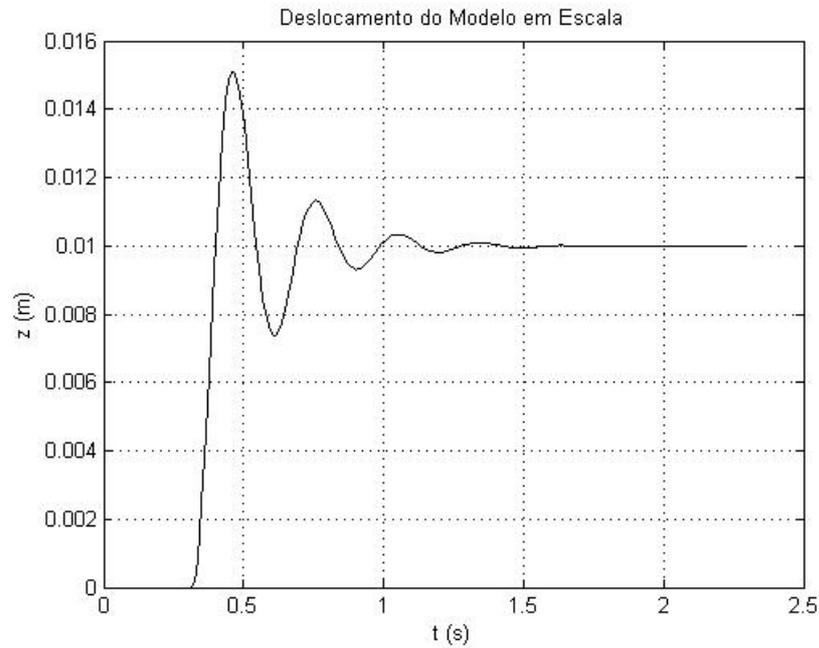


FIG. 2.20: Deslocamento do modelo em escala para excitação de base degrau.

A excitação de base do protótipo é dada pela EQ. 2.46 com $t_{0p} = 1$ s e $A_p = 0.1$ m.

Para o sistema adimensional, a equação diferencial de governo tem a forma da EQ. 2.38 e a excitação de base é dada pela EQ. 2.47. As condições iniciais do sistema adimensional são $z_0^* = 0$ e $dz_0^*/dt = 0$ e z_{eqp} e τ_p dados pelas equações EQ. 2.12 e 2.14, podendo ser calculados pelos valores dos parâmetros dados na TAB. 2.9.

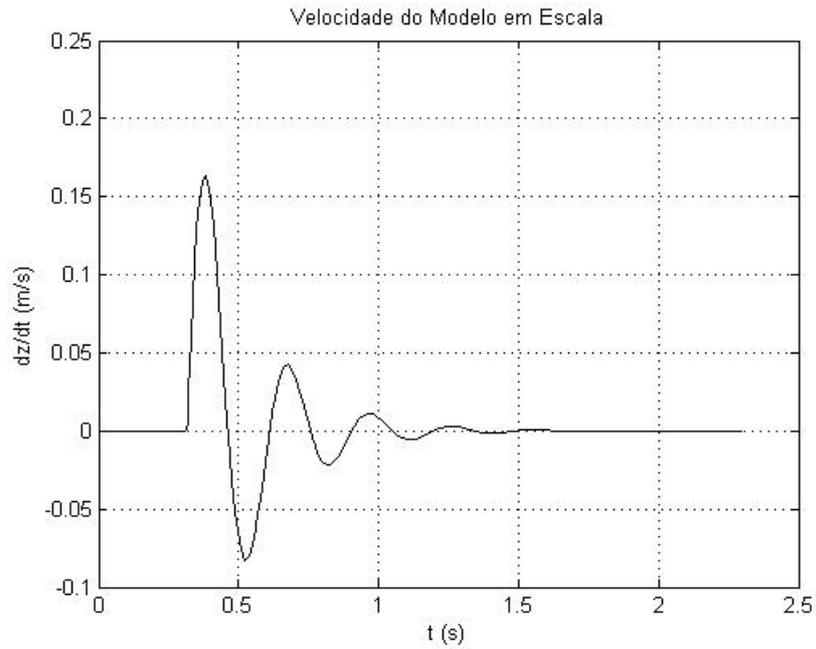


FIG. 2.21: Velocidade do modelo em escala para excitação de base degrau.

A simulação do modelo adimensional conduz às saídas das FIG. 2.22 e 2.23. Utilizando-se as relações dadas pelas equações EQ. 2.13, 2.15 e 2.17, obtém-se a saída do protótipo para a entrada dada sem simulá-lo. Estes resultados estão mostrados nas FIG. 2.24 e 2.25, onde são comparados com os resultados obtidos da simulação direta do protótipo.

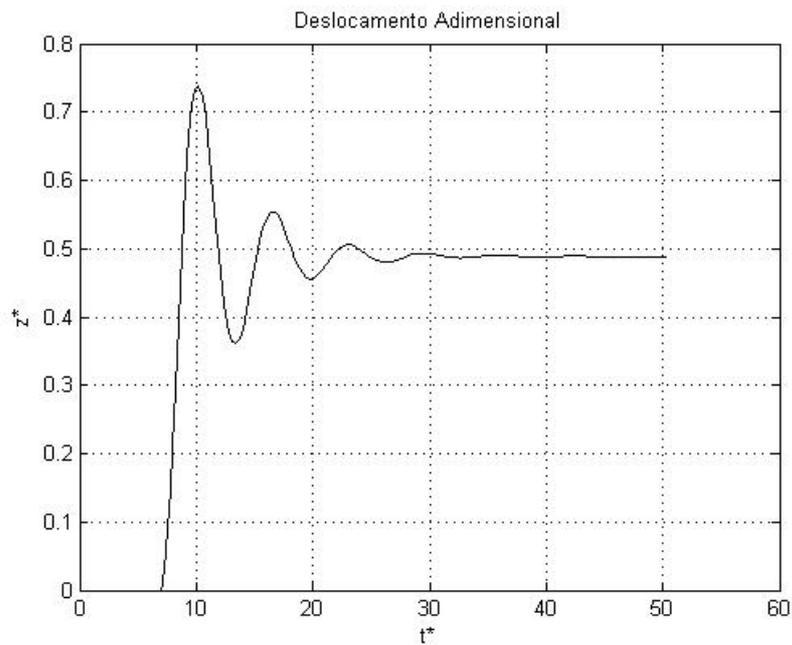


FIG. 2.22: Deslocamento adimensional para excitação de base degrau.

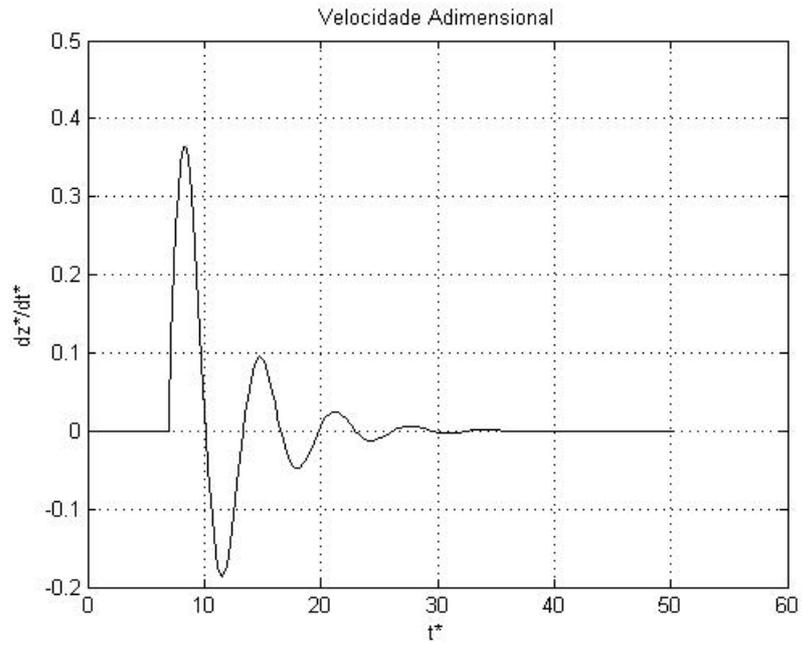


FIG. 2.23: Velocidade adimensional para excitação de base degrau.

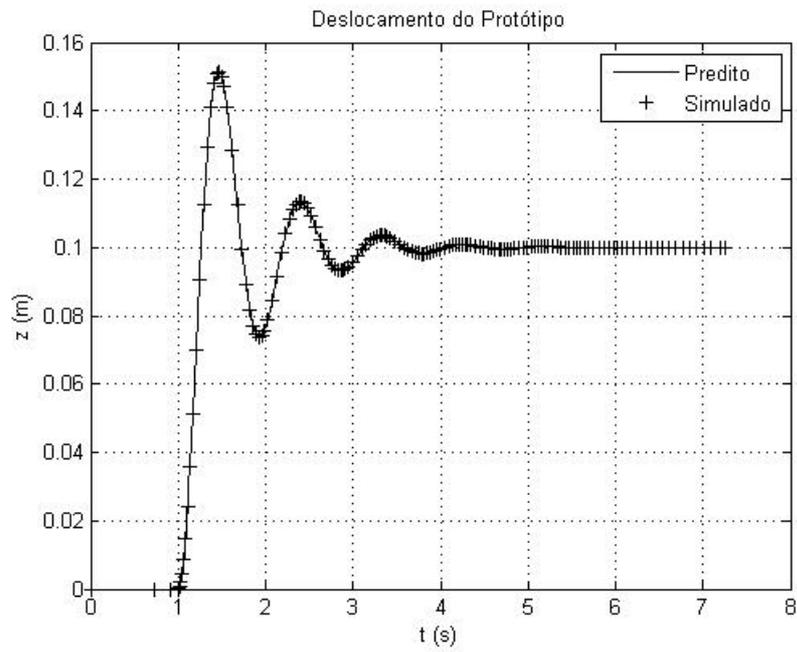


FIG. 2.24: Deslocamento do protótipo para excitação de base degrau.

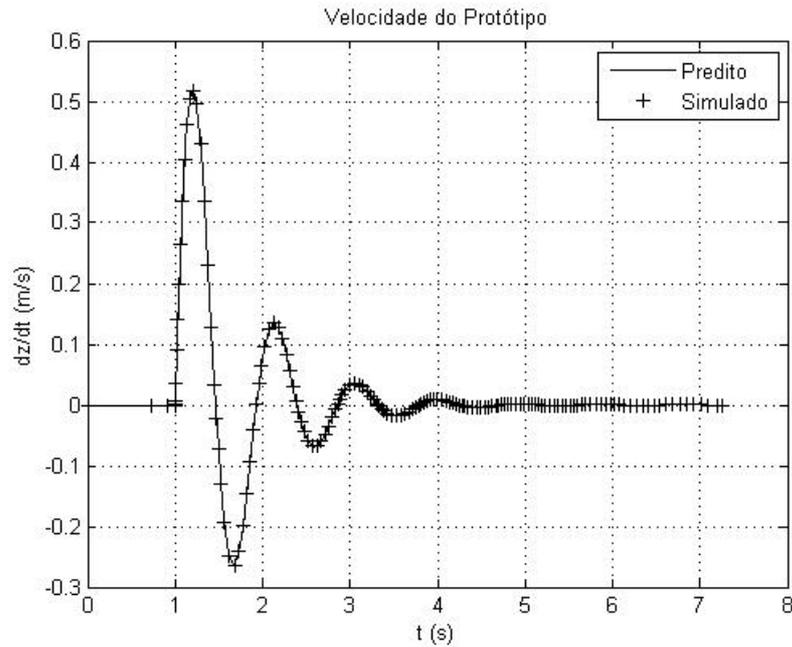


FIG. 2.25: Velocidade do protótipo para excitação de base degrau.

Os mesmos sistemas (protótipo e modelo em escala) usados anteriormente, protótipo cujos parâmetros são dados pela TAB. 2.9, para as mesmas condições iniciais nulas, são simulados seguindo o mesmo algoritmo. Agora a excitação de base senoidal que se deseja simular no protótipo é dada pela EQ. 2.63, com $A_p = 0.1$ m e $\omega_p = 10$ rad/s.

Para esta excitação de base no protótipo, a excitação de base no modelo - com parâmetros dados pela TAB. 2.6 - deve ser dada pela EQ. 2.64, onde A_m é dada pela EQ.2.56 e ω_m pode ser calculado com o uso da EQ. 2.58 e das TAB. 2.6 e 2.9. A simulação do modelo em escala conduz às saídas dadas pelas FIG. 2.26 e 2.27.

$$z_{rp} = A_p \cdot \text{sen}(\omega_p \cdot t) \quad (2.63)$$

$$z_{rm} = A_m \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot t) \quad (2.64)$$

$$z_r^* = A^* \cdot \text{sen}(\omega^* t^*) \quad (2.65)$$

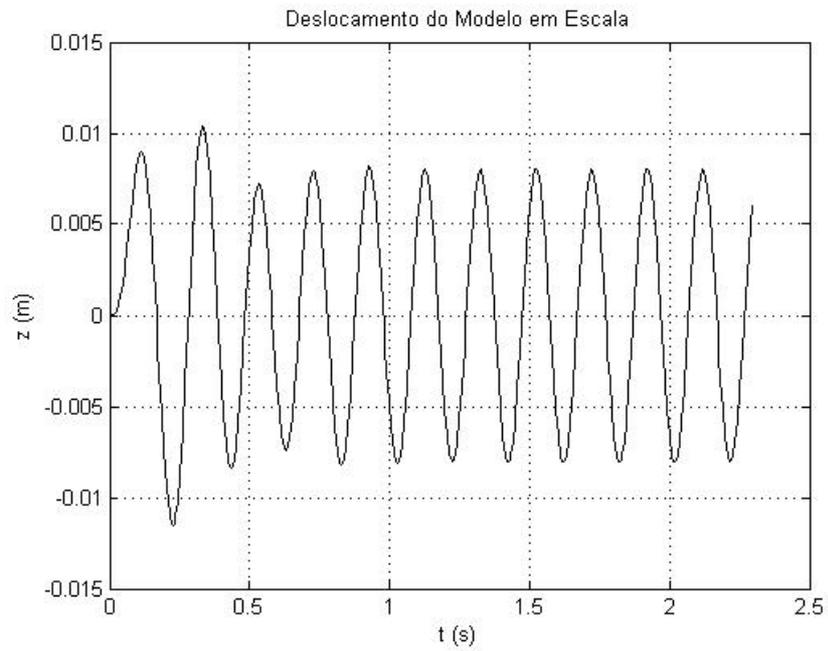


FIG. 2.26: Deslocamento do modelo em escala para excitação de base senoidal.

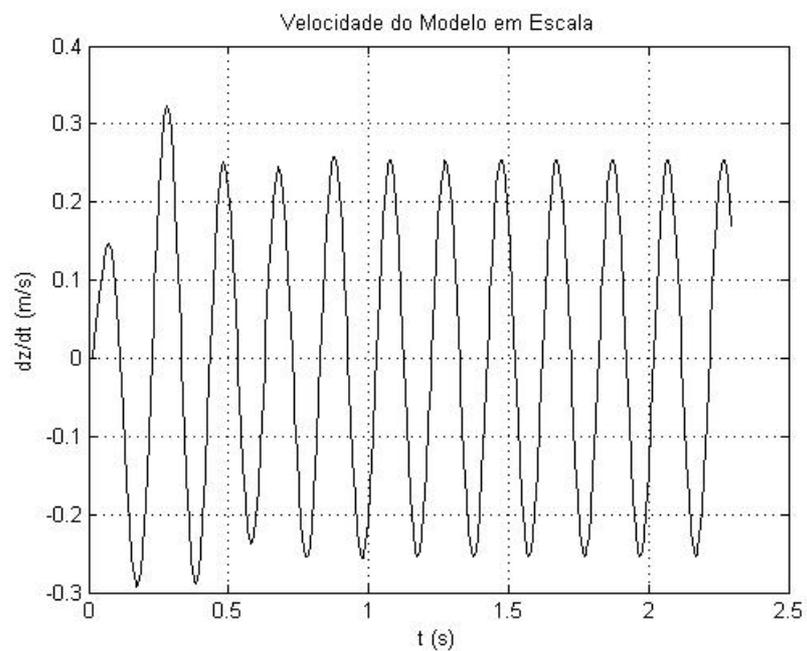


FIG. 2.27: Velocidade do modelo em escala para excitação de base senoidal.

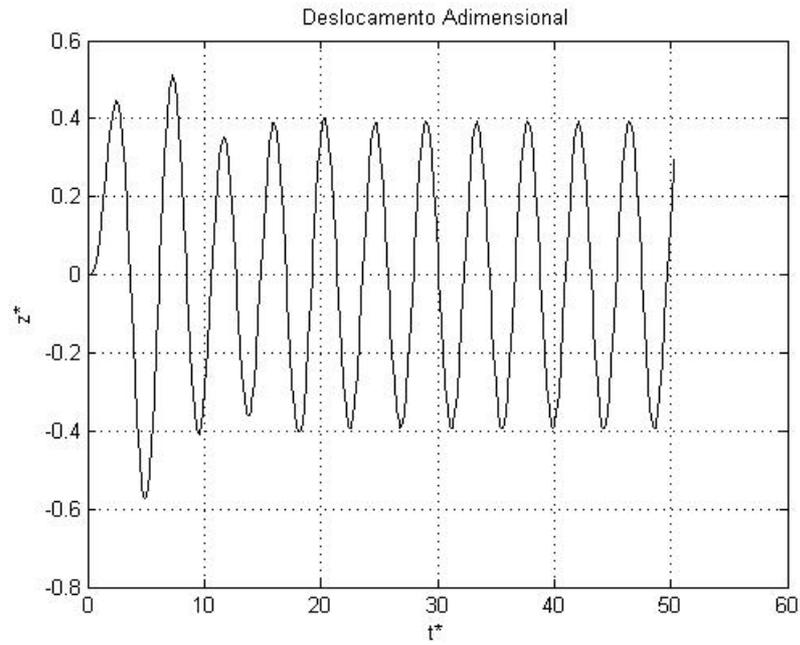


FIG. 2.28: Deslocamento adimensional para excitação de base senoidal.

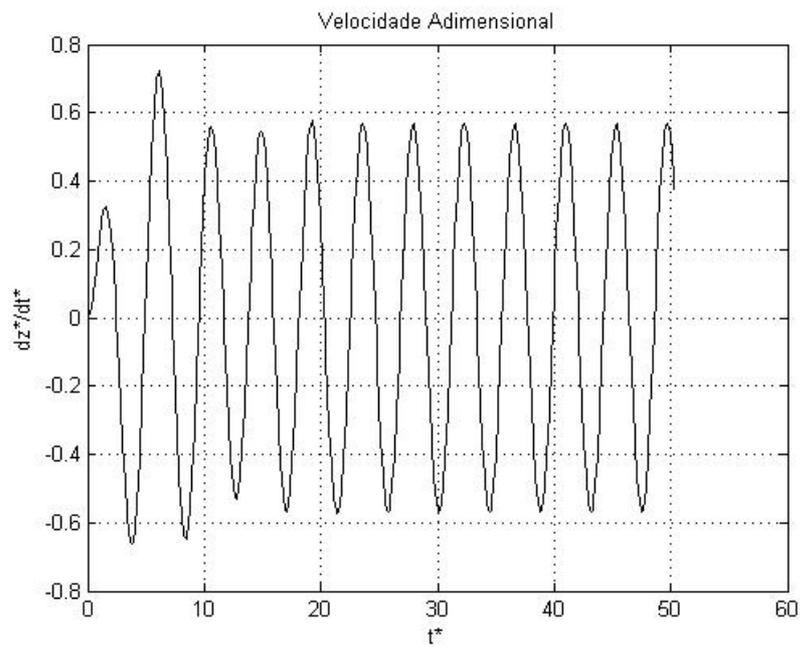


FIG. 2.29: Velocidade adimensional para excitação de base senoidal.

O sistema adimensional obtido a partir do modelo em escala é regido pela EQ.2.38 e tem excitação de base dada pela EQ. 2.65.

As FIG. 2.28 e 2.29 mostram as saídas do sistema adimensional, e as FIG 2.30 e 2.31 mostram os resultados para o protótipo obtidos de duas maneiras: predição através do modelo adimensional e simulação direta do modelo.

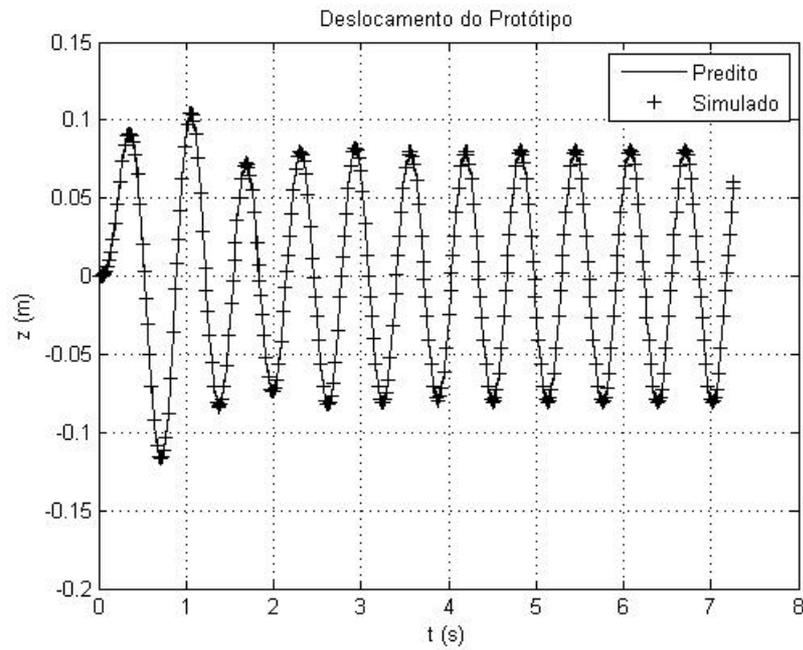


FIG. 2.30: Deslocamento do protótipo para excitação de base senoidal.

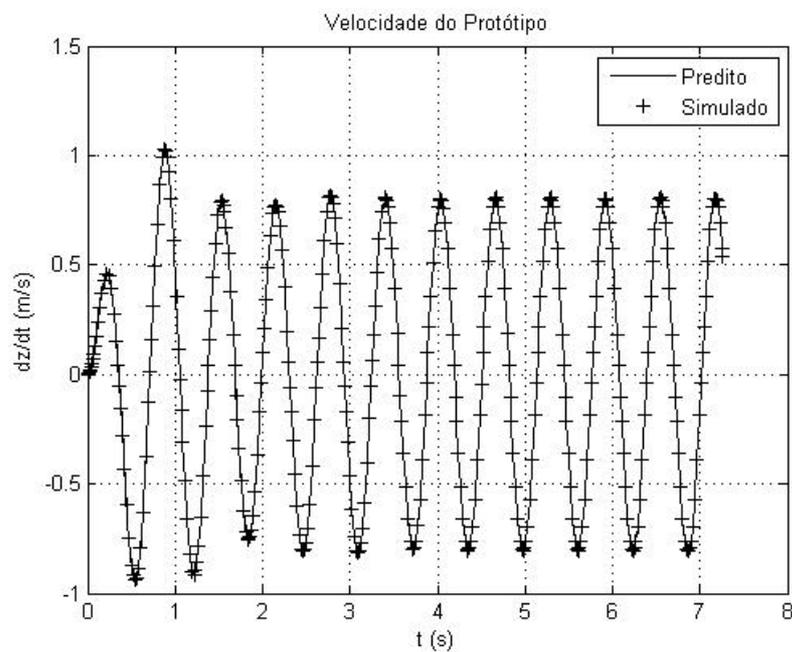


FIG. 2.31: Velocidade do protótipo para excitação de base senoidal.

A coincidência dos resultados para o protótipo obtidos pelos dois caminhos (predição através do modelo adimensional e simulação direta do modelo) mostrada nas FIG. 2.18 e 2.19, 2.24 e 2.25, e 2.30 e 2.31, revela que a análise por semelhança pode ser usada no caso da análise da dinâmica vertical de um quarto de carro.

3 SIMILARIDADE NA DINÂMICA VERTICAL DE ¼ DE CARRO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

3.1 INTRODUÇÃO

Considera-se neste capítulo um modelo de um quarto de carro com dois graus de liberdade (2 DOF) que são o deslocamento vertical da massa suspensa e o deslocamento vertical da massa não suspensa, que é rotulada como massa do pneu m_t , embora contenha outros elementos.

Com o objetivo de fazer um estudo da similaridade aplicada a um quarto de carro com dois graus de liberdade, propõe-se agora iniciar pela adimensionalização das equações diferenciais de governo e deixar a determinação dos parâmetros Π para uma fase posterior. Assim, o primeiro passo consiste na adimensionalização das equações diferenciais de governo do sistema. Para isso, parametrizam-se o deslocamento vertical da massa suspensa z_s , deslocamento vertical da massa não suspensa z_t – que aqui é referido como deslocamento do pneu –, a velocidade vertical da massa suspensa dz_s/dt , a velocidade vertical da massa não suspensa dz_t/dt – que aqui é referida como velocidade do pneu –, e o tempo t . Essas parametrizações permitem estabelecer as relações entre as diferenciais que levam à equação diferencial de governo do domínio dimensional para o domínio adimensional.

Para concluir a adimensionalização do sistema, utilizam-se as relações entre as excitações de base nos domínios dimensional e adimensional desenvolvidas na seção 2.7.

Ao final do capítulo, é apresentada a aplicação da teoria da similaridade ao modelo de 1/4 de carro com dois graus de liberdade, à semelhança do que foi realizado no capítulo 2.

Os resultados mostram que a previsão do comportamento do protótipo a partir do modelo em escala sem simulação do protótipo é possível e conduz à similaridade dinâmica completa também para o modelo de 1/4 de carro com dois graus de liberdade. Os resultados obtidos das simulações mostram a eficiência do enfoque conjunto utilizado, aplicado à dinâmica vertical de 1/4 de carro com dois graus de liberdade.

3.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MOVIMENTO NA FORMA ADIMENSIONAL

Considera-se o sistema constituído por um quarto de carro com dois graus de liberdade, representado esquematicamente na FIG. 3.1.

Para obter a equação diferencial na forma adimensional, inicia-se pela parametrização das coordenadas que representam os deslocamentos verticais da massa suspensa z_s e da massa não suspensa z_t , das velocidades verticais da massa suspensa dz_s/dt e da massa não suspensa dz_t/dt , e do tempo t (necessários para a determinação das condições iniciais das equações diferenciais no domínio adimensional), estabelecendo as relações entre essas grandezas nos espaços dimensional e adimensional.

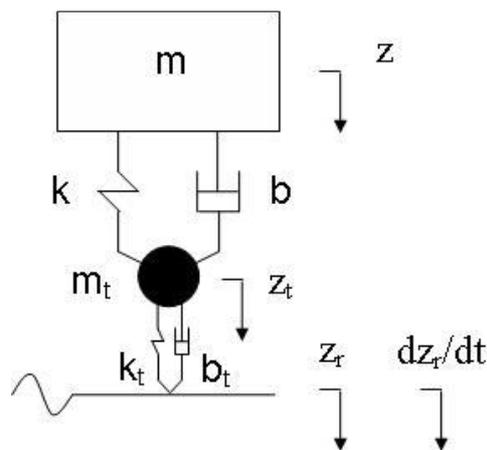


FIG. 3.1: Modelo de 1/4 carro com 2 DOF.

Para a parametrização das coordenadas z_s e z_t , dadas em metros, que se referem aos graus de liberdade de deslocamentos verticais das massas suspensa e não suspensa (conforme FIG. 3.1), utiliza-se o valor da variável z_{eqs} , dado pela EQ. 3.1, que é o deslocamento da massa suspensa do sistema em metros até a posição de equilíbrio estático, considerando-a isoladamente. Desse modo, a variável deslocamento da massa suspensa no domínio adimensional, z_s^* , é dada pela EQ. 3.2, e o deslocamento adimensional da massa não suspensa z_t^* pela EQ. 3.3.

$$z_{eqs} = \frac{m_s \cdot g}{k_s} \quad (3.1)$$

$$z_s^* = \frac{z_s}{z_{eqs}} \quad (3.2)$$

$$z_t^* = \frac{z_t}{z_{eqs}} \quad (3.3)$$

Para a parametrização do tempo t em segundos, define-se um valor de tempo τ em segundos pela EQ. 3.4 e estabelece-se a parametrização do tempo no domínio adimensional t^* pela divisão do tempo t por τ , como dado na EQ. 3.5.

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.4)$$

$$t^* = \frac{t}{\tau} \quad (3.5)$$

Para a parametrização da velocidade, utiliza-se z_{eqs} e τ , definidas nas EQ 3.1 e 3.4, respectivamente, para definir uma velocidade v_{eq} em m/s, dada pela EQ. 3.6. A velocidade v_{eq} , assim definida, não possui um significado físico imediato como z_{eqs} , o que não impede que seja usada para parametrizar as velocidades pelo uso das relações dadas pelas equações EQ. 3.7 e 3.8.

$$v_{eq} = \frac{z_{eqs}}{\tau} \quad (3.6)$$

$$v_s^* = \frac{dz_s^*}{dt^*} = \frac{1}{v_{eqs}} \cdot \frac{dz_s}{dt} \quad (3.7)$$

$$v_t^* = \frac{dz_t^*}{dt^*} = \frac{1}{v_{eqs}} \cdot \frac{dz_t}{dt} \quad (3.8)$$

As equações diferenciais de movimento que regem o sistema modelado, como apresentado esquematicamente na FIG. 3.1, assumindo que as massas partem das posições de equilíbrio estático (origem dos referenciais z_s e z_t coincidentes com as posições de equilíbrio estático), são dadas pelas equações EQ. 3.9 e 3.10.

$$m_s \frac{d^2 z_s}{dt^2} + b_s \left(\frac{dz_s}{dt} - \frac{dz_t}{dt} \right) + k_s (z_s - z_t) = 0 \quad (3.9)$$

$$m_t \frac{d^2 z_t}{dt^2} - b_s \left(\frac{dz_s}{dt} - \frac{dz_t}{dt} \right) - k_s (z_s - z_t) + b_t \left(\frac{dz_t}{dt} - \frac{dz_r}{dt} \right) + k_t (z_t - z_r) = 0 \quad (3.10)$$

Para tornar adimensionais estas equações diferenciais, faz-se o procedimento termo a termo. Assim, considerando as parametrizações expressas nas equações EQ. 3.2, 3.3 e 3.5, respectivamente, chega-se às relações entre diferenciais e variáveis no domínio dimensional e adimensional expressas pelas equações EQ. 3.11 a 3.18.

$$\frac{d^2 z_s}{dt^2} = \frac{d}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \left[\frac{d\left(\frac{z_s}{z_{eqs}}\right)z_{eqs}}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \right] = \frac{z_{eqs}}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z_s^*}{dt^{*2}} \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2 z_t}{dt^2} = \frac{d}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \left[\frac{d\left(\frac{z_t}{z_{eqs}}\right)z_{eqs}}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \right] = \frac{z_{eqs}}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z_t^*}{dt^{*2}} \quad (3.12)$$

$$\frac{dz_s}{dt} = \frac{d\left(\frac{z_s}{z_{eqs}}\right)z_{eqs}}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{z_{eqs}}{\tau} \cdot \frac{dz_s^*}{dt^*} \quad (3.13)$$

$$\frac{dz_t}{dt} = \frac{d\left(\frac{z_t}{z_{eqs}}\right)z_{eqs}}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{z_{eqs}}{\tau} \cdot \frac{dz_t^*}{dt^*} \quad (3.14)$$

$$\frac{dz_r}{dt} = \frac{d\left(\frac{z_r}{z_{eqs}}\right)z_{eqs}}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{z_{eqs}}{\tau} \cdot \frac{dz_r^*}{dt^*} \quad (3.15)$$

$$z_s = \left(\frac{z_s}{z_{eqs}}\right)z_{eqs} = z_{eqs} \cdot z_s^* \quad (3.16)$$

$$z_t = \left(\frac{z_t}{z_{eqs}}\right)z_{eqs} = z_{eqs} \cdot z_t^* \quad (3.17)$$

$$z_r = \left(\frac{z_r}{z_{eqs}}\right)z_{eqs} = z_{eqs} \cdot z_r^* \quad (3.18)$$

Substituindo-se as relações dadas nas EQ. 3.11 a 3.18 nas equações EQ. 3.9 e 3.10, chegam-se às formas das equações diferenciais de movimento do sistema dadas pelas equações EQ. 3.19 e 3.20.

$$\frac{m_s \cdot z_{eqs}}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z_s^*}{dt^{*2}} + \frac{b_s \cdot z_{eqs}}{\tau} \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) + k_s \cdot z_{eqs} \cdot (z_s^* - z_t^*) = 0 \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_t \cdot z_{eqs}}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z_t^*}{dt^{*2}} - \frac{b_s \cdot z_{eqs}}{\tau} \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) - k_s \cdot z_{eqs} \cdot (z_s^* - z_t^*) \\ + \frac{b_t \cdot z_{eqs}}{\tau} \cdot \left(\frac{dz_t^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + k_t \cdot z_{eqs} \cdot (z_t^* - z_r^*) = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

A despeito de as variáveis z_s^* , z_t^* e t^* estarem adimensionalizadas, as equações EQ. 3.19 e 3.20 têm dimensão de força por conta dos coeficientes das variáveis e suas diferenciais. Com o objetivo de tornar essas equações adimensionais, dividem-se as equações pelo produto $m_s \cdot g$, o que faz com que as equações EQ. 3.19 e 3.20 se transformem nas formas adimensionais apresentadas nas equações EQ. 3.21 e 3.22, respectivamente.

$$\frac{m_s \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau^2} \cdot \frac{d^2 z_s^*}{dt^{*2}} + \frac{b_s \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau} \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) + \frac{k_s \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g} \cdot (z_s^* - z_t^*) = 0 \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_t \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau^2} \cdot \frac{d^2 z_t^*}{dt^{*2}} - \frac{b_s \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau} \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) - \frac{k_s \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g} \cdot (z_s^* - z_t^*) \\ + \frac{b_t \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau} \cdot \left(\frac{dz_t^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + \frac{k_t \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g} \cdot (z_t^* - z_r^*) = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dividindo-se as equações EQ. 3.21 e 3.22 por seus respectivos primeiros termos, resultam as equações diferenciais adimensionais 3.23 e 3.24.

$$\frac{d^2 z_s^*}{dt^{*2}} + \frac{b_s}{\sqrt{m_s \cdot k_s}} \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) + (z_s^* - z_t^*) = 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_t^*}{dt^{*2}} - b_s \cdot \sqrt{\frac{m_s}{m_t^2 \cdot k_s}} \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) - \frac{m_s}{m_t} \cdot (z_s^* - z_t^*) \\ + b_t \cdot \sqrt{\frac{m_s}{m_t^2 \cdot k_s}} \cdot \left(\frac{dz_t^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + \frac{k_t \cdot m_s}{k_s \cdot m_t} \cdot (z_t^* - z_r^*) = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Agora que as equações diferenciais de movimento do sistema estão em suas formas adimensionais compactas, parte-se para a determinação dos parâmetros Π adimensionais que garantem similaridade dinâmica completa ao sistema.

3.3 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS Π

Neste ponto, propõe-se um novo caminho para a determinação dos grupos adimensionais – parâmetros Π – que garantem a similaridade dinâmica completa dos sistemas em tamanho real (protótipo) e em tamanho reduzido (modelo em escala).

Observando o desenvolvimento feito nas Seções 2.2 e 2.3 para um sistema simples cuja equação diferencial de governo é conhecida, percebem-se alguns aspectos de interesse:

1- A utilização da matriz dimensional para a determinação dos parâmetros Π conduz a grupos adimensionais que nem sempre possuem um significado físico simples e claro associado a eles.

2- O procedimento de determinação dos parâmetros Π por meio da matriz dimensional é fortemente dependente da vivência do pesquisador e de sua experiência no campo do fenômeno sob investigação. Tal conhecimento é fundamental na etapa da listagem das grandezas que se supõem relevantes para a descrição do fenômeno em estudo, bem como para a determinação das grandezas de base a serem utilizadas.

3- Os grupos adimensionais que possuem um significado físico simples e claro associado a eles são os mais importantes grupos adimensionais já descobertos.

4- A adimensionalização da equação diferencial de governo, para o sistema considerado, leva a diferenciais adimensionais multiplicadas por parâmetros adimensionais, que são iguais aos parâmetros Π adimensionais que possuem um significado físico simples e claro associado a eles.

Estas características sugerem a adoção dos coeficientes adimensionais das diferenciais adimensionais para serem os parâmetros Π adimensionais de interesse do sistema em estudo, com o objetivo de garantir a similaridade dinâmica completa dos sistemas.

Tal sugestão se apóia no fato de que, à semelhança do sistema simples estudado nas Seções 2.2 e 2.3, os coeficientes adimensionais das diferenciais adimensionais possuem duas características básicas que os tornam candidatos a parâmetros Π :

1- eles são adimensionais; e

2- podem ser obtidos por meio do procedimento adotado na Seção 2.2, a partir da matriz dimensional.

Assim, tomando por base as equações diferenciais adimensionais EQ. 3.23 e 3.24 e seguindo o procedimento apresentado no início desta seção, tomam-se os coeficientes das diferenciais adimensionais como sendo os parâmetros Π de interesse do sistema. Desta forma os parâmetros Π adimensionais assumem as formas dadas pelas equações EQ. 3.25 a 3.29, e as equações diferenciais de governo adimensionais do sistema são dadas pelas EQ. 3.30 e 3.31.

$$\Pi_1 = \frac{b_s}{\sqrt{m_s \cdot k_s}} \quad (3.25)$$

$$\Pi_2 = b_s \cdot \sqrt{\frac{m_s}{m_t^2 \cdot k_s}} \quad (3.26)$$

$$\Pi_3 = \frac{m_s}{m_t} \quad (3.27)$$

$$\Pi_4 = b_t \cdot \sqrt{\frac{m_s}{m_t^2 \cdot k_s}} \quad (3.28)$$

$$\Pi_5 = \frac{k_t \cdot m_s}{k_s \cdot m_t} \quad (3.29)$$

$$\frac{d^2 z_s^*}{dt^{*2}} + \Pi_1 \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) + (z_s^* - z_t^*) = 0 \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_t^*}{dt^{*2}} - \Pi_2 \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) - \Pi_3 \cdot (z_s^* - z_t^*) \\ + \Pi_4 \cdot \left(\frac{dz_t^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + \Pi_5 \cdot (z_t^* - z_r^*) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.4 SEMELHANÇA DE UM QUARTO DE CARRO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE – SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Uma vez mostrado o caminho que leva do protótipo e do modelo em escala para o modelo adimensional, conforme ilustrado na FIG. 2.3, parte-se para o objetivo final que é prever o

comportamento do protótipo a partir do modelo em escala, passando por um modelo adimensional. Este caminho está mostrado esquematicamente na FIG 3.2.

Para percorrer este caminho, segue-se o critério de seleção de parâmetros apresentado na Seção 2.8. A sequência consiste em:

- 1- determinar os valores esperados dos parâmetros do protótipo por meio do projeto conceitual (como não se dispõe de um projeto conceitual, neste trabalho acadêmico foram tomados valores presentes na literatura);
- 2- selecionar um parâmetro do protótipo (no caso foi tomada a massa) para servir de base para o fator de escala que se pretende;
- 3- determinar o parâmetro (no caso presente, a massa) do modelo através do fator de escala desejado;
- 4- com base nos parâmetros Π , determinar os valores dos demais parâmetros do modelo em escala.

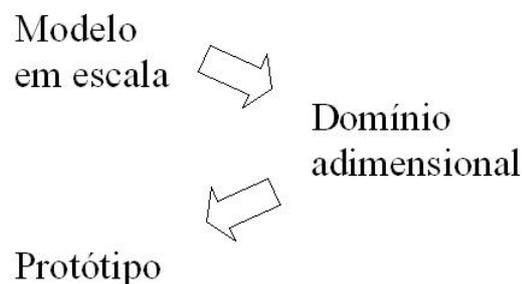


FIG. 3.2: Previsão do comportamento de um protótipo a partir do comportamento de um modelo em escala.

Com o objetivo de prever o comportamento dinâmico do protótipo, segue-se o algoritmo, partindo-se agora de um modelo em escala de um quarto de carro com dois graus de liberdade, representado esquematicamente na FIG. 3.1. Os parâmetros adotados para o modelo em escala são dados na TAB.3.1 e as condições iniciais são dadas por $z_{0sm} = -0.01$ m, $z_{0tm} = 0$ m, $dz_{0sm}/dt = 0$ m/s e $dz_{0tm}/dt = 0$ m/s. O comportamento dimensional do modelo em escala é regido pelo sistema de equações diferenciais dado pelas equações EQ. 3.9 e 3.10.

TAB. 3.1: Parâmetros do modelo em escala.

m_{sm}	10 kg
k_{sm}	4800 N/m
b_{sm}	91.021 N.s/m
m_{tm}	0.959 kg
k_{tm}	68642.48 N/m
b_{tm}	43.343 N.s/m

Os parâmetros adotados para o protótipo são dados na TAB. 3.2 e as condições iniciais para o protótipo são $z_{0sp} = -0,1$ m, $z_{0tp} = 0$ m, $dz_{0sp}/dt = 0$ m/s e $dz_{0tp}/dt = 0$ m/s. O comportamento dimensional do protótipo também é regido pelo sistema de equações diferenciais dado pelas equações EQ. 3.9 e 3.10.

TAB. 3.2: Parâmetros do protótipo.

m_{sp}	365 kg
k_{sp}	17500 N/m
b_{sp}	1050 N.s/m
m_{tp}	35 kg
k_{tp}	250000 N/m
b_{tp}	500 N.s/m

O comportamento adimensional do sistema é regido pelo sistema de equações diferenciais composto pelas equações EQ. 3.30 e 3.31, onde as condições iniciais são dadas por $z_{0s}^* = -0.488$, $z_{0t}^* = 0$, $dz_{0s}^*/dt^* = 0$ e $dz_{0t}^*/dt^* = 0$ e os parâmetros Π , que são dados pelas equações EQ. 3.25 a 3.29, tem seus valores dados na TAB. 3.3.

TAB. 3.3: Parâmetros Π .

Π_1	0.415
Π_2	4.322
Π_3	10.428
Π_4	2.061
Π_5	148.979

Partindo-se dos resultados do sistema adimensional gerados a partir do modelo em escala e, utilizando-se as relações dadas pelas equações EQ 3.1, 3.4 e 3.6, obtém-se a saída do protótipo para as condições iniciais dadas sem simulá-lo. Estes resultados de deslocamento da massa suspensa, velocidade da massa suspensa, deslocamento do pneu e velocidade do pneu estão mostrados nas FIG. 3.3 a 3.6, onde são comparados com os resultados obtidos da simulação direta do protótipo.

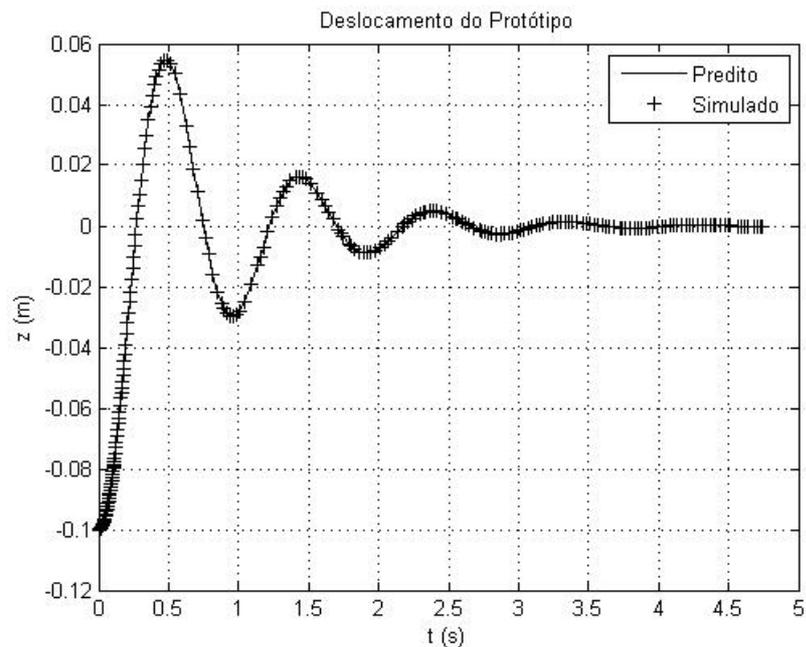


FIG. 3.3: Deslocamento da massa suspensa do protótipo para condições iniciais.

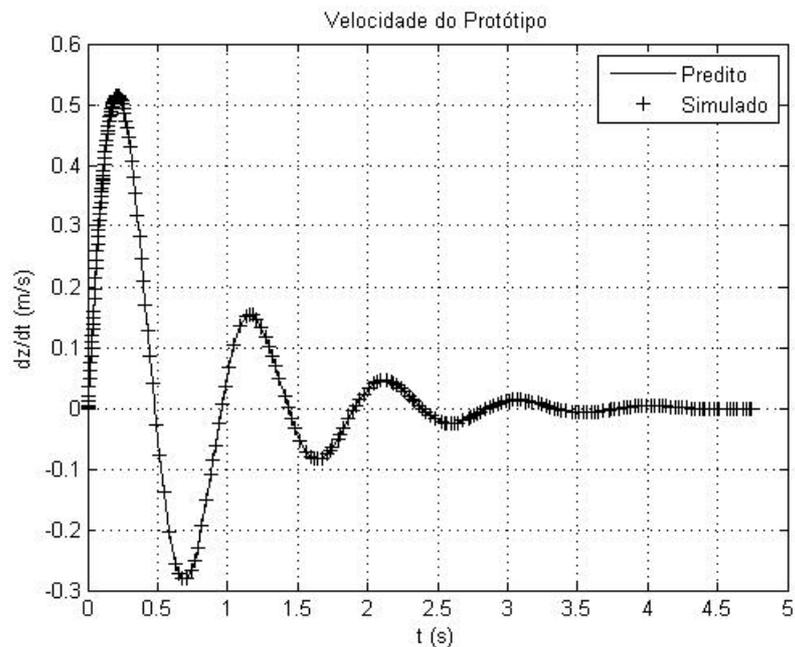


FIG. 3.4: Velocidade da massa suspensa do protótipo para condições iniciais.

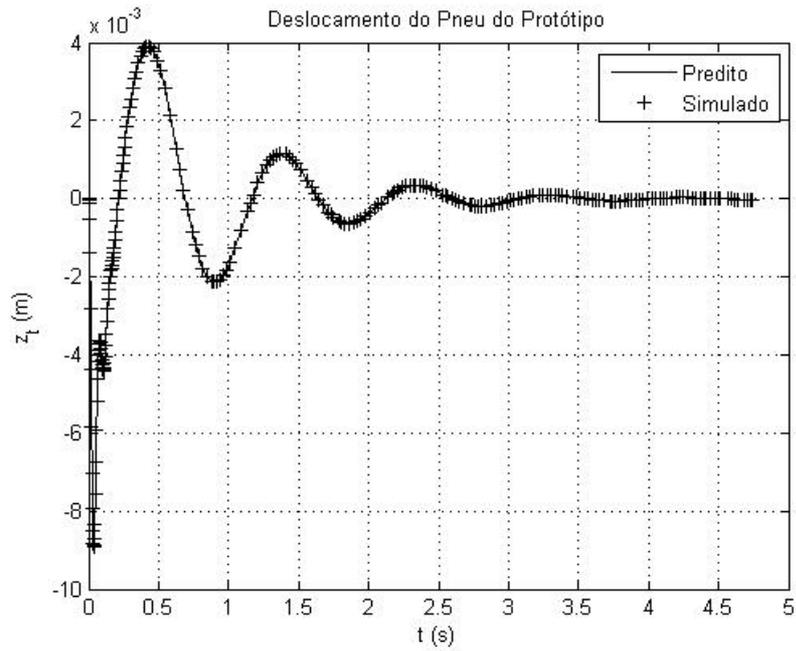


FIG. 3.5: Deslocamento do pneu do protótipo para condições iniciais.

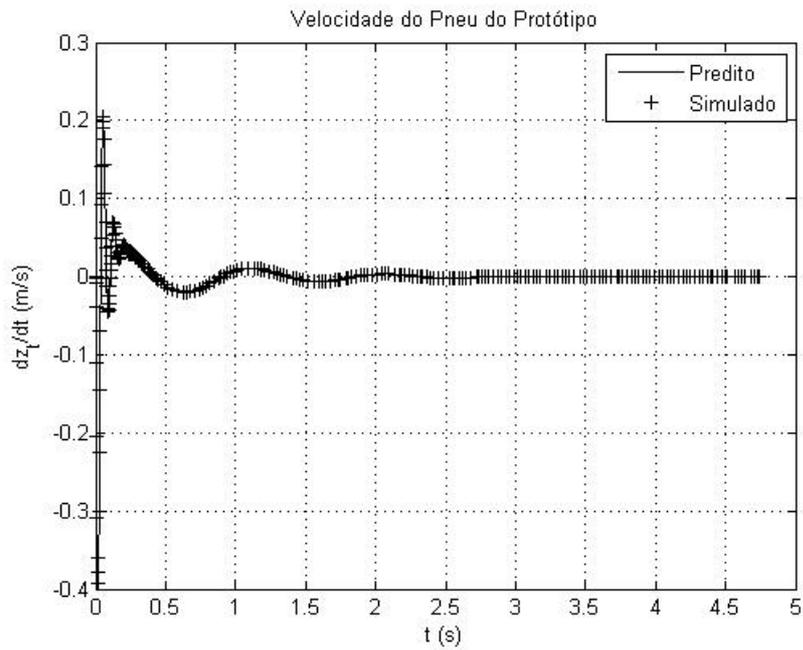


FIG. 3.6: Velocidade do pneu do protótipo para condições iniciais.

Considerando-se o protótipo cujos parâmetros são dados pela TAB. 3.1 com condições iniciais nulas e excitação de base em degrau dada pela EQ. 2.46, onde $t_{0p} = 1s$ e $A_p = 0,1 m$, obtém-se o mesmo modelo em escala com parâmetros dados pela TAB. 3.2, com condições

iniciais também nulas e excitação de base dada pela EQ. 2.48. Aqui, z_{eqsm} e z_{eqsp} são dadas pela EQ. 3.1, τ_m e τ_p são dados pela EQ. 3.3 e podem ser calculados com os valores dos parâmetros nas TAB. 3.1 e 3.2.

Partindo-se dos resultados do sistema adimensional gerado a partir do modelo em escala e utilizando-se as relações dadas pelas equações EQ. 3.1, 3.4 e 3.6, obtém-se a saída do protótipo para a entrada em degrau sem simulá-lo. Estes resultados de deslocamento da massa suspensa, velocidade da massa suspensa, deslocamento do pneu e velocidade do pneu estão mostrados nas FIG. 3.7 a 3.10, onde são comparados com os resultados obtidos da simulação direta do protótipo.

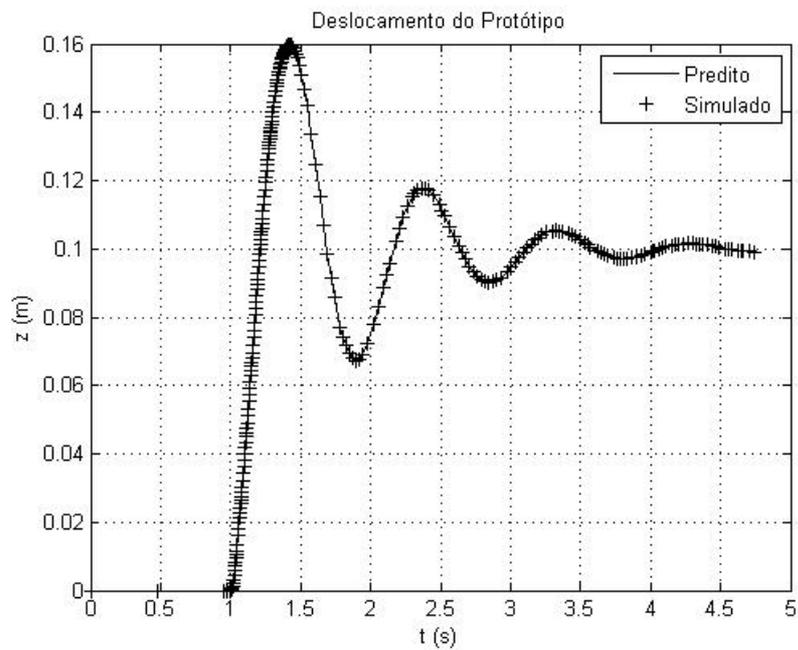


FIG. 3.7: Deslocamento da massa suspensa do protótipo para excitação de base degrau.

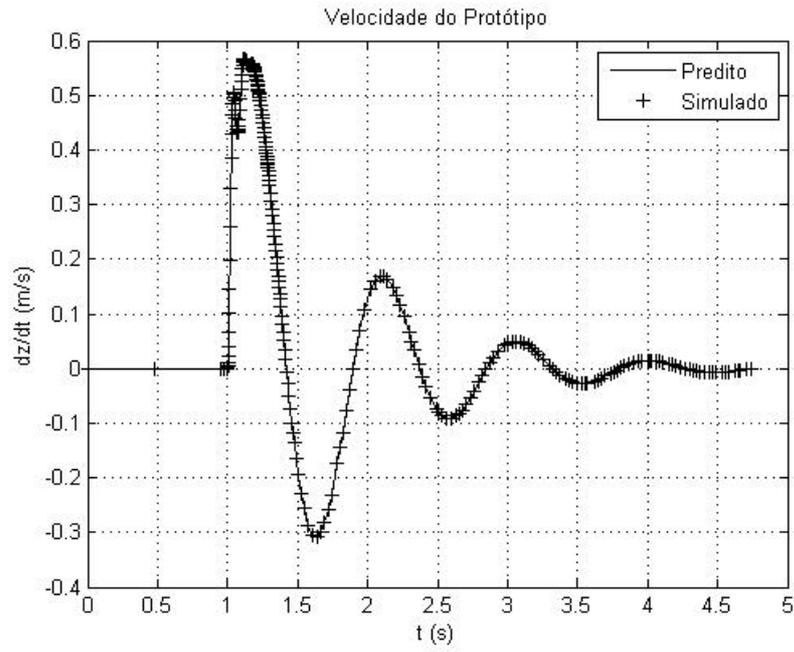


FIG. 3.8: Velocidade da massa suspensa do protótipo para excitação de base degrau.

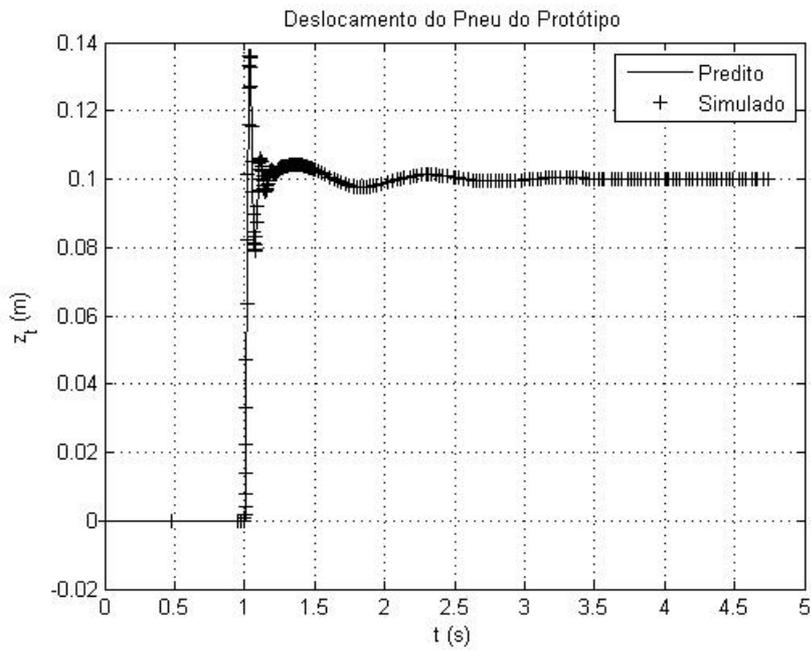


FIG. 3.9: Deslocamento do pneu do protótipo para excitação de base degrau.

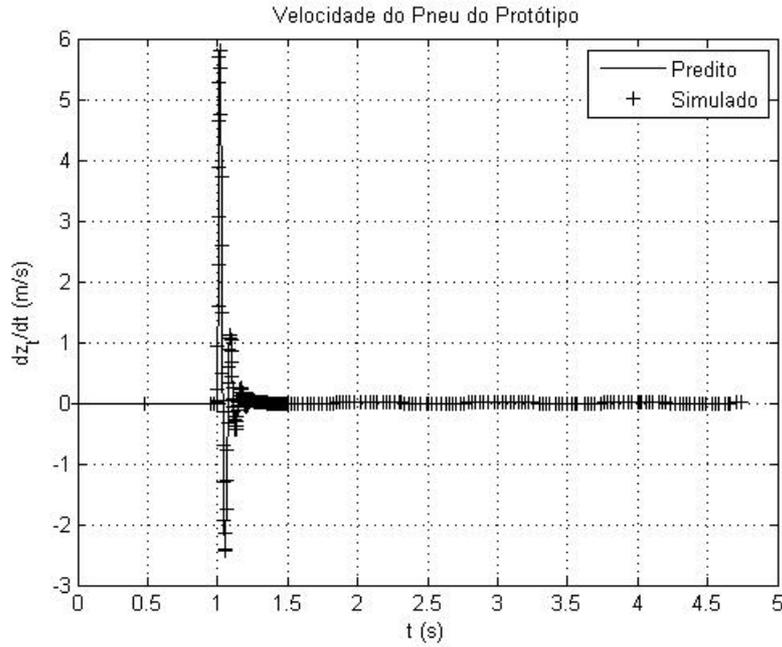


FIG. 3.10: Velocidade do pneu do protótipo para excitação de base degrau.

Considera-se agora o mesmo protótipo cujos parâmetros são dados pela TAB. 3.1 para condições iniciais também nulas e sujeito à uma excitação de base senoidal $z_{rp} = A_p \cdot \text{sen}(\omega_p \cdot t)$ dada pela EQ. 3.32, com $A_p = 0,1$ m e $\omega_p = 10$ rad/s.

Para esta excitação de base no protótipo, tem-se que a excitação de base no modelo deve ser dada pela EQ. 3.33 onde A_m é dada pela EQ. 2.56. Calculam-se z_{eqsm} e z_{eqsp} com o uso da EQ. 3.1 e das TAB. 3.1 e 3.2.

$$z_{rp} = A_p \cdot \text{sen}(\omega_p \cdot t) \quad (3.32)$$

$$z_{rm} = A_m \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot t) \quad (3.33)$$

$$z_r^* = A^* \cdot \text{sen}(\omega^* \cdot t^*) \quad (3.34)$$

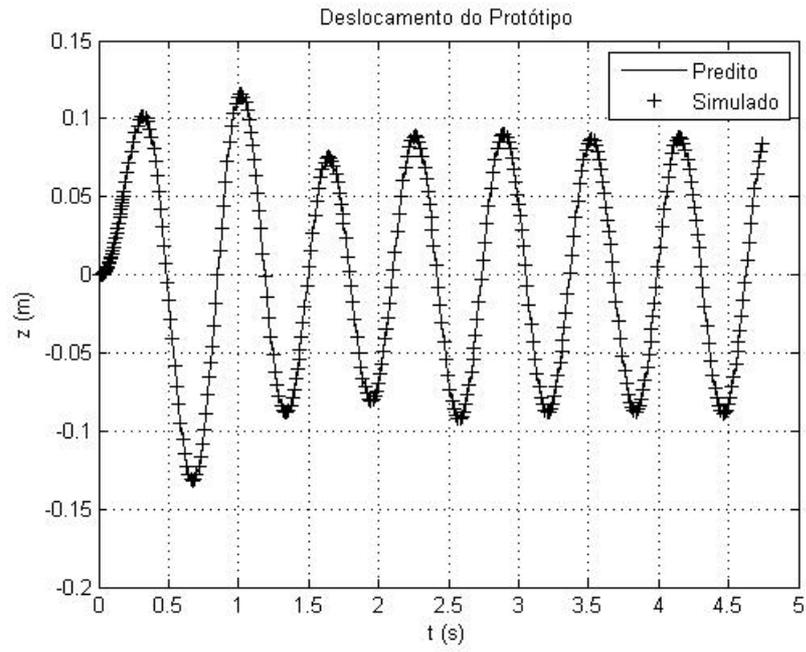


FIG. 3.11: Deslocamento da massa suspensa do protótipo para excitação de base senoidal.

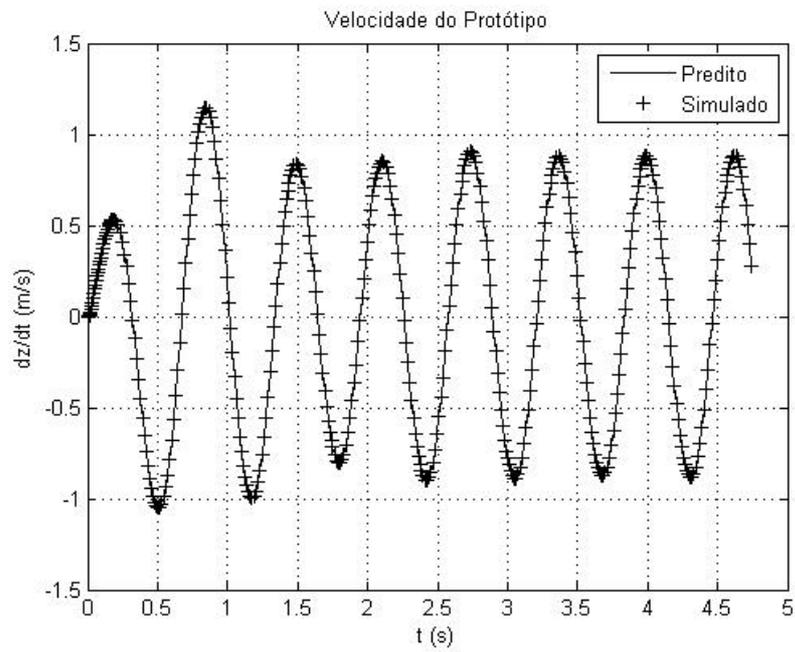


FIG. 3.12: Velocidade da massa suspensa do protótipo para excitação de base senoidal.

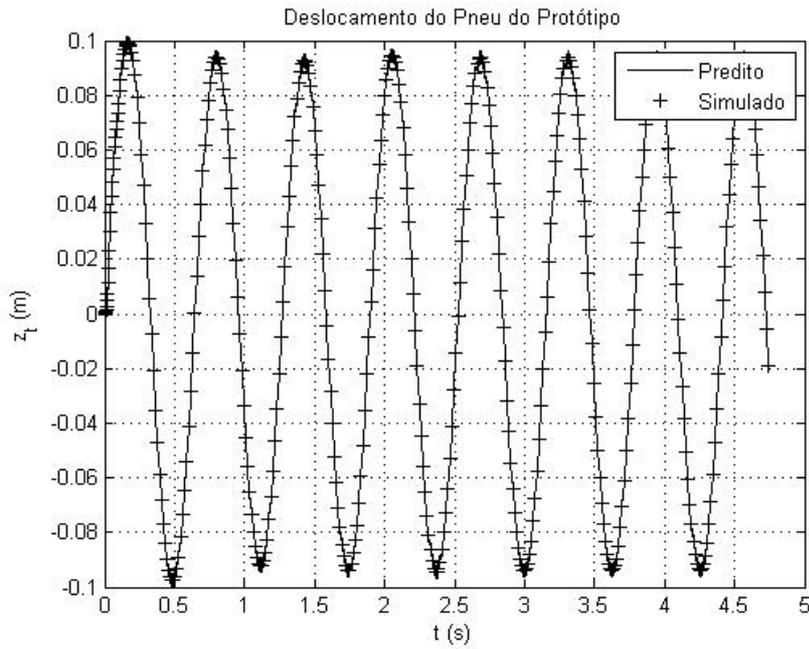


FIG. 3.13: Deslocamento do pneu do protótipo para excitação de base senoidal.

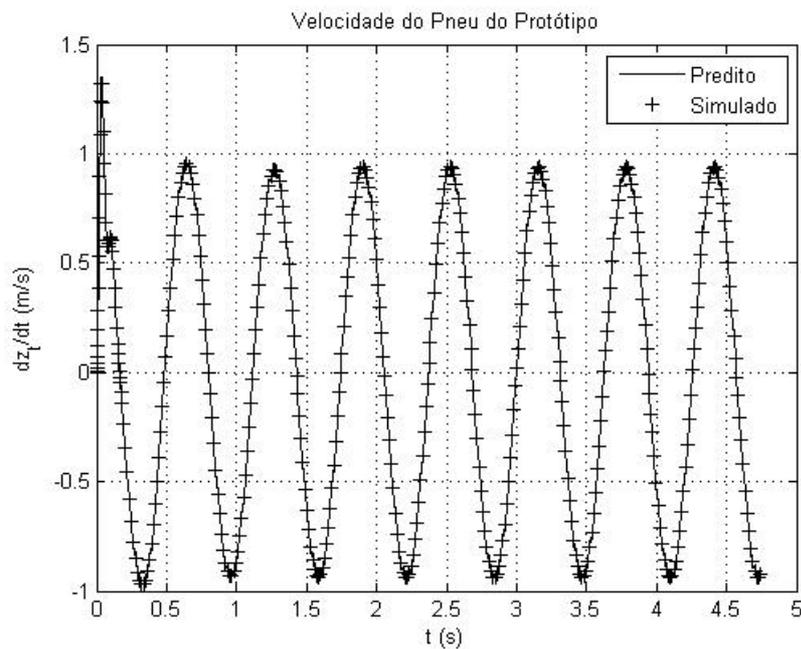


FIG. 3.14: Velocidade do pneu do protótipo para excitação de base senoidal.

A excitação de base no domínio adimensional é dada pela EQ. 3.34. Partindo-se dos resultados do sistema adimensional gerados pelo modelo em escala e utilizando-se as relações dadas pelas equações EQ. 3.1, 3.4 e 3.6, obtém-se a saída do protótipo para a entrada em

degrau, sem simulá-lo. Estes resultados estão mostrados nas FIG. 3.11 a 3.14, onde são comparados com os resultados obtidos da simulação direta do protótipo.

A coincidência dos resultados para o protótipo obtidos pelos dois caminhos (predição através do modelo adimensional e simulação direta do modelo), mostrados nas FIG. 3.3 a 3.14, revela que o enfoque conjunto utilizado pode ser usado no caso da análise da dinâmica vertical de um quarto de carro com dois graus de liberdade, conduzindo à similaridade dinâmica completa também para este sistema.

4 MODELO DE 1/4 DE CARRO COM UM GRAU DE LIBERDADE E SUSPENSÃO ATIVA

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é realizado o estudo da similaridade de um sistema modelado como 1/4 de carro com um grau de liberdade dotado de um sistema de suspensão ativa. Após uma breve introdução sobre sistemas de suspensão ativa, as equações diferenciais de governo do modelo são escritas, o que permite obter o equacionamento do sistema na sua representação em espaço de estados diretamente das equações diferenciais do modelo sem ter que passar antes pela função de transferência. A força na suspensão ativa é calculada por realimentação de estados.

Uma vez determinada a equação diferencial de governo do sistema dimensional e utilizando-se as parametrizações apresentadas no CAP. 2, chega-se à equação diferencial de governo adimensional do sistema em malha fechada, o que permite estabelecer as condições necessárias para que haja similaridade dinâmica completa dos sistemas em malha fechada, uma vez que a similaridade dos sistemas em malha aberta já tenha sido obtida. Isso se reflete em relações diretas a serem atendidas entre os ganhos no protótipo e no modelo em escala para que a similaridade dinâmica completa seja obtida para os sistemas em malha fechada.

Finalmente, são simulados sistemas em malha aberta e em malha fechada nos quais é alcançada a similaridade dinâmica completa.

4.2 BREVE INTRODUÇÃO SOBRE SUSPENSÃO ATIVA

Os sistemas de suspensão de veículos modernos podem contar com elementos ativos além dos elementos passivos tradicionalmente presentes. O sistema de suspensão ativa, com sensores e atuadores hidráulicos, tem por objetivo melhorar as condições de conforto e segurança dos

veículos. Os atuadores hidráulicos são capazes de gerar uma força atuante na suspensão de acordo com a necessidade identificada pelos sensores que monitoram o estado da suspensão. A força da suspensão ativa é a entrada de controle, e a excitação de base gerada pela estrada é a perturbação do sistema. O Objetivo da suspensão ativa é minimizar a transmissão das perturbações originadas pelas irregularidades da estrada para os passageiros.

4.3 MODELO DE 1/4 DE CARRO COM UM GRAU DE LIBERDADE E SUSPENSÃO ATIVA

Nesta seção é considerado o modelo de 1/4 carro com 1 DOF e dotado de um sistema de suspensão ativa, como representado esquematicamente na FIG 4.1. Na representação, m é a massa do veículo, k é a rigidez da mola da suspensão e b é o coeficiente de amortecimento viscoso da suspensão. O grau de liberdade do modelo é a coordenada z que mede o deslocamento vertical do corpo do veículo a partir de sua posição de equilíbrio estático. z_r e dz_r/dt são as excitações de base a que o modelo está sujeito. Estas excitações de base têm por objetivo reproduzir as irregularidades da pista que geram perturbações no sistema, que devem ter seus efeitos minimizados pela suspensão ativa. O sistema de suspensão ativa está representado por uma força $u(z,t)$ que age no sistema minimizando os efeitos das irregularidades da pista sobre os passageiros.

No prosseguimento do trabalho, busca-se diretamente a representação do sistema no espaço de estados a partir das equações diferenciais de governo do sistema.

Considerando o modelo representado esquematicamente na FIG. 4.1, adota-se como vetor de estado o vetor \mathbf{z} composto pela variável z , que corresponde ao deslocamento vertical do corpo do veículo, e a variável dz/dt , que corresponde à velocidade vertical do corpo do veículo, conforme a EQ 4.4. Desse modo, a equação diferencial de governo do sistema é a equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes, dada na EQ. 4.1.

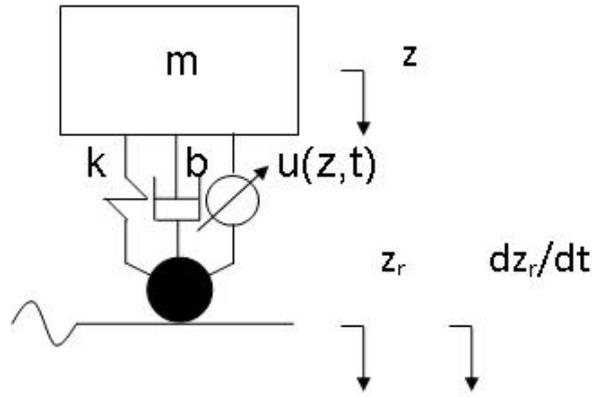


Figura 4.1: Modelo de 1/4 de carro com 1 DOF e suspensão ativa.

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_r}{dt} \right) + k(z - z_r) - u(z, t) = 0 \quad (4.1)$$

$$u = -\mathbf{Kz} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{K} = [K_{11} \quad K_{12}] \quad (4.3)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix}^T \quad (4.4)$$

Na EQ. 4.1, $u(z,t)$ é a força da suspensão ativa que é calculada pelo uso de um sistema de controle por realimentação de estado, conforme a EQ. 4.2, onde \mathbf{K} é a matriz de ganho de realimentação dada na EQ. 4.3. Aqui é admitido que os dois estados estão disponíveis para realimentação e que o sistema de controle não é limitado, isto é, que ele é capaz de fornecer a entrada de controle requerida pelo sistema.

Utilizando-se a EQ. 4.1, pode-se obter a representação dos sistemas dimensionais (protótipo e modelo em escala) no espaço de estados na forma das EQ. 4.1 e 4.2, pelas matrizes **A**, **B**, **C** e **D**, dadas nas EQ. 4.5 a 4.8.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad 1] \quad (4.7)$$

$$\mathbf{D} = [0] \quad (4.8)$$

Procedendo agora como no CAP. 3, o passo seguinte consiste na adimensionalização das equações diferenciais para, a partir deste resultado, definir os parâmetros Π adimensionais.

Partindo-se da EQ. 4.1 e utilizando-se as parametrizações dadas pelas equações 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16 e 2.17, procede-se à adimensionalização das diferenciais da EQ. 4.1 conforme as EQ. 2.19 a 2.23, o que resulta na EQ. 4.9.

$$\begin{aligned} \frac{m \cdot z_{eq}}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \frac{b \cdot z_{eq}}{\tau} \cdot \left(\frac{dz^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + k \cdot z_{eq} \cdot (z^* - z_r^*) \\ + K_{11} \cdot z_{eq} \cdot z^* + K_{12} \cdot \frac{z_{eq}}{\tau} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

A EQ. 4.9 está com as diferenciais adimensionalizadas, mas ainda tem dimensão de força por conta dos seus coeficientes. Dividindo a EQ. 4.9 pelo produto $m \cdot g$ para tornar a equação diferencial adimensional, esta toma a forma da EQ. 4.10.

$$\frac{m \cdot z_{eq}}{m \cdot g \cdot \tau^2} \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \frac{b \cdot z_{eq}}{m \cdot g \cdot \tau} \cdot \left(\frac{dz^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + \frac{k \cdot z_{eq}}{m \cdot g} \cdot (z^* - z_r^*) + \frac{K_{11} \cdot z_{eq}}{m \cdot g} \cdot z^* + \frac{K_{12} \cdot z_{eq}}{m \cdot g \cdot \tau} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{K_{11} \cdot z_{eq}}{m \cdot g} = K_{11}^* \quad (4.11)$$

$$\frac{K_{12} \cdot z_{eq}}{m \cdot g \cdot \tau} = K_{12}^* \quad (4.12)$$

Neste ponto, definem-se os ganhos do sistema adimensional em malha fechada K_{11}^* e K_{12}^* nas EQ. 4.11 e 4.12.

Utilizando-se K_{11}^* e K_{12}^* , definidos pelas EQ. 4.11 e 4.12, e dividindo-se a equação diferencial EQ. 4.10 pelo coeficiente do seu primeiro termo, esta se transforma na EQ. 4.13, onde o parâmetro adimensional Π_1 e os ganhos adimensionais K_{11}^* e K_{12}^* são dados pelas EQ.4.14, 4.11 e 4.12, respectivamente.

$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \Pi_1 \cdot \left(\frac{dz^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + (z^* - z_r^*) + K_{11}^* \cdot z^* + K_{12}^* \cdot \frac{dz^*}{dt^*} = 0 \quad (4.13)$$

$$\Pi_1 = \frac{b}{\sqrt{m.k}} \quad (4.14)$$

À semelhança do procedimento adotado no CAP. 2, a partir da EQ. 4.13, podem-se estabelecer as condições necessárias para que haja similaridade dinâmica completa entre o protótipo e o modelo em escala, construídos segundo o modelo representado esquematicamente na FIG. 4.1:

- 1- os sistemas devem ter as mesmas condições iniciais em posição z_0^* e velocidade dz_0^*/dt^* adimensionais;
- 2- os sistemas devem ter as mesmas expressões para as excitações de base adimensionais z_r^* e dz_r^*/dt^* ;
- 3- o valor dos parâmetros adimensionais deve ser o mesmo para os dois sistemas, o que é assegurado pela igualdade dos parâmetros Π para os dois sistemas.

Na EQ. 4.13, figuram três parâmetros adimensionais que são Π_1 , K_{11}^* e K_{12}^* . O parâmetro adimensional Π_1 é igual ao dobro da fração de amortecimento, é dado pela equação 4.14 e está associado diretamente à parte mecânica do sistema. Os parâmetros K_{11}^* e K_{12}^* também são parâmetros Π adimensionais, que tiveram esta nomenclatura adotada simplesmente para enfatizar o fato de que estão associados à parte de controle do sistema. Estes ganhos, como parâmetros Π , também devem ser semelhantes no protótipo e no modelo em escala para que haja similaridade dinâmica completa.

Dessa forma, chega-se a um importante resultado que é a condição para que haja semelhança entre os sistemas de controle em malha fechada, uma vez que a semelhança dos sistemas em malha aberta (semelhança no aspecto da mecânica, associada ao parâmetro Π_1 dado pela equação 4.14) já tenha sido obtida:

- o valor dos ganhos adimensionais em malha fechada (K_{11}^* e K_{12}^* para este sistema) devem ser os mesmos para os dois sistemas.

Assim, tem-se uma relação entre os ganhos dos sistemas de controle em malha fechada do protótipo e do modelo em escala de modo que sejam dinamicamente semelhantes.

Este resultado permite que seja definido o valor do ganho do sistema de controle do modelo em escala a ser construído para garantir a similaridade dinâmica completa entre os sistemas diretamente, independente da técnica usada para o estabelecimento do valor ideal de ganho do sistema de controle em malha fechada do protótipo (alocação de pólos, LQR ou outro).

4.4 SEMELHANÇA EM UM QUARTO DE CARRO COM SUSPENSÃO ATIVA – SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Com o objetivo de prever o comportamento do protótipo de um quarto de carro com suspensão ativa mostrado esquematicamente na FIG. 4.1 a partir do modelo em escala, foi percorrido o caminho mostrado esquematicamente na FIG. 2.3, onde se partiu do protótipo de um quarto de carro com suspensão ativa e se obteve o comportamento do modelo adimensional correspondente. A adimensionalização do modelo em escala levou ao mesmo sistema, o que confirmou a existência de similaridade dinâmica completa entre os sistemas para os valores simulados, à semelhança dos resultados obtidos em capítulos anteriores.

Uma vez que a similaridade dinâmica completa foi alcançada para o sistema modelado como um quarto de carro, com um grau de liberdade e dotado de um sistema de suspensão ativa, parte-se para a previsão do comportamento do protótipo a partir do modelo em escala que lhe é semelhante, percorrendo agora o caminho mostrado na FIG. 2.13 e seguindo o algoritmo apresentado na seção 2.8 do CAP. 2, que vai reproduzido abaixo para facilidade de consulta.

- 1- Parte-se do protótipo e determina-se o modelo em escala semelhante, igualando-se condições iniciais, excitações de base e parâmetros adimensionais correspondentes.
- 2- Constrói-se o modelo adimensional a partir do modelo em escala, usando-se as parametrizações das equações 2.13, 2.15 e 2.17.
- 3- Simula-se o modelo adimensional, obtendo-se resultados adimensionais que valem tanto para o modelo quanto para o protótipo, uma vez que a equação diferencial de

governo adimensional é a mesma para ambos.

- 4- Obtêm-se os resultados do protótipo sem simulá-lo, partindo-se do modelo adimensional e utilizando-se as equações de parametrização EQ. 2.13, 2.15 e 2.17.
- 5- Simula-se o protótipo para comparar os valores das saídas do protótipo resultantes da previsão do seu comportamento a partir do modelo adimensional gerado do modelo em escala e pela simulação direta do protótipo.

Inicialmente, simulam-se os sistemas para valores de ganho de realimentação de estado nulo para avaliar o comportamento dos sistemas em malha aberta.

Considerando-se o protótipo cujos parâmetros são dados na TAB. 4.1 e condições iniciais $z_{op} = 0.1$ m e $dz_{op}/dt = 0$ m/s, segue-se o algoritmo apresentado obtendo o modelo em escala cujos parâmetros são dados pela TAB. 4.2 e condições iniciais $z_{op} = 0.01$ m e $dz_{op}/dt = 0$ m/s. Para o sistema adimensional, a equação diferencial de governo é dada pela EQ. 4.13 e as condições iniciais do modelo adimensional são $z_0^* = 0.488$ e $dz_0^*/dt = 0$. Nota-se nas TAB. 4.1 e 4.2 que os valores de ganho de realimentação são nulos, o que equivale a simular o sistema em malha aberta.

TAB. 4.1: Parâmetros do protótipo para ganho zero.

m_p	365 kg
k_p	17500 N/m
b_p	1050 N.s/m
K_{11p}	0 N/m
K_{12p}	0 N.s/m

TAB. 4.2: Parâmetros do modelo em escala para ganho zero.

m_m	10 kg
k_m	4800 N/m
b_m	91.02 N.s/m
K_{11m}	0 N/m
K_{12m}	0 N.s/m

Utilizando-se as relações dadas pelas EQ. 2.13, 2.15 e 2.17, obtém-se a saída do protótipo para a entrada dada sem simulá-lo. Estes resultados estão mostrados nas FIG. 4.2 e 4.3, onde são comparados com os resultados obtidos da simulação direta do protótipo.

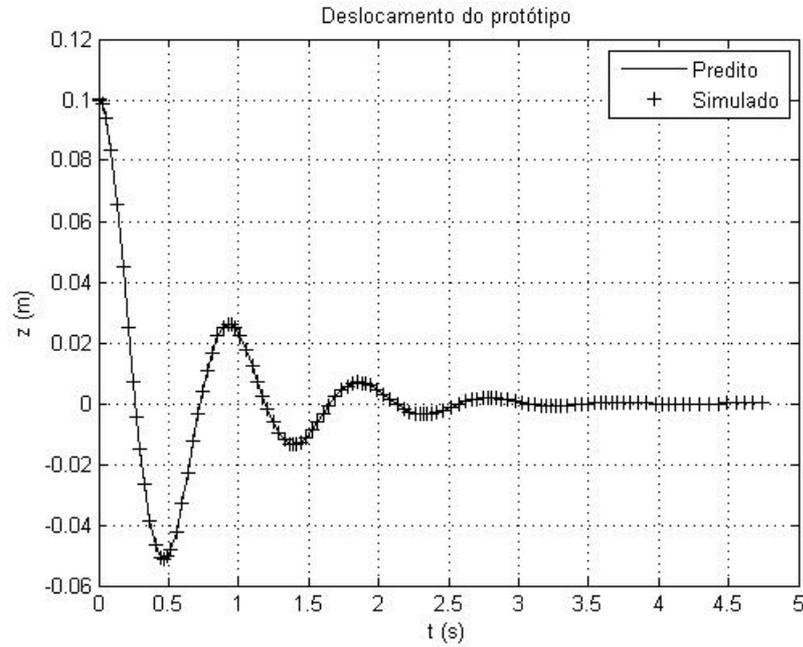


FIG. 4.2: Deslocamento para condições iniciais com ganho zero.

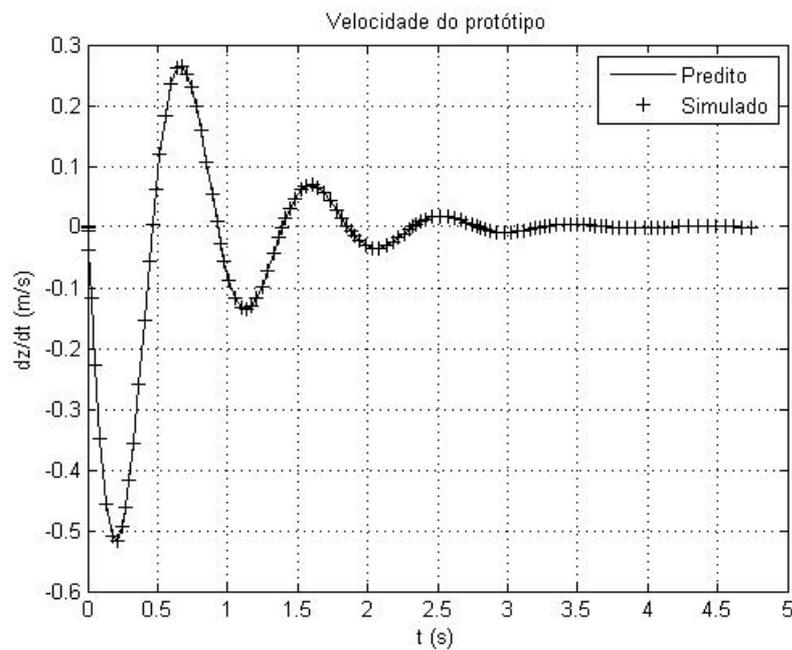


FIG. 4.3: Velocidade para condições iniciais com ganho zero.

Simulam-se, agora, os sistemas para valores de ganho de realimentação de estado desejados, para avaliar o comportamento dos sistemas em malha fechada. A sequência de procedimentos é a mesma empregada anteriormente, que considera o protótipo cujos parâmetros são dados na TAB. 4.3 e condições iniciais idênticas às anteriores. Seguindo-se o algoritmo apresentado, obtém-se o modelo em escala cujos parâmetros são dados pela TAB. 4.4 e condições iniciais $z_{0m} = 0.01$ m e $dz_{0m}/dt = 0$ m/s. Para o sistema adimensional, a equação diferencial de governo é dada pela EQ. 4.13 e as condições iniciais do modelo adimensional são $z_0^* = 0.488$ e $dz_0^*/dt^* = 0$. Nota-se nas TAB. 4.3 e 4.4 que os valores de ganho de realimentação são diferentes de zero, o que equivale a simular o sistema em malha fechada.

TAB. 4.3: Parâmetros do protótipo.

m_p	365 kg
k_p	17500 N/m
b_p	1050 N.s/m
K_{11p}	1093.8 N/m
K_{12p}	1730.4 N.s/m

TAB. 4.4: Parâmetros do modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	4800 N/m
b_m	91.02 N.s/m
K_{11m}	300 N/m
K_{12m}	150 N.s/m

Utilizando-se as relações dadas pelas EQ. 2.13, 2.15 e 2.17, obtém-se a saída do protótipo em malha fechada para a entrada dada sem simulá-lo. Estes resultados estão mostrados nas FIG. 4.4 e 4.5, onde são comparados com os resultados obtidos da simulação direta do protótipo.

Comparando-se os resultados da simulação em malha aberta e em malha fechada, nota-se uma significativa melhoria do comportamento do sistema em malha fechada com a redução do tempo de acomodação e do 'overshoot', como decorrência da inclusão do sistema de controle no sistema.

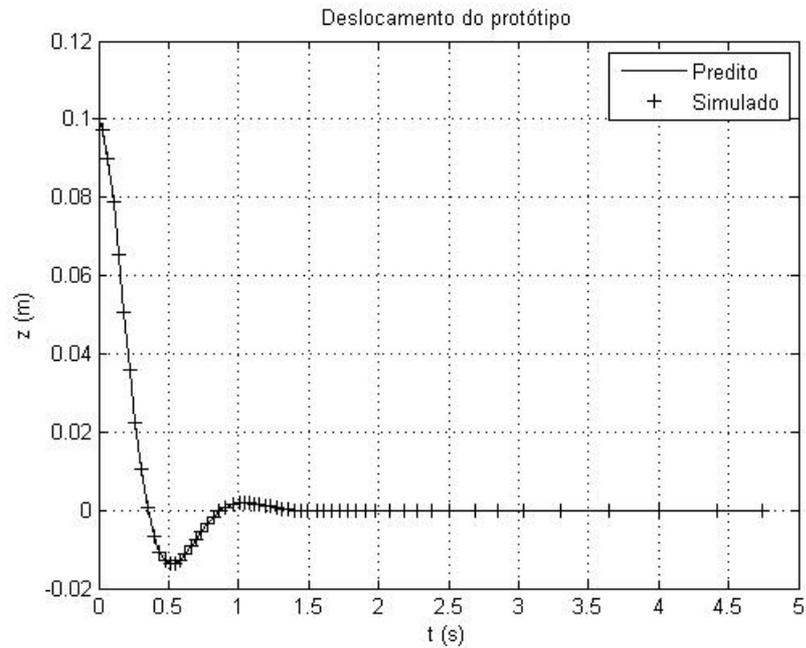


Figura 4.4: Deslocamento para condições iniciais: sistema em malha fechada.

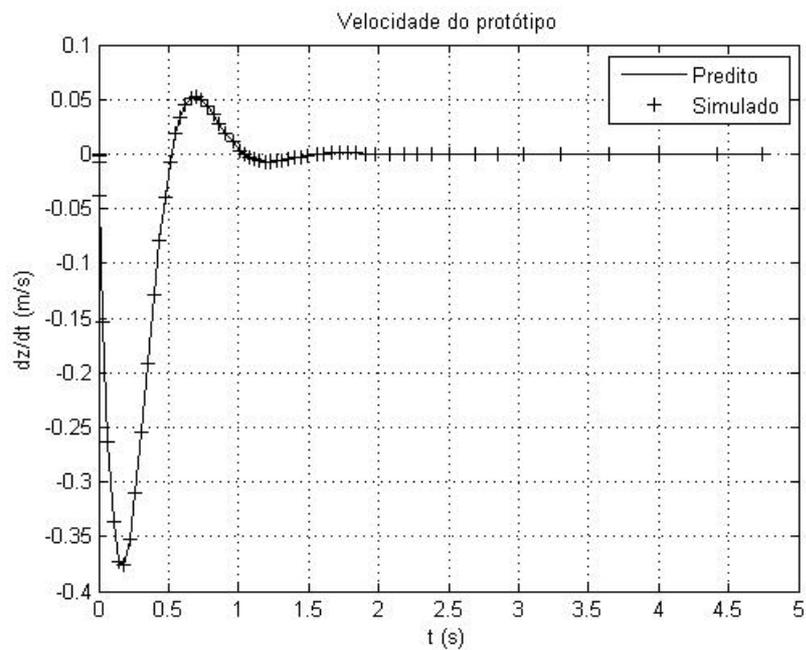


Figura4.5: Velocidade para condições iniciais: sistema em malha fechada.

Partindo-se do modelo em malha aberta, verificou-se a semelhança dinâmica completa entre o modelo em escala e o protótipo (o que já tinha sido obtido anteriormente somente para o sistema mecânico). Uma vez que as condições necessárias para similaridade dos sistemas em malha fechada foram atendidas, obteve-se também a semelhança dinâmica completa entre o modelo em escala e o protótipo em malha fechada, o que vem comprovar o resultado anterior que estabelece as condições necessárias para que haja similaridade dinâmica completa dos sistemas em malha fechada.

Para o sistema modelado como um quarto de carro de um grau de liberdade com suspensão ativa estudado, a simulação com entradas em degrau e senoidal, utilizando o critério estabelecido na seção 4.3 para semelhança entre os ganhos adimensionais de malha fechada dos sistemas, também conduziu à similaridade dinâmica completa entre os sistemas em malha fechada.

5 OTIMIZAÇÃO DA SIMILARIDADE DINÂMICA INCOMPLETA – MÉTRICA RMS DO ERRO

5.1 INTRODUÇÃO

Como discutido anteriormente, a semelhança dinâmica completa pode ser obtida para diversos modelos que representam a dinâmica vertical de veículos. Apesar de este resultado ser teoricamente possível, mas difícil de ser obtido na prática, ele tem uma importância fundamental para o trabalho desenvolvido. O fato de a similaridade dinâmica completa ser quase impossível de ser obtida na prática, não diminui a importância do fato de ela ser teoricamente possível.

5.2 IDÉIA FUNDAMENTAL

Quando da construção dos modelos em escala dos veículos, tem-se que escolher o conjunto de componentes que será usado para construir o modelo. Apesar dos valores teóricos que asseguram a similaridade dinâmica completa terem sido determinados, é praticamente impossível de se obter, para a construção do modelo, um conjunto de componentes que tenha exatamente os mesmos valores de parâmetros determinados teoricamente.

A partir destas considerações, surge a idéia fundamental deste trabalho que consiste em buscar, entre os conjuntos de valores de parâmetros possíveis (que apresentam similaridade dinâmica incompleta), aquele que proporciona a melhor similaridade dinâmica.

O problema descrito sugere o uso de uma técnica de otimização para a busca do melhor conjunto de parâmetros, mas para que se possa usar esta técnica é necessário que se tenha uma métrica que permita medir comparativamente dois conjuntos de modelos e se determinar qual dentre os dois é o melhor. O fato da similaridade dinâmica completa ser teoricamente possível é fundamental para a definição de tal métrica.

5.3 MÉTRICA

Como mostrado anteriormente, os resultados das simulações dos sistemas adimensionais construídos a partir do protótipo e do modelo coincidem quando o modelo apresenta similaridade dinâmica completa com o protótipo. Quando a similaridade dinâmica entre o modelo e o protótipo é incompleta, o resultado da simulação do sistema adimensionalizado a partir do modelo começa a se afastar do resultado da simulação do sistema adimensionalizado a partir do protótipo, que é a base de comparação.

A primeira métrica proposta consiste em se calcular as variáveis de estado dos sistemas adimensionais a partir do modelo e do protótipo, para os mesmos instantes de tempo adimensional, e computar o valor RMS do erro entre os sistemas adimensionais construídos a partir do protótipo e do modelo.

Este valor do erro RMS das variáveis de estado pode ser usado como função objetivo do problema de otimização, uma vez que, quanto melhor a similaridade dinâmica entre os sistemas adimensionais, menor o valor do erro RMS – que é teoricamente igual a zero para os sistemas completamente similares.

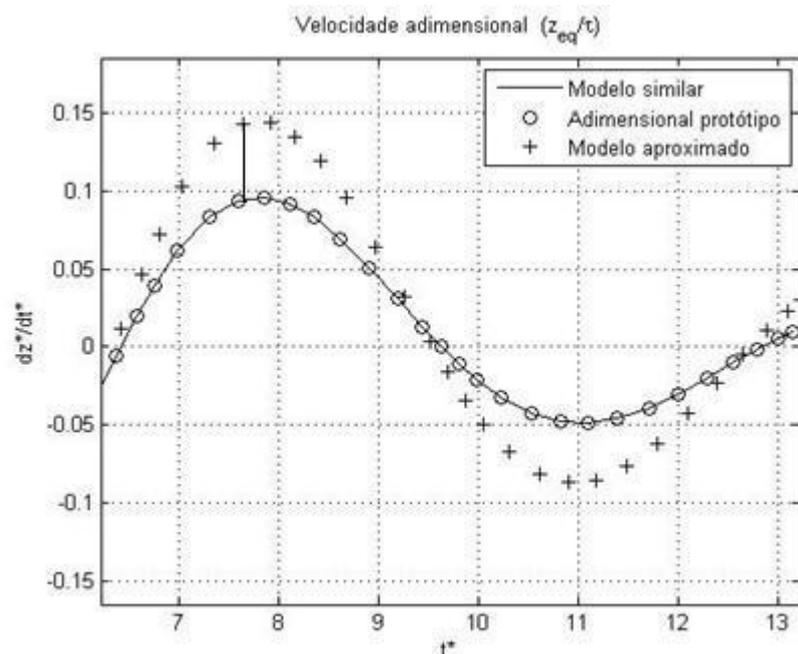


FIG. 5.1: Métrica RMS.

Considere o conjunto $\mathbf{S}=\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m\} \subset \mathbb{R}^q$, onde o vetor $\mathbf{p}_j=[p_{j1}, \dots, p_{jq}]^T$ tem suas componentes formadas pelos parâmetros do protótipo, quando $j = 0$, e pelos parâmetros do modelo quando $j = 1, \dots, m$. Em consequência, para cada \mathbf{p}_j tem-se r relações funcionais da forma

$$\begin{aligned}\Pi_{1j} &= f_{1j}(\mathbf{p}_j) \\ \Pi_{2j} &= f_{2j}(\mathbf{p}_j) \\ \Pi_{3j} &= f_{3j}(\mathbf{p}_j)\end{aligned}$$

\vdots

$$\Pi_{rj} = f_{rj}(\mathbf{p}_j)$$

Os parâmetros $\Pi_{1j}, \dots, \Pi_{rj}$ estão presentes no sistema de equações diferenciais adimensionais, originadas do protótipo, quando $j = 0$, e nos sistemas de equações diferenciais adimensionais, originados dos modelos em escala, quando $j = 1, \dots, m$. A solução de cada um desses sistemas é uma coleção de s vetores, a saber, $\{\mathbf{x}_{j1}, \dots, \mathbf{x}_{js}\} \subset \mathbb{R}^n$, onde n é igual ao número de instantes de tempo adimensional (os mesmos instantes para os mesmos $m + 1$ sistemas), para os quais cada sistema de equações é numericamente resolvido. Cada $\mathbf{x}_{jk}, k = 1, \dots, s$, é função de $\Pi_{1j}, \dots, \Pi_{rj}$ e também de \mathbf{p}_j .

Escrevendo cada \mathbf{x}_{jk} em termos de suas componentes, tem-se o vetor $\mathbf{x}_{jk}=[x_{jk}^1, \dots, x_{jk}^n]^T$ e pode-se definir a seguinte função custo J_j , de variável discreta:

$$J_j = \sum_{k=1}^s w_k \left[\sum_{i=1}^n \frac{(x_{0k}^i - x_{jk}^i)^2}{n} \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^s w_k \|\mathbf{x}_{0k} - \mathbf{x}_{jk}\|_2 \quad (5.1)$$

Na EQ. 5.1, w_k é um peso atribuído a cada conjunto $\{(\mathbf{x}_{1k} - \mathbf{x}_{0k}), \dots, (\mathbf{x}_{mk} - \mathbf{x}_{0k})\}$, e $\|\cdot\|_2$ é a norma euclidiana em \mathbb{R}^n .

O conjunto $\{J_1, \dots, J_m\}$ é discreto e finito, portanto admite um mínimo, que irá determinar o índice j do ‘modelo ótimo’; e também admite um máximo, que será o pior modelo no universo considerado, o qual será denominado ‘modelo péssimo’.

5.4 OTIMIZAÇÃO DA SIMILARIDADE DINÂMICA INCOMPLETA

Uma vez definida uma métrica que permite quantificar a similaridade dinâmica incompleta, parte-se para a otimização da mesma. A otimização empregada utiliza uma busca direta e exaustiva em um conjunto finito de valores, analisando todas as combinações possíveis de parâmetros considerados na base de busca. Como proposto aqui, a metodologia utiliza a otimização em uma base discreta e restrita de valores (conjunto \mathbf{S}), em que a função custo J_j é o valor RMS do erro adimensional discreto em algumas ou todas as variáveis de estado adimensionalizadas, dependendo do peso w_j . Neste ponto vale ressaltar que a otimização utilizando a métrica RMS do erro permite que se pondere, através de w_j , $j=(1,\dots,q)$, as parcelas de valores de erro RMS para cada variável de estado adimensional, permitindo priorizar o resultado em algumas das variáveis de estado adimensionais e dar menor importância ao resultado em outras variáveis. Embora os resultados da otimização apresentados na próxima seção tenham considerado peso igual para as quatro variáveis de estado adimensionais do modelo, o código foi preparado para aceitar a ponderação citada. Os primeiros exemplos ainda na fase de desenvolvimento do programa rodaram com esta característica ativada, que já estava incorporada ao código.

Uma vez que a otimização se dá sobre uma base discreta e restrita, podem-se extrair dois conjuntos de valores que são de extrema importância: o conjunto ótimo, que corresponde ao conjunto de parâmetros da base que proporciona a minimização da função objetivo, e o aqui chamado de péssimo, que corresponde ao conjunto de parâmetros da base que maximiza a função objetivo.

A partir deste ponto, os termos ‘ótimo’ e ‘péssimo’ serão usados no presente trabalho com o significado acima mencionado. Além disso, todas as otimizações são realizadas sobre bases discretas e restritas de valores, definidas antes de cada resultado apresentado.

5.5 OTIMIZAÇÃO DO MODELO DE ¼ CARRO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE – SIMULAÇÕES E RESULTADOS.

Partindo do modelo de 1/4 carro com dois graus de liberdade desenvolvido no CAP 3 e representado esquematicamente na FIG. 5.2, implementou-se um programa para otimização dos parâmetros do modelo com objetivo de minimizar o valor RMS do erro entre os sistemas adimensionais em função dos parâmetros do modelo em escala.

A estratégia de busca usada é a busca direta, onde foram estabelecidos valores iniciais, valores finais e passos de iteração para os parâmetros do modelo envolvidos na otimização. Com isso, a norma J_j é calculada para os $\mathbf{p}_j \in \mathbf{S}$, $j = 1, \dots, m$, e o maior e o menor valor da norma J_j fornecem os modelos em escala péssimo e ótimo, respectivamente.

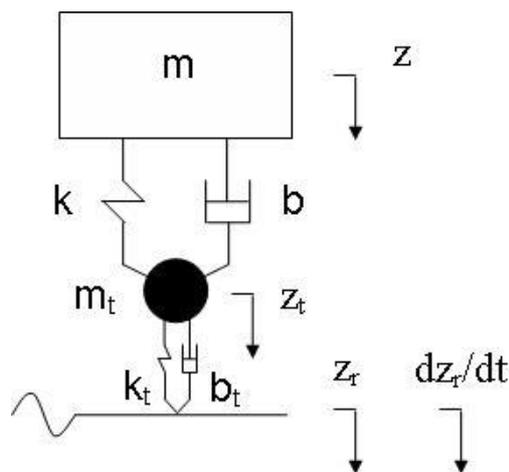


FIG. 5.2: Modelo de ¼ carro com 2 DOF.

Os conjuntos de valores dos parâmetros do modelo em escala usados na otimização são dados na TAB. 5.1. Foram pesquisados 7 valores de massa suspensa do modelo com intervalos de 0,5 em 0,5 kg; 5 valores de rigidez da mola da suspensão do modelo com intervalos de 500 em 500 N/m; 5 valores de coeficiente de amortecimento da suspensão do modelo com intervalos de 20 em 20 N.s/m; 6 valores de massa do pneu do modelo com

intervalos de 0,5 em 0,5 kg; 6 valores de coeficiente de rigidez do pneu do modelo com intervalos de 10000 em 10000 N/m; e 6 valores de coeficiente de amortecimento do pneu do modelo com intervalos de 10 em 10 N.s/m.

Realizada a otimização através de uma busca direta nos conjuntos de parâmetros possíveis no domínio especificado, foram varridos no total 37800 combinações possíveis. Como resultado foram obtidos os valores ótimo e péssimo dos parâmetros do modelo que estão apresentados na TAB. 5.2. A simulação rodou em 2,1223 horas.

TAB. 5.1: Valores dos parâmetros para otimização.

Parâmetro	Valor inicial	Valor final	Passo	Nr. valores
m_s	7,5 kg	10,5 kg	0,5 kg	7
k_s	3800 N/m	5800 N/m	500 N/m	5
b_s	10 N.s/m	90 N.s/m	20 N.s/m	5
m_t	0,8 kg	3,3 kg	0,5 kg	6
k_t	38600 N/m	88600 N/m	10000 N/m	6
b_t	13 N.s/m	63 N.s/m	10 N.s/m	6

TAB. 5.2: Resultados ótimo e péssimo.

Parâmetro	Valor ótimo	Valor péssimo
m_s	8,0 kg	10,5 kg
k_s	5800 N/m	5800 N/m
b_s	90 N.s/m	10 N.s/m
m_t	0,8 kg	1,3 kg
k_t	88600 N/m	38600 N/m
b_t	43 N.s/m	13 N.s/m

Nas FIG. 5.3 a 5.6 são mostrados os resultados das simulações dos modelos em escala adimensionais ótimo e péssimo, em comparação com o modelo adimensional do protótipo. Pode-se notar a boa aproximação do resultado adimensional do protótipo obtido a partir do modelo em escala adimensional ótimo, apesar da sua similaridade dinâmica incompleta com o protótipo. Já o resultado obtido com o modelo adimensional péssimo não fornece uma boa aproximação em relação ao comportamento adimensional do protótipo, como esperado.

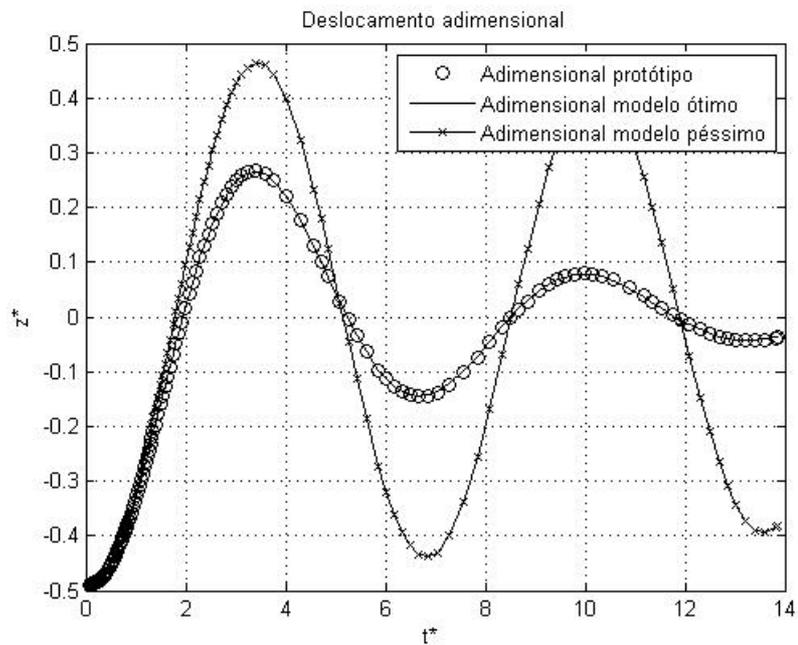


FIG. 5.3: Deslocamento adimensional – Comparação.

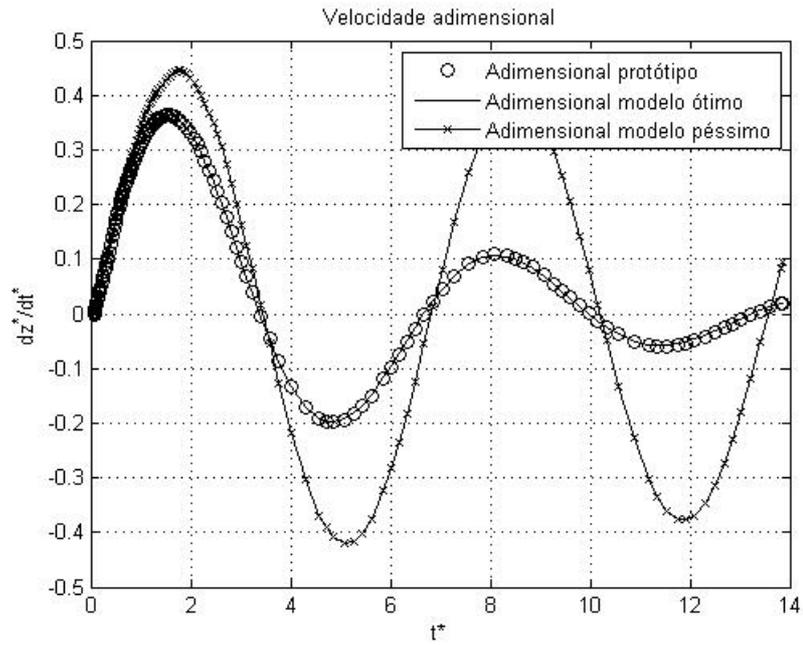


FIG 5.4: Velocidade adimensional – Comparação

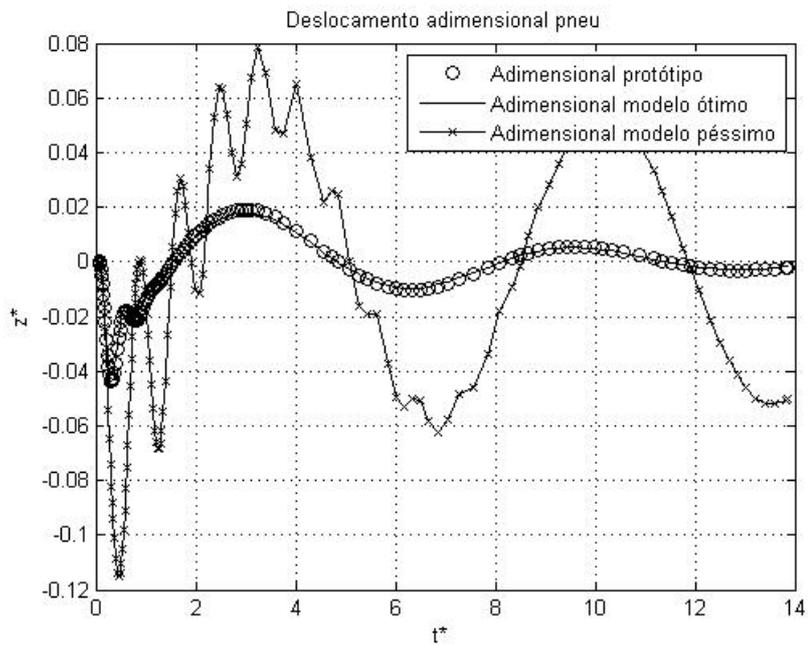


FIG. 5.5: Deslocamento adimensional do pneu – Comparação.

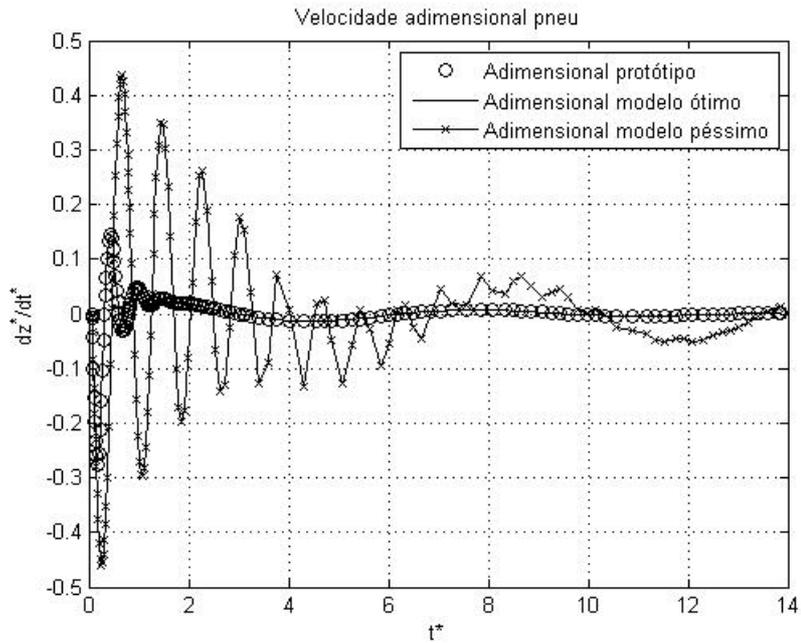


FIG 5.6: Velocidade adimensional do pneu – Comparação.

É importante ressaltar que, apesar desta estratégia analisar valores de parâmetros cujos componentes podem não existir fisicamente, e com isso analisar conjuntos de parâmetros que podem não ser viáveis, a técnica é válida para uma busca direta que considere vetores \mathbf{p}_j de valores dos parâmetros que contenham somente valores fisicamente existentes. A busca somente entre valores fisicamente existentes nos conduz a um menor número de combinações possíveis e pode ser realizada (até mesmo em um tempo menor), conduzindo a resultados práticos.

A busca teórica realizada nos possibilita um maior número de combinações possíveis, gerando até mesmo, em alguns casos, valores fictícios, mas é importante ressaltar que a técnica é válida e pode ser usada para se buscar um modelo real com a melhor similaridade dinâmica possível de ser obtida, o que consiste em um resultado prático imediato.

5.6 OTIMIZAÇÃO HÍBRIDA DA SIMILARIDADE DINÂMICA INCOMPLETA

A otimização da similaridade dinâmica incompleta abordada na seção anterior foi realizada sobre sistemas que possuem a mesma configuração. Como consequência disso, para o caso acima, os modelos matemáticos do modelo em escala e do protótipo têm a mesma estrutura, isto é, são regidos pelo mesmo sistema de equações diferenciais. No caso considerado anteriormente, tanto o protótipo quanto o modelo em escala foram modelos de $\frac{1}{4}$ de carro com dois graus de liberdade (ambos sem suspensão ativa), conforme mostrado esquematicamente na FIG.5.2.

Nesta seção, considera-se a otimização híbrida da similaridade dinâmica incompleta em que o protótipo é considerado como $\frac{1}{4}$ de carro com dois graus de liberdade (sem suspensão ativa), conforme esquema da FIG. 5.2 e modelo matemático desenvolvido no CAP. 3. O modelo em escala é considerado como $\frac{1}{4}$ de carro com dois graus de liberdade dotado de suspensão ativa, conforme mostrado esquematicamente na FIG. 5.7, e cujo modelo matemático está desenvolvido no APÊNDICE 3.

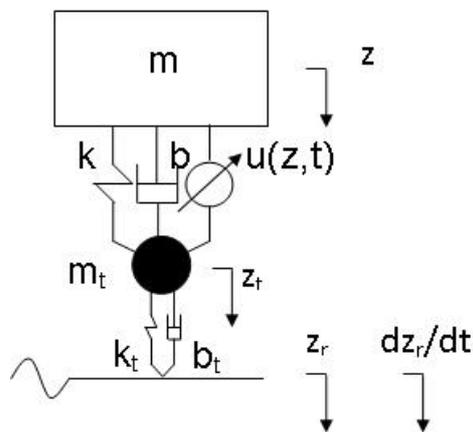


FIG. 5.7: Modelo de $\frac{1}{4}$ carro com 2 DOF e suspensão ativa.

Na otimização híbrida as equações diferenciais de governo dos dois sistemas são diferentes. No caso considerado, foi feita a otimização da similaridade dinâmica incompleta

buscando os valores dos ganhos da suspensão ativa do modelo em escala que minimizam a métrica RMS do erro adimensional.

Partiu-se de um protótipo cujos valores dos parâmetros são dados na TAB. 5.3, e de um modelo em escala cujos valores dos parâmetros são dados na TAB. 5.4. A otimização da similaridade dinâmica incompleta foi realizada para os valores do ganho da suspensão ativa variando conforme dado na TAB. 5.5.

TAB. 5.3: Valores dos parâmetros do protótipo.

Parâmetro	Valor
m_s	365 kg
k_s	17500 N/m
b_s	1050 N.s/m
m_t	35 kg
k_t	250000 N/m
b_t	500 N.s/m

TAB. 5.4: Valores dos parâmetros do modelo em escala.

Parâmetro	Valor
m_s	10 kg
k_s	8800 N/m
b_s	50 N.s/m
m_t	0,8 kg
k_t	40000 N/m
b_t	40 N.s/m

TAB.5.5: Conjunto pesquisado de valores dos ganhos.

Ganho	Valor inicial	Valor final	Passo	Nr. valores
K_{11}	50 N/m	500 N/m	50 N/m	10
K_{12}	50 N.s/m	500 N.s/m	50 N.s/m	10
K_{13}	5 N/m	25 N/m	5 N/m	5
K_{14}	5 N.s/m	25 N.s/m	5 N.s/m	5

TAB. 5.6: Valores ótimos e p \acute{e} ssimos dos ganhos.

Ganho	Valor \acute{o}timo	Valor p\acute{e}ssimo
K_{11}	50 N/m	500 N/m
K_{12}	100 N.s/m	500 N.s/m
K_{13}	5 N/m	25 N/m
K_{14}	5 N.s/m	25 N.s/m

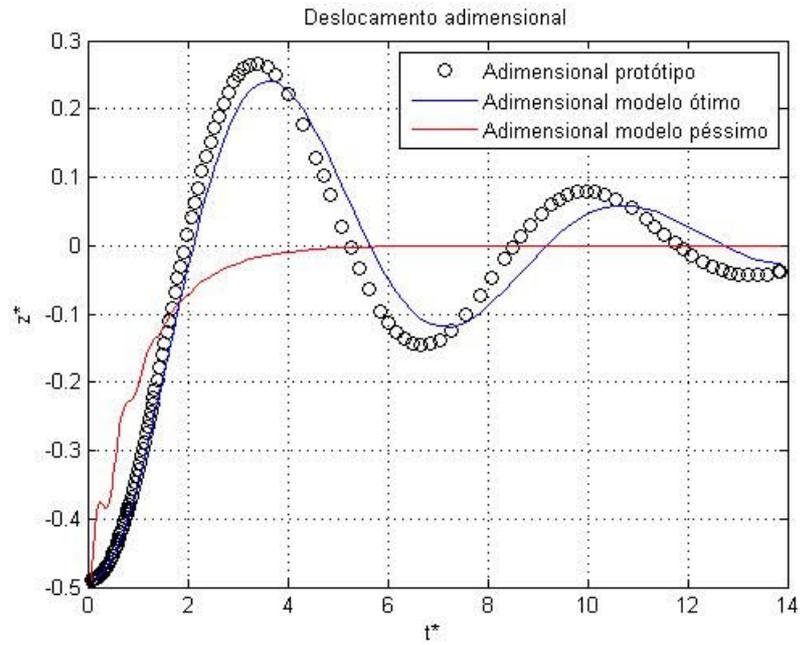


FIG. 5.8: Deslocamento adimensional dos modelos ótimo e péssimo.

Ao todo foram pesquisadas 2500 combinações possíveis de valores de ganhos, resultando nos valores ótimo e péssimo dados na TAB. 5.6. A FIG. 5.8 mostra o comportamento do deslocamento adimensional dos modelos ótimo e péssimo sujeito a condições iniciais em deslocamento. As demais variáveis de estado apresentaram comportamento qualitativo semelhante.

6 SIMILARIDADE NA DINÂMICA VERTICAL DO VEÍCULO COM SETE GRAUS DE LIBERDADE

6.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo aborda a dinâmica vertical para o sistema do veículo completo com sete graus de liberdade. Os APÊNDICES 1 e 2 apresentam estudos realizados sobre o movimento vertical da massa suspensa (movimento de ‘bounce’) associado ao movimento de ‘roll’, e do movimento de ‘bounce’ associado ao movimento de ‘pitch’ do veículo modelado como meio carro.

Para o estudo dos movimentos de ‘bounce’, ‘pitch’ e ‘roll’ do veículo associados aos deslocamentos verticais das massas não suspensas, consideradas essencialmente como as massas dos pneus do veículo, é considerado o veículo completo como mostrado esquematicamente na FIG. 6.1.

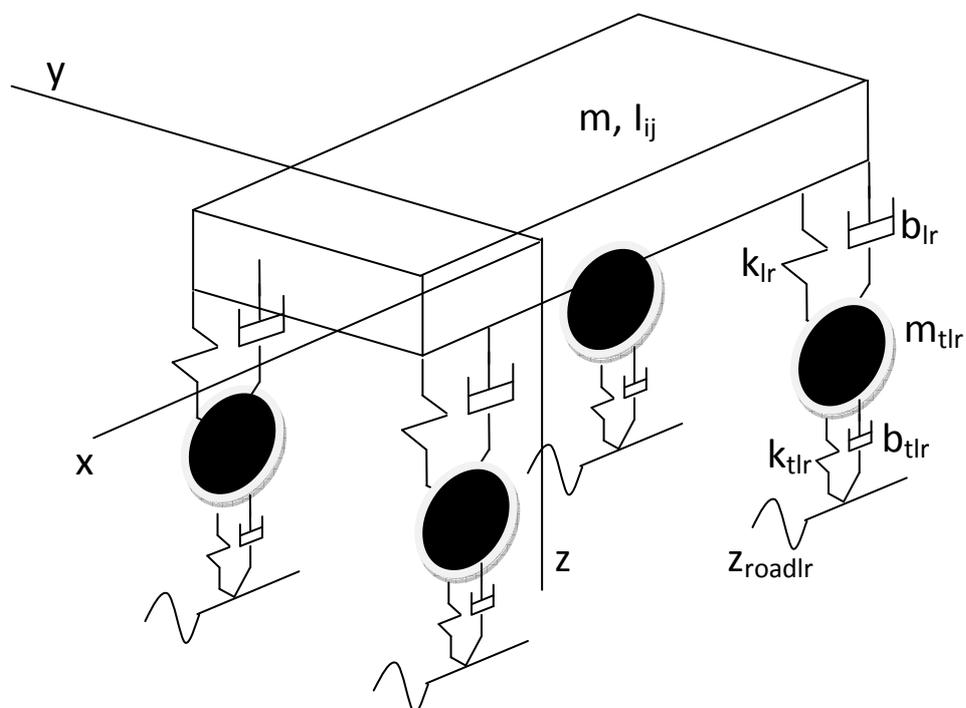


FIG. 6.1: Modelo de carro com 7 DOF.

A sequência a ser seguida no estudo é semelhante àquela apresentada no CAP. 3, partindo-se da determinação da forma adimensional das equações diferenciais de governo e adotando-se, como parâmetros Π , os coeficientes adimensionais das diferenciais adimensionais nas equações diferenciais assim obtidas.

Para concluir a adimensionalização do sistema, utilizam-se as relações entre as excitações de base nos domínios dimensional e adimensional desenvolvidas na Seção 2.7.

Os resultados da aplicação da teoria da similaridade ao modelo de carro completo com sete graus de liberdade mostram que é possível prever o comportamento do protótipo a partir do modelo em escala sem simulá-lo. Isto é uma consequência do fato da metodologia empregada conduzir à similaridade dinâmica completa para o modelo estudado.

6.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MOVIMENTO NA FORMA ADIMENSIONAL

Para a obtenção das equações diferenciais adimensionais, parte-se inicialmente das equações diferenciais de governo dimensionais que regem o modelo em questão.

No modelo de 6 graus de liberdade são considerados os graus de liberdade de ‘bounce’, ‘pitch’ e ‘roll’ da massa suspensa (corpo do veículo) e os deslocamentos verticais dos quatro pneus (massas não suspensas).

Considera-se o modelo de carro mostrado na FIG 6.1, onde \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} são as velocidades lineares ao longo dos eixos x , y e z , respectivamente, e \mathbf{p} , \mathbf{q} e \mathbf{r} são as velocidades angulares em torno dos eixos x , y e z , respectivamente, denotadas também por $\omega_x \mathbf{i}$, $\omega_y \mathbf{j}$ e $\omega_z \mathbf{k}$.

Fixando um sistema de referência de orientação fixa em relação a um sistema inercial no CG do corpo do veículo, tem-se que o momento angular do corpo do veículo em relação a este sistema é dado pela equação EQ. 6.1.

$$\mathbf{H}_{Gxyz} = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}_{xyz} \quad (6.1)$$

Considerando os componentes do tensor de inércia \mathbf{I}_G do corpo do veículo em relação ao centro de gravidade, a equação matricial EQ. 6.1 corresponde a três equações escalares, EQ. 6.2 a EQ. 6.4, para os momentos angulares nas direções coordenadas em relação ao referencial móvel $Gxyz$.

$$H_x = I_{Gxx}\omega_x - I_{Gxy}\omega_y - I_{Gxz}\omega_z \quad (6.2)$$

$$H_y = -I_{Gyx}\omega_x + I_{Gyy}\omega_y - I_{Gyz}\omega_z \quad (6.3)$$

$$H_z = -I_{Gzx}\omega_x - I_{Gzy}\omega_y + I_{Gzz}\omega_z \quad (6.4)$$

Considerando os eixos x , y e z como eixos principais de inércia do corpo do veículo, os produtos de inércia são nulos e a equação EQ. 6.1 se transforma na equação EQ. 6.5, onde I_{Gxx} , I_{Gyy} e I_{Gzz} representam os momentos de inércia principais baricêntricos do corpo do veículo.

$$\mathbf{H}_{Gxyz} = I_{Gxx}\omega_x\mathbf{i} + I_{Gyy}\omega_y\mathbf{j} + I_{Gzz}\omega_z\mathbf{k} \quad (6.5)$$

Fixando-se o referencial $Gxyz$ no corpo do veículo, tem-se que o somatório de momentos em relação ao CG do veículo é igual à taxa de variação do momento angular do veículo em relação a um referencial inercial. Assim, tem-se que o somatório de momentos em relação ao CG do veículo é dado pela EQ. 6.6, onde Ω é a velocidade angular do sistema de referência móvel, que aqui é considerada igual à velocidade angular do corpo do veículo, pois o sistema girante está fixo no CG do corpo do veículo com seus eixos coordenados alinhados com os eixos principais de inércia baricêntricos.

$$\Sigma \mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{M}_{Gxyz} = & [I_{Gxx}\dot{\omega}_x - (I_{Gyy} - I_{Gzz})\omega_y\omega_z] \mathbf{i} + [I_{Gyy}\dot{\omega}_y - (I_{Gyz} - I_{Gyx})\omega_z\omega_x] \mathbf{j} + \\ & [I_{Gzz}\dot{\omega}_z - (I_{Gzx} - I_{Gzy})\omega_x\omega_y] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (6.7)$$

A EQ. 6.6 pode ser escrita na forma da EQ. 6.7, que é uma equação vetorial representando três equações escalares, nas três direções coordenadas, que são as equações de Euler para o movimento tridimensional de um corpo rígido.

A segunda lei de Newton para o corpo do veículo é dada pela equação vetorial EQ. 6.8, que equivale a três equações escalares nas três direções coordenadas.

$$\Sigma \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}_G \quad (6.8)$$

Para a orientação do corpo do veículo no espaço usam-se ângulos de Euler na sequência de rotação z-y-x. Os ângulos para tais rotações são denominados ψ , para a rotação em torno do eixo z ; θ , para a rotação em torno do eixo y; e ϕ , para a rotação em torno do eixo x. Adotando-se esta sequência de rotações, os ângulos ψ , θ e ϕ correspondem aos ângulos de ‘yaw’, ‘pitch’ e ‘roll’ do veículo, respectivamente. Para a sequência de rotações adotada, a matriz de transformação \mathbf{T} de taxa de variação dos ângulos de Euler para velocidades angulares é dada pela EQ. 6.9. Isto equivale a dizer que a matriz da EQ. 6.9 transforma o vetor $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ no vetor $[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}\phi \cdot \tan\theta & \text{cos}\phi \cdot \tan\theta \\ 0 & \text{cos}\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi \cdot \text{sec}\theta & \text{cos}\phi \cdot \text{sec}\theta \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Como hipótese simplificadora, considera-se que o veículo se encontra numa bancada de teste de suspensão, com os quatro pneus dispostos sobre atuadores capazes de fornecer ao veículo excitações de base no sentido vertical, que podem ser deslocamentos ou velocidades prescritas. Considera-se, também, que o corpo do veículo possui somente três graus de liberdade que são ‘bounce’, ‘pitch’ e ‘roll’, e os demais movimentos do corpo do veículo estão impedidos por restrições. Desta forma, o veículo tem sete graus de liberdade que são os movimentos de ‘bounce’, ‘pitch’ e ‘roll’ do corpo do veículo, somados aos quatro graus de liberdade relativos aos deslocamentos verticais dos pneus.

Com estas simplificações, o sistema de equações diferenciais que rege o modelo é formado por cinco equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, associadas aos graus de liberdade de ‘bounce’ do corpo do veículo e quatro graus de liberdade vertical dos pneus. Além destas, compõem o sistema mais quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que relacionam as acelerações angulares com momentos aplicados em relação aos eixos x e y – duas equações; e velocidades angulares nos eixos x e y com as taxas de variação dos ângulos de Euler – outras duas equações.

Tais relações são dadas nas EQ. 6.10 a 6.18.

$$\Sigma F_z = m. \ddot{z} \quad (6.10)$$

$$\Sigma F_{ztirelf} = m. \ddot{z}_{tirrelf} \quad (6.11)$$

$$\Sigma F_{ztirerf} = m. \ddot{z}_{tirrerf} \quad (6.12)$$

$$\Sigma F_{ztirelr} = m. \ddot{z}_{tirrelr} \quad (6.13)$$

$$\Sigma F_{ztirerr} = m. \ddot{z}_{tirrerr} \quad (6.14)$$

$$\Sigma M_x = I_{Gxx} \cdot \dot{\omega}_x - (I_{Gyy} - I_{Gzz}) \cdot \omega_y \cdot \omega_z \quad (6.15)$$

$$\Sigma M_y = I_{Gyy} \cdot \dot{\omega}_y - (I_{Gzz} - I_{Gxx}) \cdot \omega_z \cdot \omega_x \quad (6.16)$$

$$\dot{\theta} = \omega_x + \omega_y \cdot \text{sen } \theta \cdot \tan \theta + \omega_z \cdot \text{cos } \theta \cdot \tan \theta \quad (6.17)$$

$$\dot{\theta} = \omega_y \cdot \text{cos } \theta - \omega_z \cdot \text{sen } \theta \quad (6.18)$$

Como o grau de liberdade de rotação em torno do eixo z está impedido, ω_z vale zero, e as EQ. 6.15 e 6.16 tomam a forma das EQ. 6.19 e 6.20, respectivamente.

$$\Sigma M_x = I_{Gxx} \cdot \dot{\omega}_x \quad (6.19)$$

$$\Sigma M_y = I_{Gyy} \cdot \dot{\omega}_y \quad (6.20)$$

Na EQ. 6.17, a terceira parcela é igual a zero uma vez que ω_z vale zero. Assumindo que o corpo do veículo executa rotações em torno dos eixos x e y de pequena magnitude, o produto $\text{sen}\theta \cdot \tan\theta$ da segunda parcela tende a zero e pode ser desprezado. Assim, a EQ.6.17 toma a forma da EQ. 6.21.

$$\dot{\theta} = \omega_x \quad (6.21)$$

Ainda como consequência da consideração de pequenas rotações, tem-se que, na primeira parcela da EQ.6.18, $\cos\theta$ é aproximadamente igual a um. Além disso, a segunda parcela é igual a zero, uma vez que ω_z vale zero. Assim, a EQ. 6.18 toma a forma da EQ.6.22.

$$\dot{\theta} = \omega_y \quad (6.22)$$

As hipóteses adotadas são de fundamental importância na consideração do problema, uma vez que possibilitam a sua linearização, permitindo que o modelo seja colocado na forma de estado dada na EQ. 6.23.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (6.23)$$

O detalhamento da EQ. 6.10 conduz à EQ.6.24.

$$\begin{aligned} \Sigma F_z = m \cdot g - & [(z - l_{front} \cdot \theta - l_{left} \cdot \theta) - z_{tirelf}] \cdot k_{lf} \\ & - [(\dot{z} - l_{front} \cdot \dot{\theta} - l_{left} \cdot \dot{\theta}) - \dot{z}_{tirelf}] \cdot b_{lf} \\ & - [(z - l_{front} \cdot \theta - l_{right} \cdot \theta) - z_{tirerf}] \cdot k_{rf} \\ & - [(\dot{z} - l_{front} \cdot \dot{\theta} + l_{right} \cdot \dot{\theta}) - \dot{z}_{tirerf}] \cdot b_{rf} \\ & - [(z - l_{rear} \cdot \theta - l_{left} \cdot \theta) - z_{tirelr}] \cdot k_{lr} \\ & - [(\dot{z} - l_{rear} \cdot \dot{\theta} - l_{left} \cdot \dot{\theta}) - \dot{z}_{tirelr}] \cdot b_{lr} \\ & - [(z - l_{rear} \cdot \theta + l_{right} \cdot \theta) - z_{tirerr}] \cdot k_{rr} \\ & - [(\dot{z} - l_{rear} \cdot \dot{\theta} + l_{right} \cdot \dot{\theta}) - \dot{z}_{tirerr}] \cdot b_{rr} \end{aligned} \quad (6.24)$$

O detalhamento da EQ. 6.11 conduz à EQ.6.25.

$$\begin{aligned}
& m_{tirelf} \cdot \ddot{z}_{tirelf} - [(\dot{z} - l_{front} \cdot \dot{\theta} - l_{left} \cdot \dot{\phi}) - \dot{z}_{tirelf}] \cdot b_{lf} \\
& - [(\dot{z} - l_{front} \cdot \dot{\theta} - l_{left} \cdot \dot{\phi}) - z_{tirelf}] \cdot k_{lf} \\
& + b_{tirelf} \cdot (\dot{z}_{tirelf} - \dot{z}_{roadlf}) + k_{tirelf} \cdot (z_{tirelf} - z_{roadlf}) = 0
\end{aligned} \tag{6.25}$$

O detalhamento da EQ. 6.12 conduz à EQ. 6.26.

$$\begin{aligned}
& m_{tirerf} \cdot \ddot{z}_{tirerf} - [(\dot{z} - l_{front} \cdot \dot{\theta} + l_{right} \cdot \dot{\phi}) - \dot{z}_{tirerf}] \cdot b_{rf} \\
& - [(\dot{z} - l_{front} \cdot \dot{\theta} + l_{right} \cdot \dot{\phi}) - z_{tirerf}] \cdot k_{rf} \\
& + b_{tirerf} \cdot (\dot{z}_{tirerf} - \dot{z}_{roadrf}) + k_{tirerf} \cdot (z_{tirerf} - z_{roadrf}) = 0
\end{aligned} \tag{6.26}$$

O detalhamento da EQ. 6.13 conduz à EQ.6.27.

$$\begin{aligned}
& m_{tirelr} \cdot \ddot{z}_{tirelr} - [(\dot{z} + l_{rear} \cdot \dot{\theta} - l_{left} \cdot \dot{\phi}) - \dot{z}_{tirelr}] \cdot b_{lr} \\
& - [(\dot{z} + l_{rear} \cdot \dot{\theta} - l_{left} \cdot \dot{\phi}) - z_{tirelr}] \cdot k_{lr} \\
& + b_{tirelr} \cdot (\dot{z}_{tirelr} - \dot{z}_{roadlr}) + k_{tirelr} \cdot (z_{tirelr} - z_{roadlr}) = 0
\end{aligned} \tag{6.27}$$

O detalhamento da EQ. 6.14 conduz à EQ. 6.28.

$$\begin{aligned}
& m_{tirerr} \cdot \ddot{z}_{tirerr} - [(\dot{z} + l_{rear} \cdot \dot{\theta} + l_{right} \cdot \dot{\phi}) - \dot{z}_{tirerr}] \cdot b_{rr} \\
& - [(\dot{z} + l_{rear} \cdot \dot{\theta} + l_{right} \cdot \dot{\phi}) - z_{tirerr}] \cdot k_{rr} \\
& + b_{tirerr} \cdot (\dot{z}_{tirerr} - \dot{z}_{roadrr}) + k_{tirerr} \cdot (z_{tirerr} - z_{roadrr}) = 0
\end{aligned} \tag{6.28}$$

O detalhamento da EQ. 6.19 conduz à EQ. 6.29.

$$\begin{aligned}
I_{Gxx} \cdot \dot{\omega}_x = & [k_{lf} \cdot z - k_{lf} \cdot l_{front} \cdot \theta - k_{lf} \cdot l_{left} \cdot \phi - k_{lf} \cdot z_{roadlf} \\
& + b_{lf} \cdot \dot{z} - b_{lf} \cdot l_{front} \cdot \dot{\theta} - b_{lf} \cdot l_{left} \cdot \dot{\phi} - b_{lf} \cdot \dot{z}_{roadlf}] \cdot l_{left} \\
& + [-k_{rf} \cdot z + k_{rf} \cdot l_{front} \cdot \theta - k_{rf} \cdot l_{right} \cdot \phi + k_{rf} \cdot z_{roadrf} \\
& - b_{rf} \cdot \dot{z} + b_{rf} \cdot l_{front} \cdot \dot{\theta} - b_{rf} \cdot l_{right} \cdot \dot{\phi} + b_{rf} \cdot \dot{z}_{roadrf}] \cdot l_{right} \\
& + [k_{lr} \cdot z + k_{lr} \cdot l_{rear} \cdot \theta - k_{lr} \cdot l_{left} \cdot \phi - k_{lr} \cdot z_{roadlr} \\
& + b_{lr} \cdot \dot{z} + b_{lr} \cdot l_{rear} \cdot \dot{\theta} - b_{lr} \cdot l_{left} \cdot \dot{\phi} - b_{lr} \cdot \dot{z}_{roadlr}] \cdot l_{left} \\
& + [-k_{rr} \cdot z - k_{rr} \cdot l_{rear} \cdot \theta - k_{rr} \cdot l_{right} \cdot \phi + k_{rr} \cdot z_{roadrr} \\
& - b_{rr} \cdot \dot{z} - b_{rr} \cdot l_{rear} \cdot \dot{\theta} - b_{rr} \cdot l_{right} \cdot \dot{\phi} + b_{rr} \cdot \dot{z}_{roadrr}] \cdot l_{right}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

O detalhamento da EQ. 6.20 conduz à EQ. 6.30.

$$\begin{aligned}
I_{Gyy} \cdot \dot{\omega}_y = & [k_{lf} \cdot z - k_{lf} \cdot l_{front} \cdot \theta - k_{lf} \cdot l_{left} \cdot \phi - k_{lf} \cdot z_{roadlf} \\
& + b_{lf} \cdot \dot{z} - b_{lf} \cdot l_{front} \cdot \dot{\theta} - b_{lf} \cdot l_{left} \cdot \dot{\phi} - b_{lf} \cdot \dot{z}_{roadlf}] \cdot l_{front} \\
& + [k_{rf} \cdot z - k_{rf} \cdot l_{front} \cdot \theta + k_{rf} \cdot l_{right} \cdot \phi - k_{rf} \cdot z_{roadrf} \\
& + b_{rf} \cdot \dot{z} - b_{rf} \cdot l_{front} \cdot \dot{\theta} + b_{rf} \cdot l_{right} \cdot \dot{\phi} - b_{rf} \cdot \dot{z}_{roadrf}] \cdot l_{front} \\
& - [k_{lr} \cdot z + k_{lr} \cdot l_{rear} \cdot \theta - k_{lr} \cdot l_{left} \cdot \phi - k_{lr} \cdot z_{roadlr} \\
& + b_{lr} \cdot \dot{z} + b_{lr} \cdot l_{rear} \cdot \dot{\theta} - b_{lr} \cdot l_{left} \cdot \dot{\phi} - b_{lr} \cdot \dot{z}_{roadlr}] \cdot l_{rear} \\
& - [k_{rr} \cdot z + k_{rr} \cdot l_{rear} \cdot \theta + k_{rr} \cdot l_{right} \cdot \phi - k_{rr} \cdot z_{roadrr} \\
& + b_{rr} \cdot \dot{z} + b_{rr} \cdot l_{rear} \cdot \dot{\theta} + b_{rr} \cdot l_{right} \cdot \dot{\phi} - b_{rr} \cdot \dot{z}_{roadrr}] \cdot l_{rear}
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Observando-se as hipóteses simplificadoras adotadas, obtêm-se as equações diferenciais de governo do modelo no domínio dimensional. O caminho a ser percorrido agora é o mesmo proposto no CAP 3, que consiste na adimensionalização das equações diferenciais de governo, definição dos parâmetros Π como sendo iguais aos coeficientes adimensionais das equações diferenciais de governo adimensionalizadas, e determinação dos valores numéricos dos parâmetros que asseguram similaridade dinâmica completa entre o modelo em escala e o protótipo.

Para obter a equação diferencial na forma adimensional, inicia-se pela parametrização das coordenadas que representam o deslocamento vertical z , da velocidade vertical dz/dt , do deslocamento angular de ‘pitch’ θ , da velocidade angular de ‘pitch’ $d\theta/dt$, e do tempo t , (necessários para a determinação das condições iniciais das equações diferenciais no domínio adimensional), estabelecendo as relações entre essas grandezas nos espaços dimensional e adimensional.

Definem-se agora as constantes de rigidez e de amortecimento equivalentes do sistema pelas relações dadas nas equações EQ. 6.31 e 6.32.

$$k = k_{eq} = k_{lf} + k_{rf} + k_{lr} + k_{rr} \quad (6.31)$$

$$b = b_{eq} = b_{lf} + b_{rf} + b_{lr} + b_{rr} \quad (6.32)$$

Para a parametrização da coordenada z , dada em metros, que se refere ao grau de liberdade de deslocamento vertical – ‘bounce’ - (conforme FIG. 4.1), utiliza-se o valor da variável z_{eq} dado pela EQ. 6.33, que é o deslocamento da massa do sistema em metros até a posição de equilíbrio estático. Desse modo, a variável deslocamento da massa no domínio adimensional, z^* , fica dada pela EQ. 6.34.

Como o ângulo de ‘pitch’ é dado em radianos, que já é uma grandeza adimensional, o deslocamento angular adimensional será tomado como o próprio ângulo de ‘pitch’. O mesmo

vale para o ângulo de ‘roll’. Assim, as relações entre os deslocamentos angulares no domínio dimensional e adimensional são dados pelas EQ. 6.35 e 6.36.

$$z_{eq} = \frac{m \cdot g}{k_{eq}} \quad (6.33)$$

$$z^* = \frac{z}{z_{eq}} \quad (6.34)$$

$$\theta^* = \theta \quad (6.35)$$

$$\phi^* = \phi \quad (6.36)$$

Para a parametrização do tempo t , em segundos, define-se um valor de tempo τ em segundos pela EQ. 6.37 e estabelece-se a parametrização do tempo no domínio adimensional t^* pela divisão do tempo t por τ , como dado na EQ. 6.38.

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (6.37)$$

$$t^* = \frac{t}{\tau} \quad (6.38)$$

Para a parametrização da velocidade, utiliza-se z_{eq} e τ definidas em EQ. 6.33 e 6.37, respectivamente, para definir uma velocidade v_{eq} em m/s dada pela EQ. 6.39. A parametrização da velocidade é dada pela EQ. 6.40.

$$v_{eq} = \frac{z_{eq}}{\tau} \quad (6.39)$$

$$\frac{dz^*}{dt^*} = \frac{1}{v_{eq}} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (6.40)$$

A equação diferencial de movimento que rege o grau de liberdade de deslocamento vertical do sistema modelado como apresentado esquematicamente na FIG. 6.1, e assumindo que a massa parte da posição de equilíbrio estático (origem do referencial z coincidente com a posição de equilíbrio estático), é dada pela EQ. 6.10.

A adimensionalização da EQ. 6.24 conduz à EQ. 6.41, onde os parâmetros Π são dados no APÊNDICE 4.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = & 1 - \Pi_1 \cdot z^* + \Pi_2 \cdot \theta^* + \Pi_3 \cdot \phi^* + \Pi_1 \cdot z_{tirelf}^* - \Pi_4 \cdot \frac{dz^*}{dt^*} \\ & + \Pi_5 \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} + \Pi_6 \cdot \frac{d\phi^*}{dt^*} + \Pi_4 \cdot \frac{dz_{tirelf}^*}{dt^*} - \Pi_7 \cdot z^* + \Pi_8 \cdot \theta^* - \Pi_9 \cdot \phi^* + \Pi_7 \cdot z_{tirerf}^* \\ & - \Pi_{10} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + \Pi_{11} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - \Pi_{12} \cdot \frac{d\phi^*}{dt^*} + \Pi_{10} \cdot \frac{dz_{tirerf}^*}{dt^*} - \Pi_{13} \cdot z^* - \Pi_{14} \cdot \theta^* \\ & + \Pi_{15} \cdot \phi^* + \Pi_{13} \cdot z_{tirelr}^* - \Pi_{16} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} - \Pi_{17} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} + \Pi_{18} \cdot \frac{d\phi^*}{dt^*} + \Pi_{16} \cdot \frac{dz_{tirelr}^*}{dt^*} \\ & - \Pi_{19} \cdot z^* - \Pi_{20} \cdot \theta^* - \Pi_{21} \cdot \phi^* + \Pi_{19} \cdot z_{tirerr}^* - \Pi_{22} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} \\ & - \Pi_{23} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - \Pi_{24} \cdot \frac{d\phi^*}{dt^*} + \Pi_{22} \cdot \frac{dz_{tirerr}^*}{dt^*}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

A adimensionalização da EQ. 6.29 conduz à EQ. 6.42, onde os parâmetros Π são dados no APÊNDICE 4.

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_x^*}{dt^*} = & \Pi_{25} \cdot z^* - \Pi_{26} \cdot \theta^* - \Pi_{27} \cdot \varnothing^* - \Pi_{25} \cdot z_{tirelf}^* + \Pi_{28} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} \\
& - \Pi_{29} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - \Pi_{30} \cdot \frac{d\varnothing^*}{dt^*} - \Pi_{28} \cdot \frac{dz_{tirelf}^*}{dt^*} - \Pi_{31} \cdot z^* + \Pi_{32} \cdot \theta^* - \Pi_{33} \cdot \varnothing^* \\
& + \Pi_{31} \cdot z_{tirerf}^* - \Pi_{34} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + \Pi_{35} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - \Pi_{36} \cdot \frac{d\varnothing^*}{dt^*} + \Pi_{34} \cdot \frac{dz_{tirerf}^*}{dt^*} + \Pi_{37} \cdot z^* \\
& + \Pi_{38} \cdot \theta^* - \Pi_{39} \cdot \varnothing^* - \Pi_{37} \cdot z_{tirelr}^* + \Pi_{40} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + \Pi_{41} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} \\
& - \Pi_{42} \cdot \frac{d\varnothing^*}{dt^*} - \Pi_{40} \cdot \frac{dz_{tirelr}^*}{dt^*} - \Pi_{43} \cdot z^* - \Pi_{44} \cdot \theta^* - \Pi_{45} \cdot \varnothing^* + \Pi_{43} \cdot z_{tirerr}^* \\
& - \Pi_{46} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} - \Pi_{47} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - \Pi_{48} \cdot \frac{d\varnothing^*}{dt^*} + \Pi_{46} \cdot \frac{dz_{tirerr}^*}{dt^*}
\end{aligned} \tag{6.42}$$

A adimensionalização da EQ. 6.30 conduz à EQ. 6.43, onde os parâmetros Π são dados no APÊNDICE 4.

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_y^*}{dt^*} = & \Pi_{49} \cdot z^* - \Pi_{50} \cdot \theta^* - \Pi_{51} \cdot \varnothing^* - \Pi_{49} \cdot z_{tirelf}^* + \Pi_{52} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} \\
& - \Pi_{53} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - \Pi_{54} \cdot \frac{d\varnothing^*}{dt^*} - \Pi_{52} \cdot \frac{dz_{tirelf}^*}{dt^*} + \Pi_{55} \cdot z^* - \Pi_{56} \cdot \theta^* + \Pi_{57} \cdot \varnothing^* \\
& - \Pi_{55} \cdot z_{tirerf}^* + \Pi_{58} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} - \Pi_{59} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} + \Pi_{60} \cdot \frac{d\varnothing^*}{dt^*} - \Pi_{58} \cdot \frac{dz_{tirerf}^*}{dt^*} - \Pi_{61} \cdot z^* \\
& - \Pi_{62} \cdot \theta^* + \Pi_{63} \cdot \varnothing^* + \Pi_{61} \cdot z_{tirelr}^* - \Pi_{64} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} - \Pi_{65} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} \\
& + \Pi_{66} \cdot \frac{d\varnothing^*}{dt^*} + \Pi_{64} \cdot \frac{dz_{tirelr}^*}{dt^*} - \Pi_{67} \cdot z^* - \Pi_{68} \cdot \theta^* - \Pi_{69} \cdot \varnothing^* + \Pi_{67} \cdot z_{tirerr}^* \\
& - \Pi_{70} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} - \Pi_{71} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - \Pi_{72} \cdot \frac{d\varnothing^*}{dt^*} + \Pi_{70} \cdot \frac{dz_{tirerr}^*}{dt^*}
\end{aligned} \tag{6.43}$$

A adimensionalização da EQ. 6.25 conduz à EQ. 6.44, onde os parâmetros Π são dados no APÊNDICE 4.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_{tirelf}^*}{dt^{*2}} = & \Pi_{73} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} - \Pi_{74} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - \Pi_{75} \cdot \frac{d\phi^*}{dt^*} - \Pi_{73} \cdot \frac{dz_{tirelf}^{* *}}{dt^*} + \Pi_{76} \cdot z^* - \Pi_{77} \cdot \theta^* - \Pi_{78} \cdot \phi^* \\ & - \Pi_{76} \cdot z_{tirelf}^* - \Pi_{79} \cdot \frac{dz_{tirelf}^*}{dt^*} + \Pi_{79} \cdot \frac{dz_{roadlf}^*}{dt^*} - \Pi_{80} \cdot z_{tirelf}^* + \Pi_{80} \cdot z_{roadlf}^* \end{aligned} \quad (6.44)$$

A adimensionalização da EQ. 6.26 conduz à EQ. 6.45, onde os parâmetros Π são dados no APÊNDICE 4.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_{tirerf}^*}{dt^{*2}} = & \Pi_{81} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} - \Pi_{82} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} + \Pi_{83} \cdot \frac{d\phi^*}{dt^*} - \Pi_{81} \cdot \frac{dz_{tirerf}^{* *}}{dt^*} + \Pi_{84} \cdot z^* - \Pi_{85} \cdot \theta^* + \Pi_{86} \cdot \phi^* \\ & - \Pi_{84} \cdot z_{tirerf}^* - \Pi_{87} \cdot \frac{dz_{tirerf}^*}{dt^*} + \Pi_{87} \cdot \frac{dz_{roadrf}^*}{dt^*} - \Pi_{88} \cdot z_{tirerf}^* + \Pi_{88} \cdot z_{roadrf}^* \end{aligned} \quad (6.45)$$

A adimensionalização da EQ. 6.27 conduz à EQ. 6.46, onde os parâmetros Π são dados no APÊNDICE 4.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_{tirelr}^*}{dt^{*2}} = & \Pi_{89} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + \Pi_{90} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - \Pi_{91} \cdot \frac{d\phi^*}{dt^*} - \Pi_{89} \cdot \frac{dz_{tirelr}^{* *}}{dt^*} + \Pi_{92} \cdot z^* + \Pi_{93} \cdot \theta^* - \Pi_{94} \cdot \phi^* \\ & - \Pi_{92} \cdot z_{tirelr}^* - \Pi_{95} \cdot \frac{dz_{tirelr}^*}{dt^*} + \Pi_{95} \cdot \frac{dz_{roadlr}^*}{dt^*} - \Pi_{96} \cdot z_{tirelr}^* + \Pi_{96} \cdot z_{roadlr}^* \end{aligned} \quad (6.46)$$

A adimensionalização da EQ. 6.28 conduz à EQ. 6.47, onde os parâmetros Π são dados no APÊNDICE 4.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 z_{tirerr}^*}{dt^{*2}} = & \Pi_{97} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + \Pi_{98} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} + \Pi_{99} \cdot \frac{d\phi^*}{dt^*} - \Pi_{97} \cdot \frac{dz_{tirerr}^*}{dt^*} + \Pi_{100} \cdot z^* + \Pi_{101} \cdot \theta^* \\
& + \Pi_{102} \cdot \phi^* - \Pi_{100} \cdot z_{tirerr}^* - \Pi_{103} \cdot \frac{dz_{tirerr}^*}{dt^*} + \Pi_{103} \cdot \frac{dz_{roadrr}^*}{dt^*} \\
& - \Pi_{104} \cdot z_{tirerr}^* + \Pi_{104} \cdot z_{roadrr}^*
\end{aligned}
\tag{6.47}$$

Do mesmo modo que se obteve a similaridade dinâmica completa para os modelos mais simples apresentados no trabalho, também para este modelo foi obtida a similaridade dinâmica completa entre o modelo em escala e o protótipo.

É importante lembrar que, como mencionado no CAP. 1, a sequência proposta neste trabalho para obtenção dos parâmetros Π adimensionais, conduz a um conjunto de parâmetros Π que não é mínimo, mas que assegura a similaridade dinâmica completa no espaço adimensional.

7 OTIMIZAÇÃO DA SIMILARIDADE DINÂMICA INCOMPLETA – MÉTRICAS \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞

7.1 INTRODUÇÃO

A otimização da similaridade dinâmica incompleta usando a métrica do valor RMS do erro adimensional nas variáveis de estado foi apresentada no CAP. 5. Neste capítulo, é apresentada a otimização da similaridade dinâmica incompleta usando como métrica as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

7.2 FORMA DE ESTADO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ADIMENSIONAIS

Considera-se agora o veículo modelado como o carro completo dotado de sete graus de liberdade, conforme desenvolvido no CAP. 6. Com as hipóteses simplificadoras adotadas naquele capítulo, o sistema é linear e pode ser colocado na forma da EQ. 7.1, com o vetor de estado \mathbf{x} e sua derivada $\dot{\mathbf{x}}$ dados pelas EQ. 7.2 e 7.3, respectivamente. O vetor de entradas \mathbf{u} é dado pela EQ. 7.4. O vetor de saídas \mathbf{y} pode ser definido segundo as variáveis de estado ou suas combinações lineares que se desejam medir.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\mathbf{x} = [z, \dot{z}, \omega_x, \omega_y, \phi, \theta, z_{tirelf}, \dot{z}_{tirelf}, z_{tirerf}, \dot{z}_{tirerf}, z_{tirelr}, \dot{z}_{tirelr}, z_{tirerr}, \dot{z}_{tirerr}]^T \quad (7.2)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{z}, \ddot{z}, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{z}_{tirelf}, \ddot{z}_{tirelf}, \dot{z}_{tirerf}, \ddot{z}_{tirerf}, \dot{z}_{tirelr}, \ddot{z}_{tirelr}, \dot{z}_{tirerr}, \ddot{z}_{tirerr}]^T \quad (7.3)$$

$$\mathbf{u} = [z_{roadlf}, \dot{z}_{roadlf}, z_{roadrf}, \dot{z}_{roadrf}, z_{roadlr}, \dot{z}_{roadlr}, z_{roadrr}, \dot{z}_{roadrr}]^T \quad (7.4)$$

As matrizes de estado, \mathbf{A} , e de entradas, \mathbf{B} , são razoavelmente esparsas e seus elementos não nulos são dados no APÊNDICE 5. Os parâmetros Π adimensionais são dados por suas expressões deduzidas no CAP 6 e estão apresentados no APÊNDICE 4.

Assim, neste ponto, tem-se o sistema de equações diferenciais de governo adimensionais na forma de estado.

7.3 OTIMIZAÇÃO DA SIMILARIDADE DINÂMICA INCOMPLETA – MÉTRICAS \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞

A otimização da similaridade dinâmica incompleta usando como métrica o valor RMS do erro adimensional nas variáveis de estado, como mostrado no CAP 5, mostra-se eficiente para a determinação do modelo em escala similar ótimo, mas o procedimento envolve a simulação dos modelos adimensionais resultantes do protótipo e do modelo, sujeitos a condições iniciais ou excitações de base equivalentes em ambos os sistemas. Disso decorre uma infinidade de possibilidades para a metodologia, uma vez que as condições iniciais e excitações de base podem ser escolhidas aleatoriamente, e com isso infinitas otimizações podem ser conduzidas.

A utilização da técnica apresentada no CAP 5 mostra que, apesar da técnica da otimização RMS ser bastante estável, ela pode conduzir a sistemas ótimos ligeiramente diferentes dependendo do tipo de entrada ou de condição inicial utilizadas. Apesar da diferença entre os sistemas ótimos similares ser mínima, é interessante que o procedimento possa ser padronizado. Uma forma de se fazer isso é definir o tipo de entrada ou de condição inicial a ser utilizada na aplicação da metodologia. Outra forma possível é utilizar-se uma métrica de sistema já padronizada e consagrada, o que vai automaticamente padronizar a entrada utilizada e tornar a metodologia proposta mais simples e prática.

Assim, com o objetivo de padronizar a metodologia para determinação do modelo similar ótimo, propõe-se o uso das métricas \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ na construção da função objetivo da otimização.

7.4 NORMA \mathcal{H}_2

O espaço \mathcal{H}_2 é o espaço das funções matriciais de uma variável complexa $F(s)$ que são estáveis e têm norma finita:

$$\mathcal{H}_2 \triangleq \left\{ F/F(s) \text{ estável}; \|F\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}[F^*(j\omega)F(j\omega)]d\omega \right)^{1/2} < \infty \right\} \quad (7.5)$$

Denota-se por $\mathbb{R}\mathcal{H}_2$ o subespaço de \mathcal{H}_2 , de todas as matrizes de transferência racionais estáveis e estritamente próprias em que o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não possuindo transmissão direta (matriz D nula na EQ. 7.1).

Para o cálculo da norma \mathcal{H}_2 no espaço de estados, considere $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_2$ da forma dada na EQ. 7.6.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (7.6)$$

Então a norma \mathcal{H}_2 é dada pela EQ.7.7, onde $\mathbf{L}_o > 0$ e $\mathbf{L}_c > 0$ são os gramianos de observabilidade e controlabilidade que satisfazem às EQ. 7.8 e 7.9. Os gramianos \mathbf{L}_o e \mathbf{L}_c , são simétricos e positivos definidos.

$$\|\mathbf{G}\|_2^2 = \text{Tr}\{\mathbf{B}^T\mathbf{L}_o\mathbf{B}\} = \text{Tr}\{\mathbf{C}\mathbf{L}_c\mathbf{C}^T\} \quad (7.7)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{L}_c + \mathbf{L}_c\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{L}_o + \mathbf{L}_o\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (7.9)$$

Uma interpretação para a norma \mathcal{H}_2 é que ela constitui na integral do módulo da saída do sistema para uma entrada impulsiva.

7.5 NORMA \mathcal{H}_∞

O espaço \mathcal{H}_∞ é o espaço das funções matriciais de uma variável complexa, $\mathbf{F}(s)$, que são estáveis e têm norma finita:

$$\mathcal{H}_\infty \triangleq \{\mathbf{F}/\mathbf{F}(s) \text{ estável ; } \|\mathbf{F}\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}[\mathbf{F}(j\omega)] < \infty\} \quad (7.10)$$

Onde $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}[\mathbf{F}(s)]$ é o ganho máximo no diagrama de Bode do sistema e σ_{\max} é o maior valor singular.

Denota-se por $\mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ o subespaço de \mathcal{H}_∞ de todas as matrizes de transferência racionais estáveis e próprias.

Considere $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ da forma dada na EQ. 7.11.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (7.11)$$

Então a norma \mathcal{H}_∞ no espaço de estados é dada pela EQ. 7.12, onde L_c e L_o são os gramianos de controlabilidade e observabilidade da realização balanceada do sistema dados pelas EQ. 7.8 e 7.9, e $\bar{\lambda}$ representa o maior autovalor da matriz em questão.

$$\|\mathbf{G}\|_\infty^2 = \bar{\lambda}(\mathbf{L}_c\mathbf{L}_o) = \bar{\lambda}(\mathbf{L}_c^2) = \bar{\lambda}(\mathbf{L}_o^2) \quad (7.12)$$

Assim, para se obter a norma \mathcal{H}_∞ do sistema, obtém-se inicialmente a realização balanceada do sistema, que é uma transformação de similaridade em que o gramiano de controlabilidade é igual ao gramiano de observabilidade. Em seguida, extrai-se o maior autovalor da matriz resultante do produto do gramiano de controlabilidade pelo gramiano de observabilidade. Como os gramianos são iguais para esta realização do sistema, o mesmo resultado é obtido extraindo-se o maior autovalor do gramiano de controlabilidade (ou de observabilidade) elevado ao quadrado.

A norma \mathcal{H}_∞ pode ser entendida como o ganho máximo da saída variando-se as frequências de entrada do sistema.

7.6 OTIMIZAÇÃO DA SIMILARIDADE DINÂMICA INCOMPLETA

Com o objetivo de padronizar a metodologia proposta, adota-se a norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ da diferença das saídas dos sistemas (conexão paralela negativa) como sendo a função objetivo J a ser minimizada dentro de um conjunto finito de vetores P .

Como visto anteriormente, para os sistemas estudados a similaridade dinâmica completa é possível de ser obtida teoricamente. Assim, para os sistemas adimensionais resultantes da adimensionalização do protótipo e do modelo em escala, a saída é a mesma para os dois sistemas adimensionais, contanto que eles estejam sujeitos a condições iniciais e/ou excitações de base equivalentes. Neste caso, a diferença das saídas dos sistemas é nula e

tanto a norma \mathcal{H}_2 quanto a norma \mathcal{H}_∞ da diferença da saída dos sistemas é nula. Esta é a situação ideal a ser buscada. É importante ressaltar que tal situação é teoricamente possível para os sistemas estudados, uma vez que a similaridade dinâmica completa pode ser teoricamente atingida.

Como a similaridade dinâmica completa é muito difícil de ser atingida na prática, os sistemas adimensionais resultantes da adimensionalização do protótipo e do modelo em escala apresentarão similaridade dinâmica incompleta e as saídas dos sistemas adimensionais serão diferentes, mesmo para condições iniciais e/ou excitações de base equivalentes. Assim, a diferença das saídas dos sistemas adimensionais será diferente de zero e terá normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ diferentes de zero.

A diferença das saídas pode ser considerada tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência para analisar o significado da norma \mathcal{H}_2 (no domínio do tempo) ou \mathcal{H}_∞ (no domínio da frequência) e quantificar a similaridade dinâmica incompleta entre os sistemas.

A definição das normas nos leva a concluir que quanto menor for o valor das normas da diferença das saídas dos sistemas, mais próximos da similaridade dinâmica completa os sistemas estarão. Assim, a minimização das normas \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ da diferença das saídas dos sistemas garante a similaridade dinâmica incompleta ótima entre eles.

7.7 SISTEMA DIFERENÇA

Considera-se agora o modelo do veículo com os graus de liberdade de ‘bounce’, ‘pitch’ e ‘roll’ do corpo do veículo e deslocamento vertical dos quatro pneus, totalizando sete graus de liberdade. Com as hipóteses simplificadoras adotadas no CAP. 6, o sistema é linear e pode ser colocado na forma de estado dada pela EQ. 7.1.

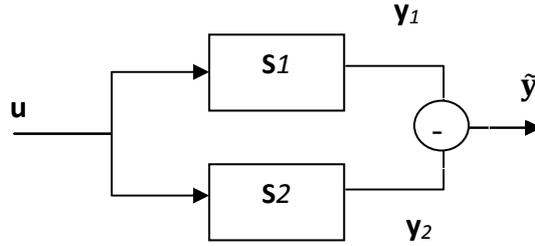


FIG 7.1: Diagrama de blocos da diferença da saída dos sistemas.

A adimensionalização das equações diferenciais de governo leva a dois sistemas lineares adimensionais: um resultante da adimensionalização do protótipo, que passará a ser denominado $S1$, e outro resultante da adimensionalização do modelo em escala, denominado $S2$. A diferença da saída dos sistemas $S1$ e $S2$, denominada \tilde{y} , está representada esquematicamente no diagrama de blocos da FIG. 7.1.

O sistema adimensional $S1$, resultante da adimensionalização do protótipo, pode ser definido por suas matrizes como na EQ 7.13; e o sistema adimensional $S2$, resultante da adimensionalização do modelo, pode ser definido por suas matrizes como na EQ. 7.14.

$$\mathbf{S1} = \{\mathbf{A}_{prot}, \mathbf{B}_{prot}, \mathbf{C}_{prot}, \mathbf{D}_{prot}\} \quad (7.13)$$

$$\mathbf{S2} = \{\mathbf{A}_{mod}, \mathbf{B}_{mod}, \mathbf{C}_{mod}, \mathbf{D}_{mod}\} \quad (7.14)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{prot} = \mathbf{A}_{prot}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{prot}\mathbf{u} \quad (7.15)$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{C}_{prot}\mathbf{x}_{prot} + \mathbf{D}_{prot}\mathbf{u} \quad (7.16)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{mod} = \mathbf{A}_{mod}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{mod}\mathbf{u} \quad (7.17)$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{C}_{mod}\mathbf{x}_{mod} + \mathbf{D}_{mod}\mathbf{u} \quad (7.18)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{prot} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{mod} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{prot} \\ \mathbf{x}_{mod} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{prot} \\ \mathbf{B}_{mod} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \quad (7.19)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = [\mathbf{C}_{prot} \quad -\mathbf{C}_{mod}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{prot} \\ \mathbf{x}_{mod} \end{bmatrix} + [\mathbf{D}_{prot} - \mathbf{D}_{mod}] \cdot \mathbf{u} \quad (7.20)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{prot} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{mod} \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{prot} \\ \mathbf{B}_{mod} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_{prot} \quad -\mathbf{C}_{mod}] \tag{7.23}$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = [\mathbf{D}_{prot} - \mathbf{D}_{mod}] \tag{7.24}$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \{\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}}\} \tag{7.25}$$

Para o sistema adimensional resultante do protótipo, a equação de estado e a saída são dadas pelas EQ. 7.15 e 7.16, e para o sistema adimensional resultante do modelo em escala, a equação de estado e a saída são dadas pelas EQ. 7.17 e 7.18. Com base nestas equações, pode-se montar o sistema diferença, que consiste no sistema cuja saída é a diferença das saídas dos sistemas adimensionais do protótipo e do modelo. Tal sistema tem sua equação de estado e sua saída dadas respectivamente pelas EQ. 7.19 e 7.20 onde $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}_{prot} \quad \mathbf{x}_{mod}]^T$. Assim, o sistema diferença $\tilde{\mathbf{S}}$ é dado pela EQ. 7.25, onde $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ e $\tilde{\mathbf{D}}$ são dadas pelas EQ. 7.21 a 7.24 e serão usadas para o cálculo dos gramianos de controlabilidade e observabilidade (EQ. 7.8 e 7.9). Uma vez calculados os gramianos, calculam-se as normas \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ do sistema diferença pelas EQ. 7.7 e 7.12, lembrando-se que, quando se deseja calcular a norma \mathcal{H}_∞ do sistema diferença, antes do cálculo dos gramianos, deve-se obter a realização balanceada do sistema em que os gramianos de controlabilidade e observabilidade são iguais.

7.8 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Parte-se agora para as simulações exigidas pela metodologia proposta. O sistema dimensional considerado para a análise é o do veículo com sete graus de liberdade desenvolvido no CAP. 6 e o caminho a ser percorrido para a obtenção dos sistemas adimensionais $S1$ e $S2$, dados pelas EQ. 7.13 e 7.14, é o apresentado na FIG. 2.3.

Parte-se do protótipo modelado, segundo o desenvolvimento apresentado no CAP. 6, e determina-se o sistema adimensional $S1$ a partir do protótipo, seguindo o procedimento de adimensionalização utilizado no CAP. 6. Este sistema adimensional obtido do protótipo (sistema $S1$) é o sistema ideal a ser atingido pela adimensionalização do sistema do modelo em escala (sistema $S2$).

Uma vez definido o sistema adimensional construído a partir do protótipo (sistema $S1$), parte-se para a busca dos parâmetros do modelo em escala que darão origem a um sistema adimensional ($S2$) com similaridade dinâmica incompleta ótima em relação ao sistema adimensional $S1$.

Para isso, realiza-se uma otimização dos valores dos parâmetros do modelo em escala com vistas a minimizar a função objetivo definida como a norma \mathcal{H}_2 (ou a norma \mathcal{H}_∞) da diferença dos sistemas adimensionais.

TAB. 7.1: Parâmetros do protótipo.

Parâmetro	Valor
m_p	1460 kg
k_{lfp}	19960 N/m
k_{rfp}	19960 N/m
k_{lrp}	17500 N/m
k_{rrp}	17500 N/m
b_{lfp}	1050 N.s/m
b_{rfp}	1050 N.s/m
b_{lrp}	900 N.s/m
b_{rrp}	900 N.s/m
L_{1p}	2,50 m
L_{2p}	1,40 m
l_{frontp}	0,898 m
l_{rearp}	1,602 m
l_{rightp}	0,7 m
l_{leftp}	0,7 m
$m_{tirelfp}$	35 kg
$m_{tirerfp}$	35 kg
$m_{tirelrp}$	35 kg
$m_{tirerrp}$	35 kg
$k_{tirelfp}$	250000 N/m
$k_{tirerfp}$	250000 N/m
$k_{tirelrp}$	250000 N/m
$k_{tirerrp}$	250000 N/m
$b_{tirelfp}$	500 N.s/m
$b_{tirerfp}$	500 N.s/m
$b_{tirelrp}$	500 N.s/m
$b_{tirerrp}$	500 N.s/m

TAB. 7.2: Faixa de variação dos valores dos parâmetros do modelo em escala para otimização com norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Parâmetro	Valor inicial	Valor final	Passo	Nr.valores
m_m	25 kg	55 kg	5 kg	7
k_{lfm}	5500 N/m	7000 N/m	500 N/m	4
k_{rfm}	Igual a k_{lfm}			
k_{lrm}	4800 N/m	6300 N/m	500 N/m	4
k_{rrm}	Igual a k_{lrm}			
b_{lfm}	90 N.s/m	150 N.s/m	20 N.s/m	4
b_{rfm}	Igual a b_{lfm}			
b_{lrm}	80 N.s/m	140 N.s/m	20 N.s/m	4
b_{rrm}	Igual a b_{lrm}			
L_{1m}	0,24 m	0,44 m		
L_{2m}	0,14 m	0,34 m		
l_{frontm}	0,09 m	0,19 m	0,1 m	2
l_{rearm}	0,15 m	0,25 m	0,1 m	2
l_{rightm}	0,07 m	0,17 m	0,1 m	2
l_{leftm}	Igual a l_{rightm}			
$m_{tirelfm}$	1,0 kg	2,0 kg	0,5 kg	3
$m_{titerfm}$	Igual $m_{tirelfm}$			
$m_{tirelrm}$	Igual $m_{tirelfm}$			
$m_{titerrm}$	Igual $m_{tirelfm}$			
$k_{tirelfm}$	68500 N/m	70100 N/m	800 N/m	3
$k_{titerfm}$	Igual $k_{tirelfm}$			
$k_{tirelrm}$	Igual $k_{tirelfm}$			
$k_{titerrm}$	Igual $k_{tirelfm}$			
$b_{tirelfm}$	45 N.s/m	63 N.s/m	9 N.s/m	3
$b_{titerfm}$	Igual $b_{tirelfm}$			
$b_{tirelrm}$	Igual $b_{tirelfm}$			
$b_{titerrm}$	Igual $b_{tirelfm}$			

TAB. 7.3: Resultados ótimo e péssimo para norma \mathcal{H}_2 .

Parâmetro	Valor ótimo	Valor péssimo
m_m	45 kg	25 kg
k_{lfm}	6000 N/m	7000 N/m
k_{rfm}	6000 N/m	7000 N/m
k_{lrm}	5300 N/m	6300 N/m
k_{rrm}	5300 N/m	6300 N/m
b_{lfm}	90 N.s/m	90 N.s/m
b_{rfm}	90 N.s/m	90 N.s/m
b_{lrm}	80 N.s/m	80 N.s/m
b_{rrm}	80 N.s/m	80 N.s/m
L_{1m}	0,24 m	0,44 m
L_{2m}	0,14 m	0,34 m
l_{frontm}	0,09 m	0,19 m
l_{rearm}	0,15 m	0,15 m
l_{rightm}	0,07 m	0,17 m
l_{leftm}	0,07 m	0,17 m
$m_{tírelfm}$	1,0 kg	2,0 kg
$m_{tírerfm}$	1,0 kg	2,0 kg
$m_{tírelrm}$	1,0 kg	2,0 kg
$m_{tírerrm}$	1,0 kg	2,0 kg
$k_{tírelfm}$	69300 N/m	70100 N/m
$k_{tírerfm}$	69300 N/m	70100 N/m
$k_{tírelrm}$	69300 N/m	70100 N/m
$k_{tírerrm}$	69300 N/m	70100 N/m
$b_{tírelfm}$	45 N.s/m	45 N.s/m
$b_{tírerfm}$	45 N.s/m	45 N.s/m
$b_{tírelrm}$	45 N.s/m	45 N.s/m
$b_{tírerrm}$	45 N.s/m	45 N.s/m

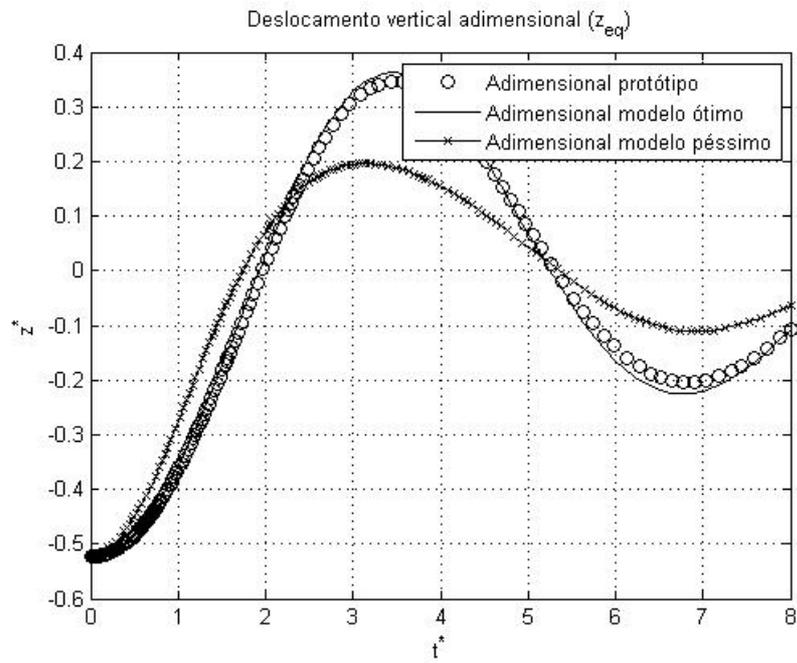


FIG. 7.2: Deslocamento vertical adimensional – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

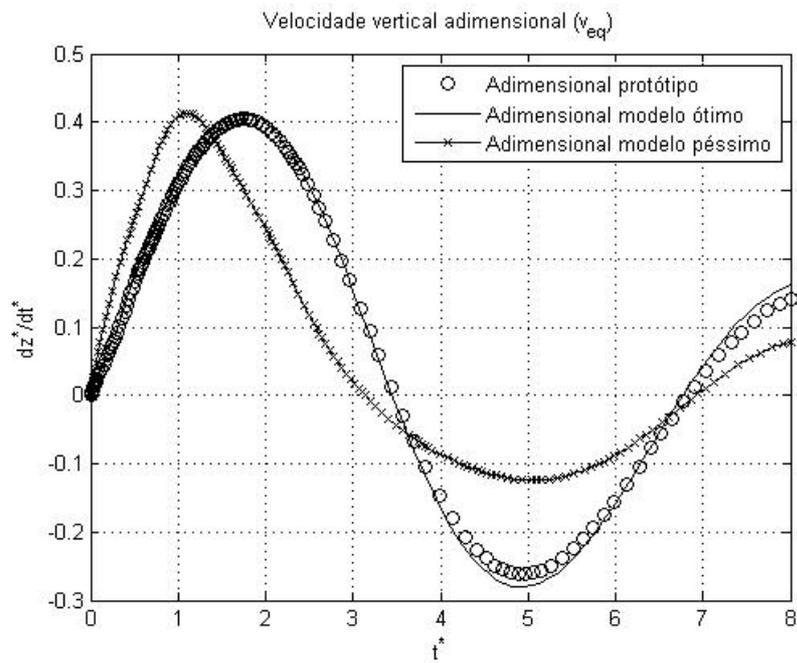


FIG. 7.3: Velocidade vertical adimensional – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

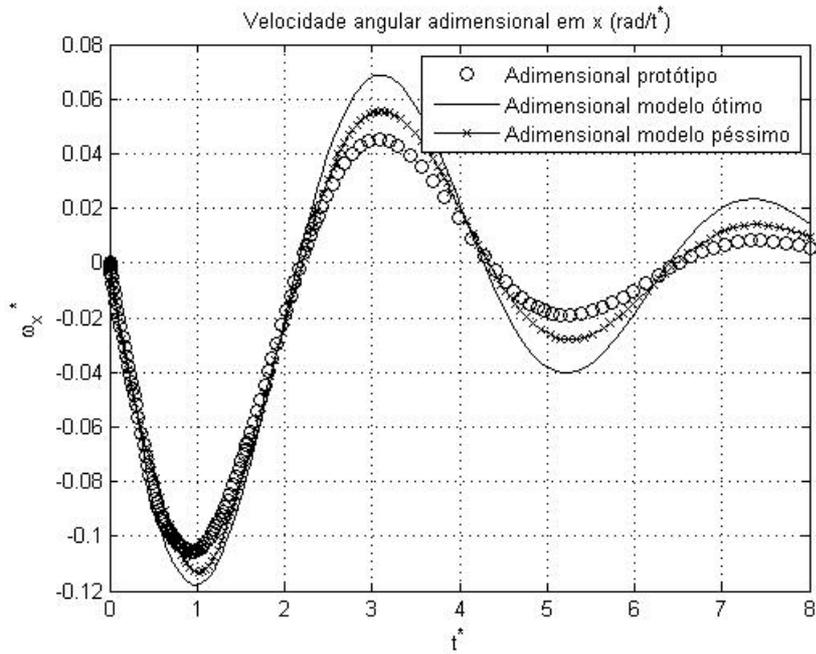


FIG. 7.4: Velocidade angular adimensional em x – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

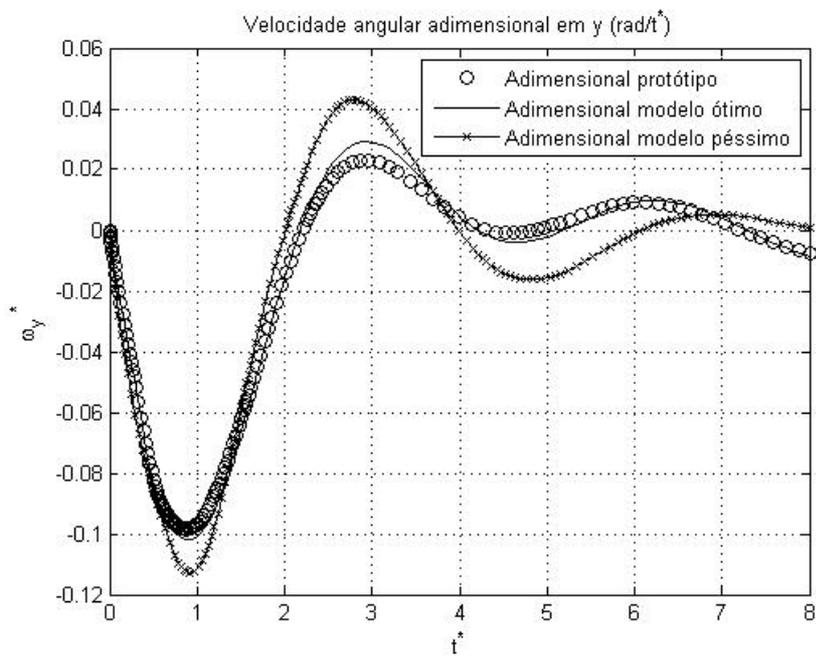


FIG. 7.5: Velocidade angular adimensional em y – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

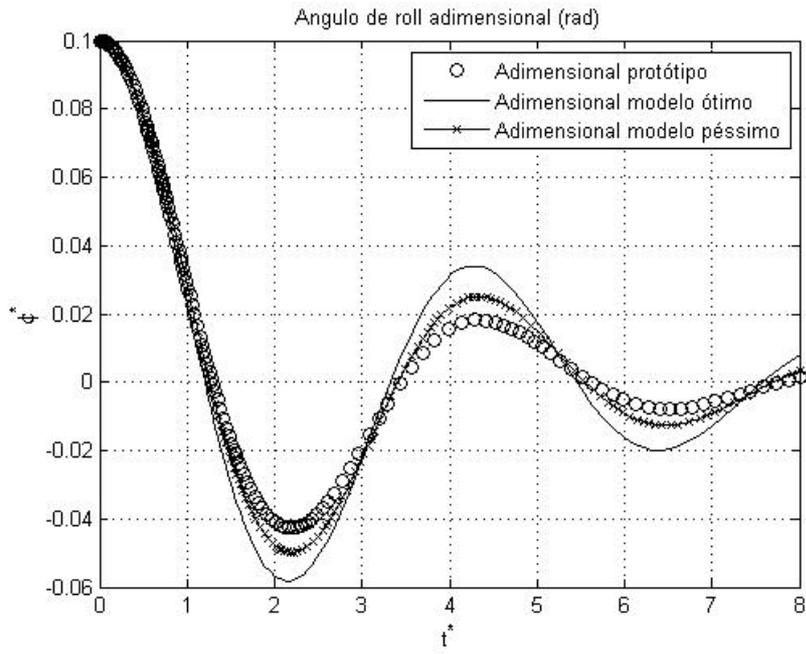


FIG. 7.6: Ângulo de roll – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

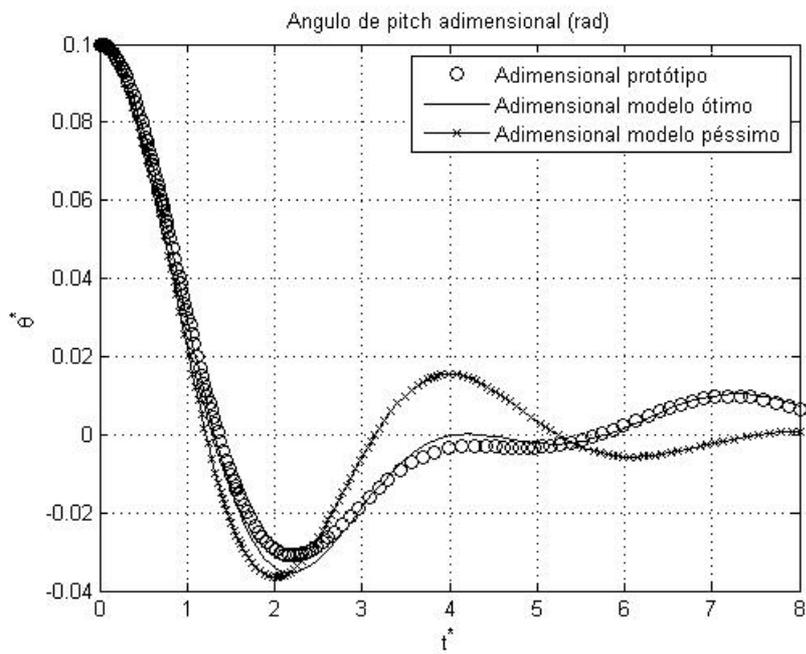


FIG. 7.7: Ângulo de pitch – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

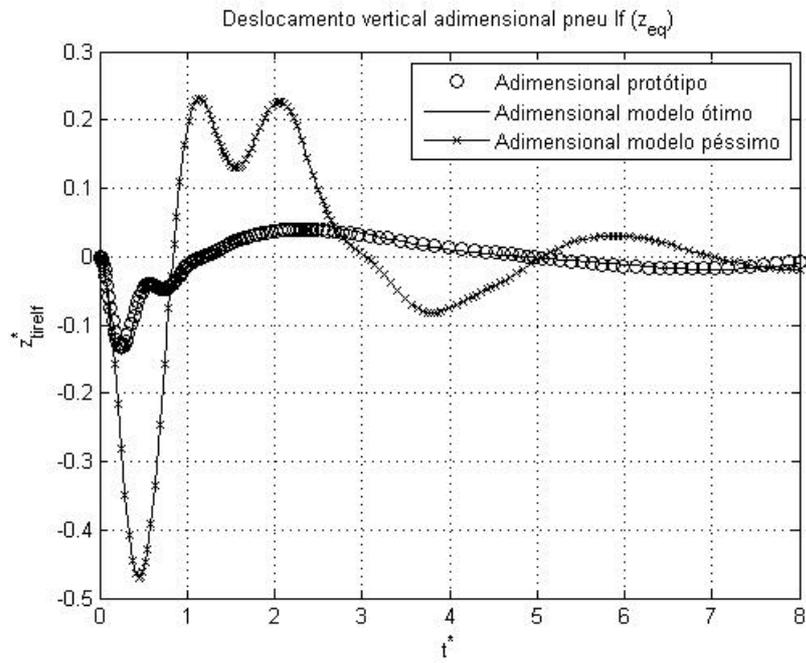


FIG. 7.8: Deslocamento vertical adimensional do pneu dianteiro esquerdo – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

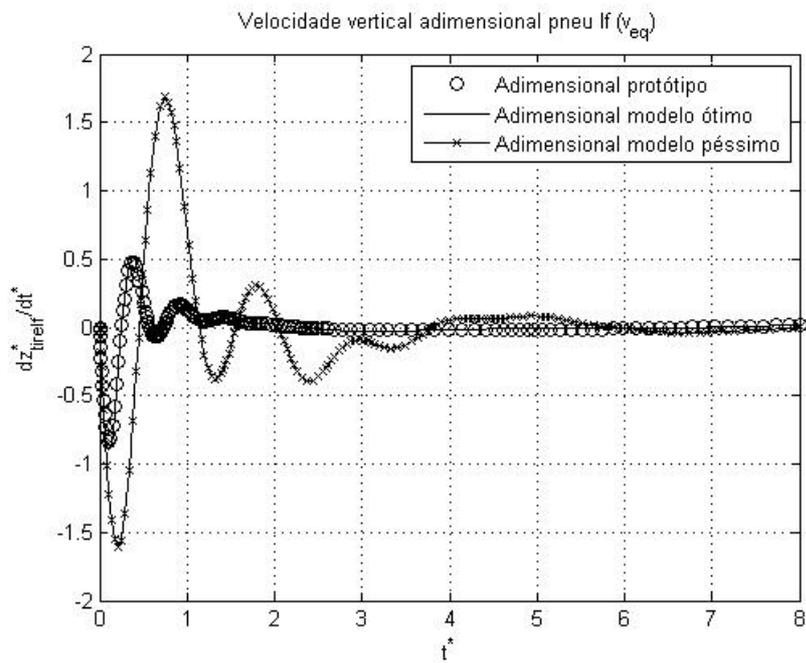


FIG. 7.9: Velocidade vertical adimensional do pneu dianteiro esquerdo – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

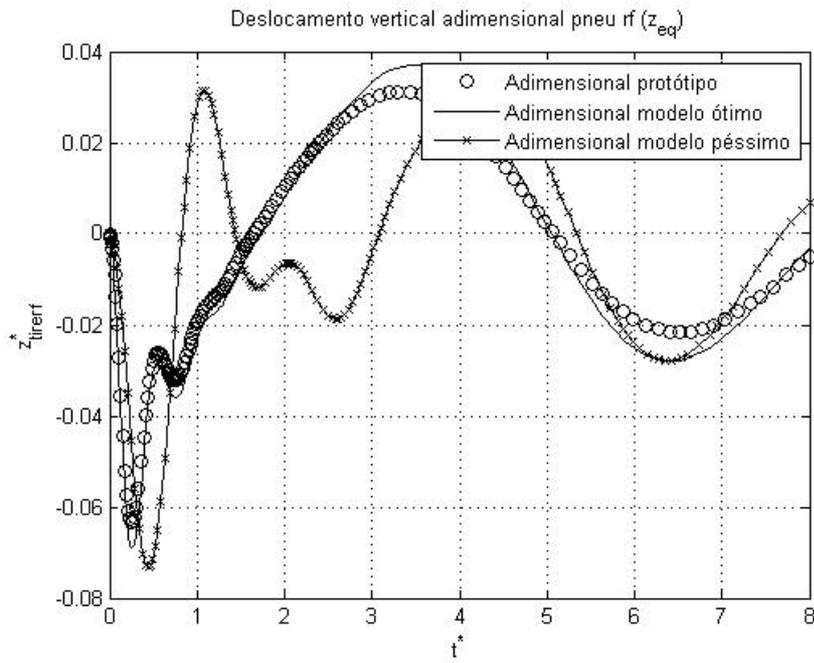


FIG. 7.10: Deslocamento vertical adimensional do pneu dianteiro direito – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

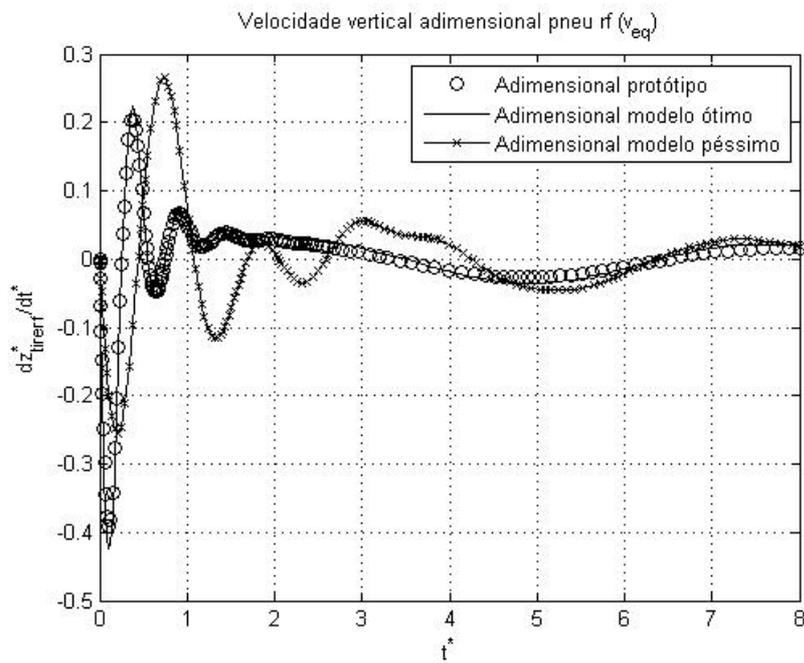


FIG. 7.11: Velocidade vertical adimensional do pneu dianteiro direito – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

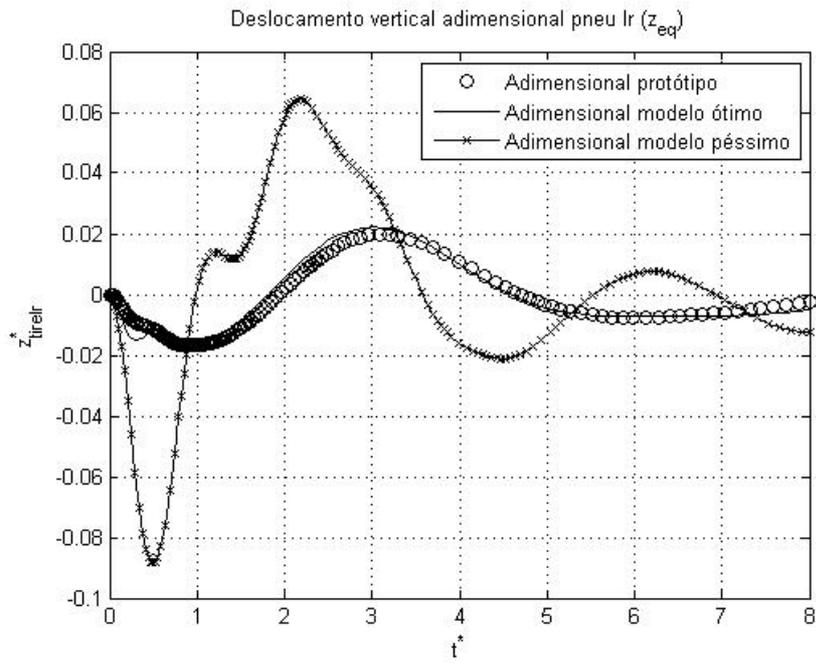


FIG. 7.12: Deslocamento vertical adimensional do pneu traseiro esquerdo – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

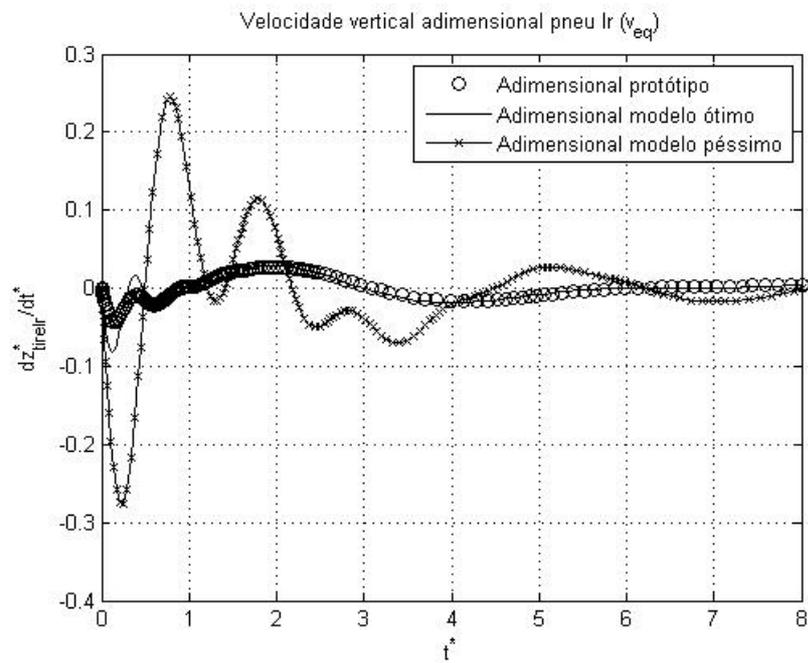


FIG. 7.13: Velocidade vertical adimensional do pneu traseiro esquerdo – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

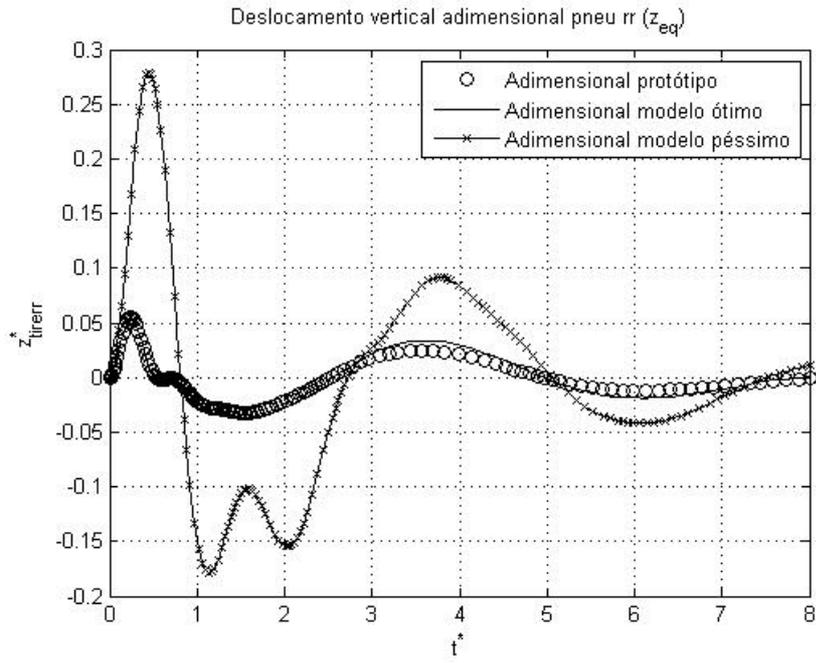


FIG. 7.14: Deslocamento vertical adimensional do pneu traseiro direito – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

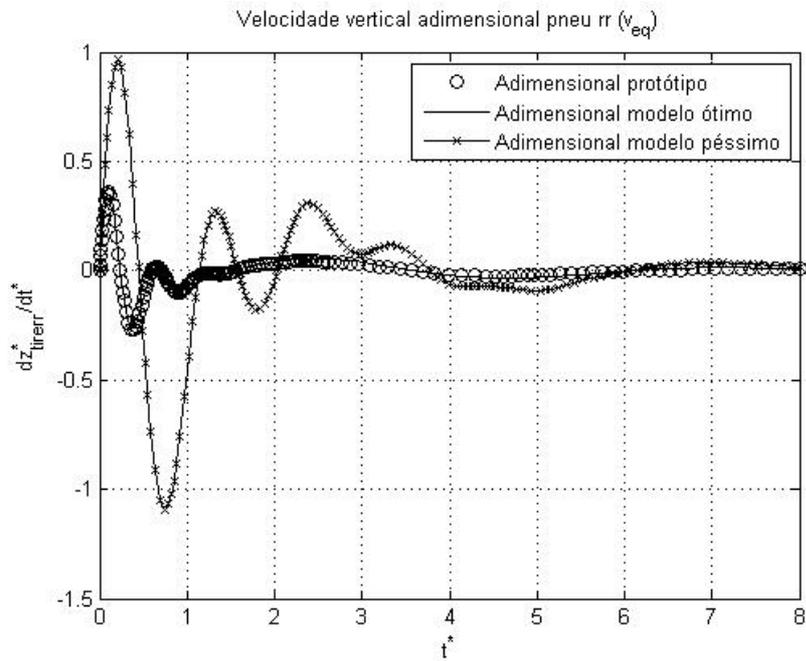


FIG. 7.15: Velocidade vertical adimensional do pneu traseiro direito – otimização por norma \mathcal{H}_2 .

Partindo-se do protótipo com valores dos parâmetros dados na TAB. 7.1, realiza-se a otimização da similaridade dinâmica incompleta do sistema através da minimização da norma \mathcal{H}_2 da diferença da saída dos sistemas. A busca executada para o conjunto de combinações de valores dos parâmetros do modelo em escala dados na TAB. 7.2 analisou um total de 387072 combinações e foi realizada num tempo de 0.4996 horas. Os parâmetros do modelo ótimo e péssimo obtidos da otimização são dados na TAB. 7.3, e os gráficos comparativos do comportamento das variáveis de estado adimensionais do sistema são dados nas FIG. 7.2 a 7.15.

Pode-se notar na otimização pela norma \mathcal{H}_2 , uma insensibilidade do modelo aos valores de amortecimento da massa suspensa e da massa não suspensa (pneus). Para estes parâmetros, os valores ótimo e péssimo resultaram iguais para a base discreta de valores pesquisada.

Nos gráficos das FIG 7.2 a 7.15, pode-se notar o bom resultado obtido para a similaridade dinâmica incompleta do sistema adimensional resultante do modelo ótimo em relação ao sistema adimensional resultante do protótipo analisado. Tal resultado aponta na direção de que, para os sistemas estudados, a similaridade dinâmica incompleta ótima obtida pode ser empregada para a predição do comportamento do protótipo com bons resultados.

A seguir foi realizada uma otimização utilizando-se a norma \mathcal{H}_∞ da diferença das saídas como função objetivo a ser minimizada.

TAB. 7.4: Resultados ótimo e péssimo para norma \mathcal{H}_∞ .

Parâmetro	Valor ótimo	Valor péssimo
m_m	45 kg	35 kg
k_{lfm}	6000 N/m	5500 N/m
k_{rfm}	6000 N/m	5500 N/m
k_{lrm}	5300 N/m	4800 N/m
k_{rrm}	5300 N/m	4800 N/m
b_{lfm}	90 N.s/m	90 N.s/m
b_{rfm}	90 N.s/m	90 N.s/m
b_{lrm}	80 N.s/m	80 N.s/m
b_{rrm}	80 N.s/m	80 N.s/m
L_{1m}	0,24 m	0,24 m
L_{2m}	0,14 m	0,14 m
l_{frontm}	0,09 m	0,09 m
l_{rearm}	0,15 m	0,15 m
l_{rightm}	0,07 m	0,07 m
l_{leftm}	0,07 m	0,07 m
$m_{tírelfm}$	1,0 kg	1,0 kg
$m_{tírerfm}$	1,0 kg	1,0 kg
$m_{tírelrm}$	1,0 kg	1,0 kg
$m_{tírerrm}$	1,0 kg	1,0 kg
$k_{tírelfm}$	69300 N/m	69300 N/m
$k_{tírerfm}$	69300 N/m	69300 N/m
$k_{tírelrm}$	69300 N/m	69300 N/m
$k_{tírerrm}$	69300 N/m	69300 N/m
$b_{tírelfm}$	45 N.s/m	45 N.s/m
$b_{tírerfm}$	45 N.s/m	45 N.s/m
$b_{tírelrm}$	45 N.s/m	45 N.s/m
$b_{tírerrm}$	45 N.s/m	45 N.s/m

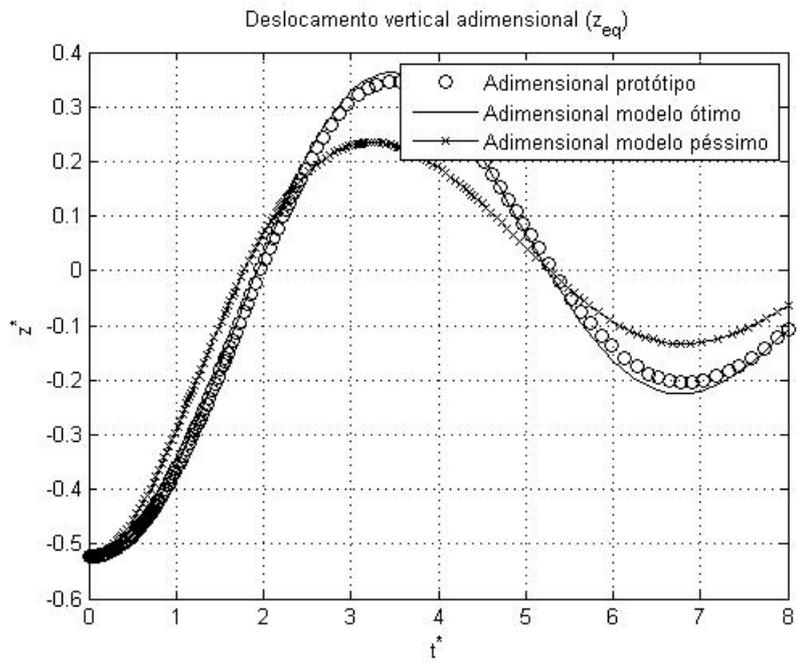


FIG. 7.16: Deslocamento vertical adimensional – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

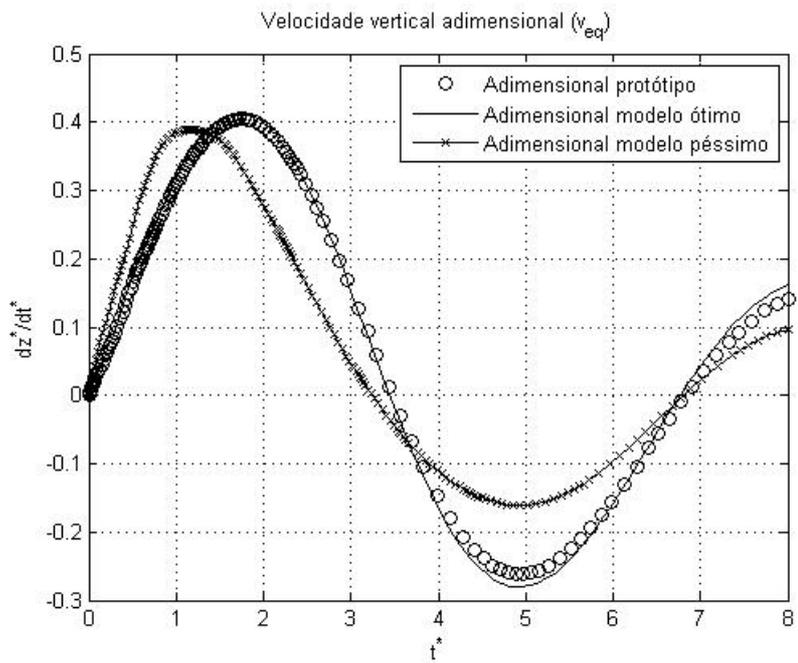


FIG. 7.17: Velocidade vertical adimensional – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

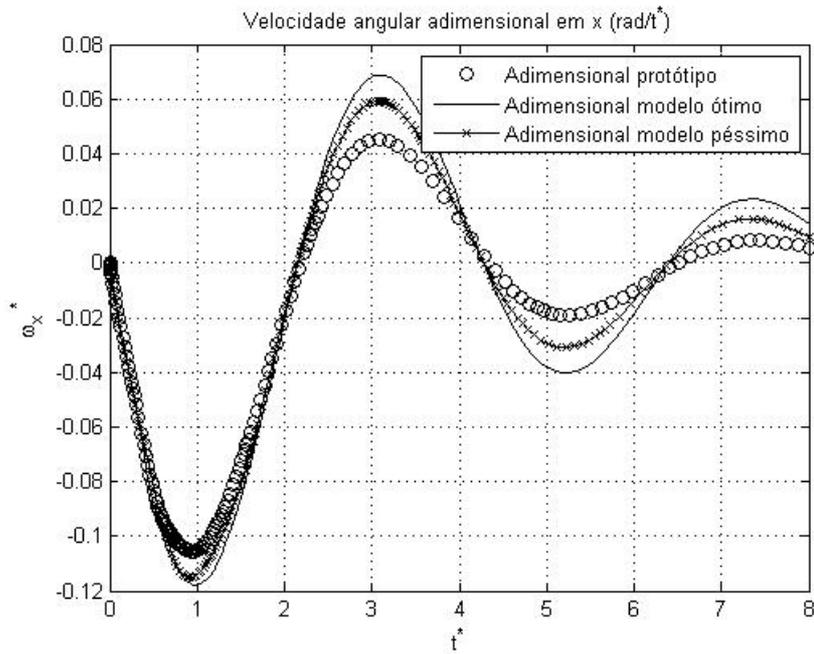


FIG. 7.18: Velocidade angular adimensional em x – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

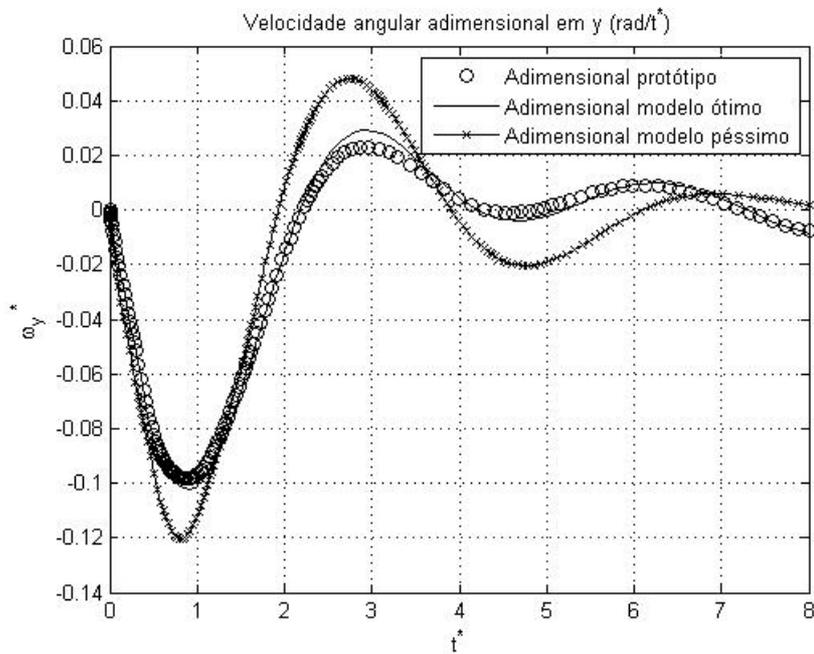


FIG. 7.19: Velocidade angular adimensional em y – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

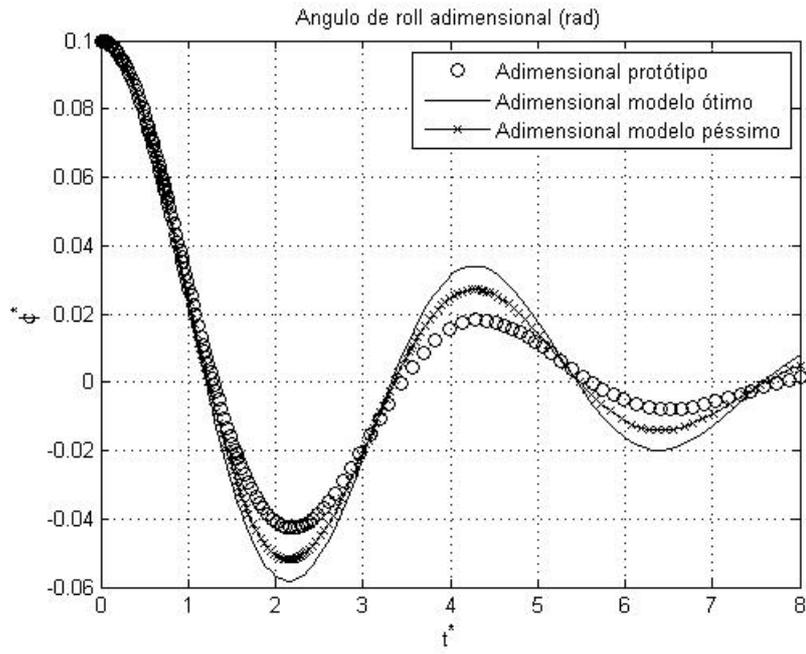


FIG. 7.20: Ângulo de roll – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

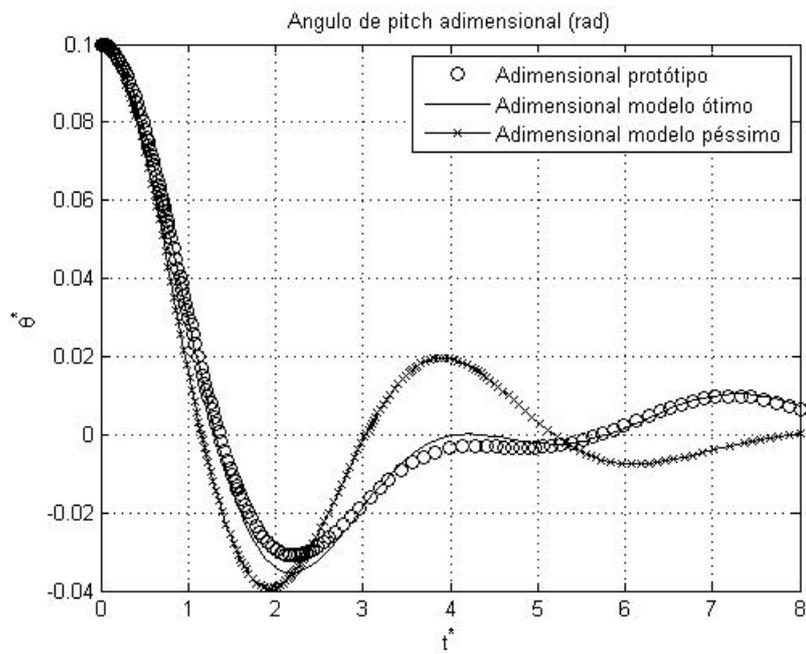


FIG. 7.21: Ângulo de pitch – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

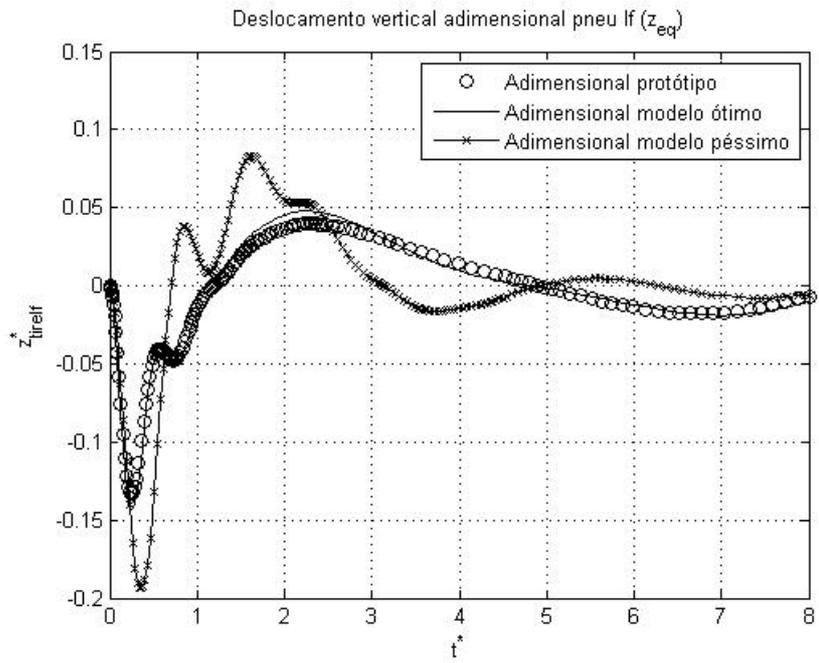


FIG. 7.22: Deslocamento vertical adimensional do pneu dianteiro esquerdo – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

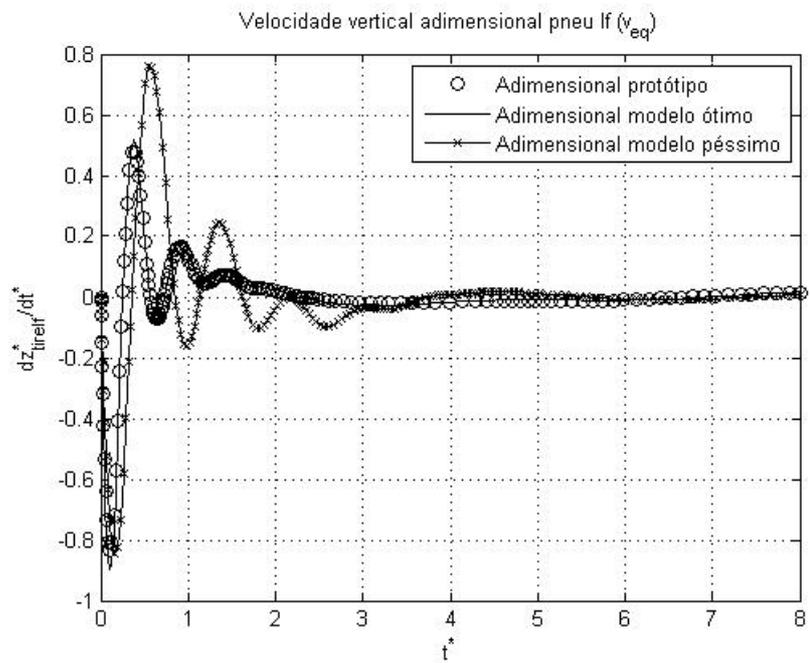


FIG. 7.23: Velocidade vertical adimensional do pneu dianteiro esquerdo – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

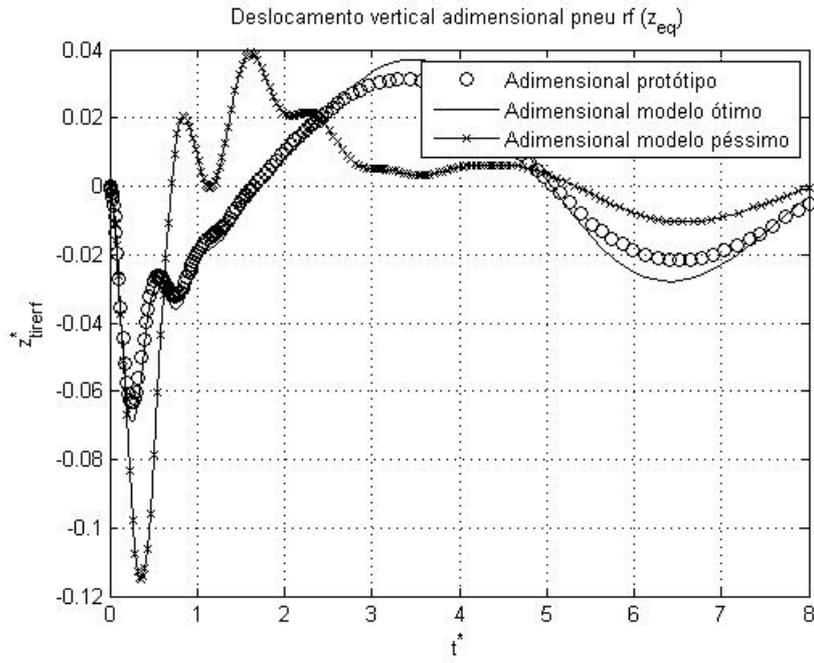


FIG. 7.24: Deslocamento vertical adimensional do pneu dianteiro direito – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

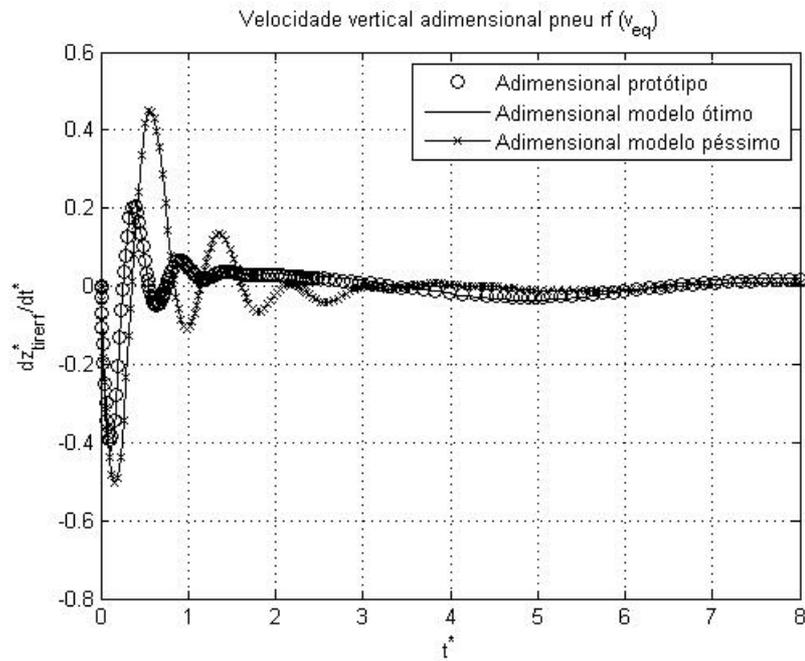


FIG. 7.25: Velocidade vertical adimensional do pneu dianteiro direito– otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

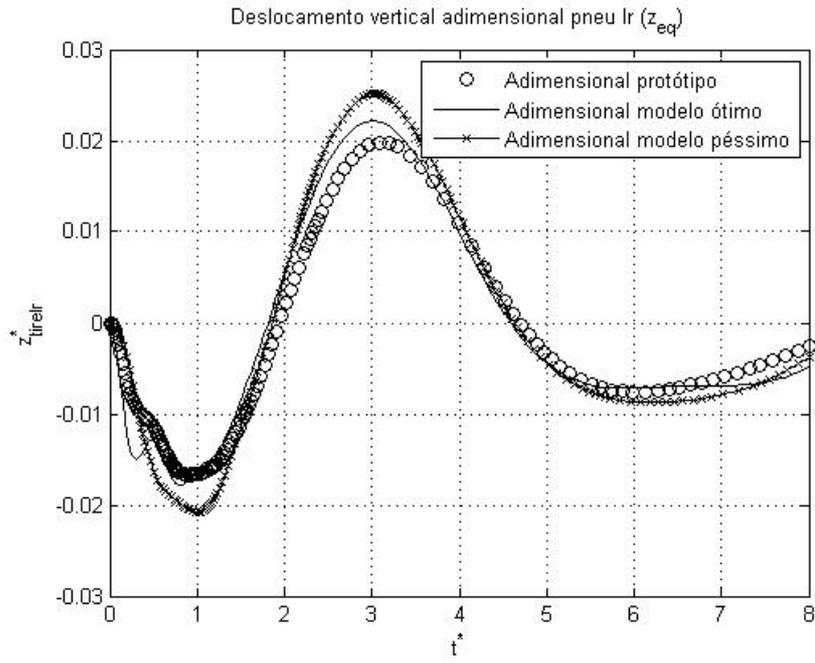


FIG. 7.26: Deslocamento vertical adimensional do pneu traseiro esquerdo – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

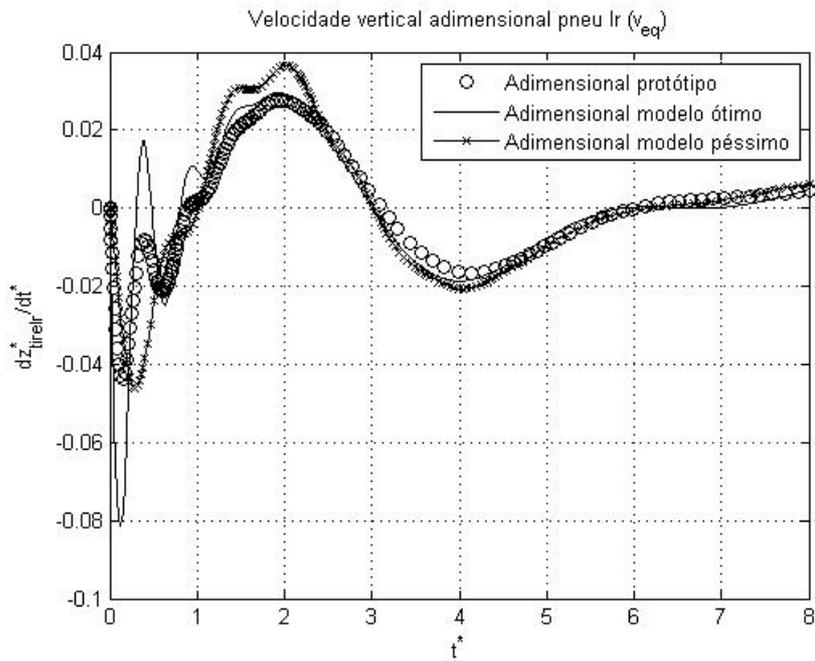


FIG. 7.27: Velocidade vertical adimensional do pneu traseiro esquerdo – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

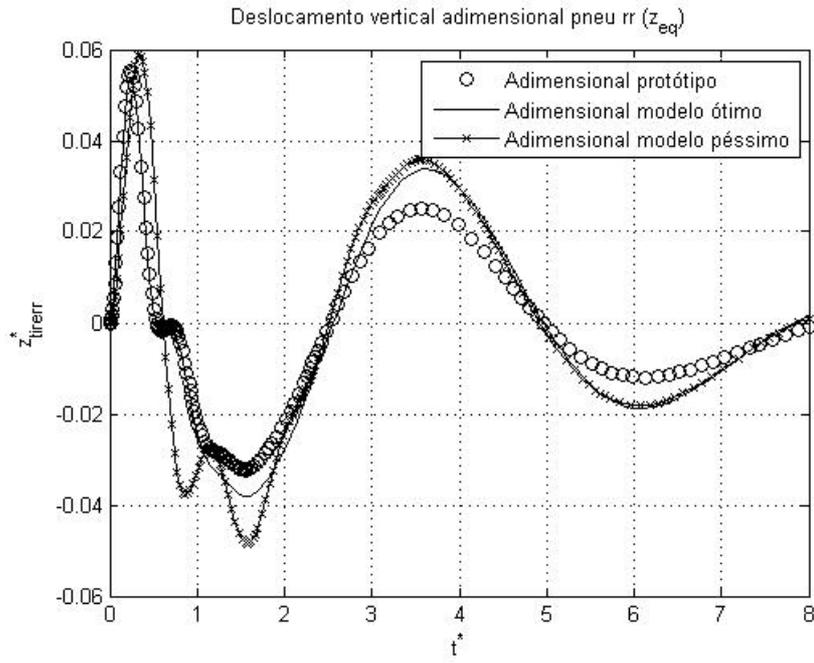


FIG. 7.28: Deslocamento vertical adimensional do pneu traseiro direito – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

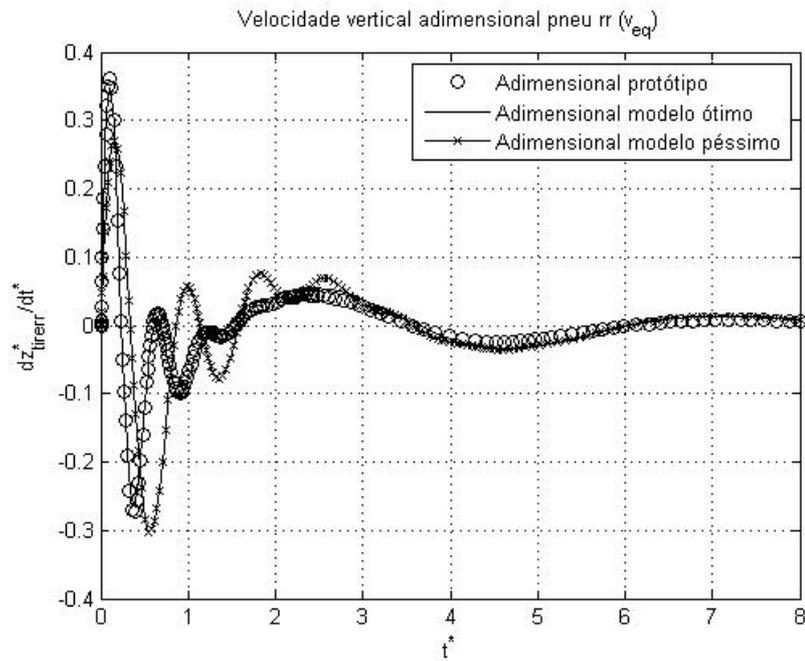


FIG. 7.29: Velocidade vertical adimensional do pneu traseiro direito – otimização por norma \mathcal{H}_∞ .

Partindo-se do mesmo protótipo considerado anteriormente, cujos valores dos parâmetros são dados na TAB. 7.1, realizou-se a otimização da similaridade dinâmica incompleta do sistema através da minimização da norma \mathcal{H}_∞ da diferença da saída dos sistemas. A busca executada para o mesmo conjunto de combinações de valores dos parâmetros do modelo em escala dados na TAB. 7.2 analisou um total de 387072 combinações e foi realizada num tempo de 2,2189 horas, que consiste em um tempo de processamento aproximadamente 4,5 vezes maior que o requerido pela otimização pela norma \mathcal{H}_2 . Os parâmetros do modelo ótimo e péssimo obtidos da otimização são dados na TAB. 7.4, e os gráficos comparativos do comportamento das variáveis de estado adimensionais do sistema são dados nas FIG. 7.16 a 7.29.

Comparando-se os resultados da otimização da similaridade dinâmica incompleta pela norma \mathcal{H}_2 , dados na TAB. 7.3, com os resultados da otimização pela norma \mathcal{H}_∞ , dados na TAB. 7.4, percebe-se que os parâmetros do modelo em escala ótimo são os mesmos para as duas métricas de otimização (\mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞), e que os parâmetros do modelo em escala péssimo diferem entre si para as duas métricas. Assim, o modelo em escala ótimo dentre os avaliados foi o mesmo tanto para otimização pela norma \mathcal{H}_2 como pela norma \mathcal{H}_∞ . Tal fato demonstra a coerência da metodologia proposta.

Pode-se notar também na otimização pela norma \mathcal{H}_∞ , uma insensibilidade do modelo aos valores de amortecimento da massa suspensa e aos valores dos parâmetros da massa não suspensa (pneus). Para estes parâmetros, os valores ótimo e péssimo resultaram iguais para a base discreta de valores pesquisada.

As métricas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ apresentam vantagens sobre a métrica RMS do erro para a otimização da similaridade dinâmica incompleta, uma vez que o comportamento entrada/saída do sistema pode ser insensível a variações em algum parâmetro Π .

8 CONSIDERAÇÕES SOBRE A METODOLOGIA PROPOSTA

8.1 INTRODUÇÃO

A similaridade dinâmica completa entre protótipo e modelo em escala, embora teoricamente possível, é de difícil obtenção na prática. Assim, quando se busca prever o comportamento de um protótipo com base em ensaios realizados em um modelo em escala, é muito provável que se estará trabalhando com similaridade dinâmica incompleta entre os eles. Isto conduz a um problema natural que consiste em se determinar, dentre dois modelos em escala possíveis de serem construídos, qual deles apresenta melhor similaridade dinâmica com o protótipo do qual se deseja prever, ou pelo menos estimar, o comportamento dinâmico.

Comentando o teorema dos Pi de Buckingham, BRENNAN (2004) afirma que “As condições do teorema são diretas e independentes das leis de governo: se dois sistemas têm parâmetros Pi equivalentes e estes parâmetros são os únicos presentes na descrição da dinâmica do sistema, então os sistemas são ditos dimensionalmente semelhantes”, e acrescenta que “A proximidade dos dois sistemas no que diz respeito a seus parâmetros Pi é uma medida fundamental da similaridade dos dois sistemas.”

Assim, para resolver o problema apresentado anteriormente, são propostos neste capítulo dois critérios, um baseado na afirmativa de Brennan (intuitivo) e outro que consiste na metodologia proposta. A análise dos dois critérios sugere que o critério intuitivo, baseado na afirmativa de Brennan, pode conduzir a conclusões aparentemente contraditórias que são explicadas com o uso do segundo critério. Assim, pode-se afirmar que a metodologia proposta conduz a resultados coerentes podendo, portanto, ser empregada com sucesso para responder ao problema proposto.

8.2 CRITÉRIO INTUITIVO (BASEADO NA AFIRMATIVA DE BRENNAN (2004))

Para resolver o problema proposto, pode-se imaginar um critério baseado na afirmativa de BRENNAN (2004) (intuitivo) que consiste no uso das razões entre os parâmetros Π adimensionais dos modelos e do protótipo. Para um modelo em escala que apresenta similaridade dinâmica completa com o protótipo, as razões dos parâmetros Π adimensionais do modelo e do protótipo são todas iguais à unidade. Assim, um critério intuitivo, entre outros que podem existir e serem usados para resolver o problema proposto consiste em determinar qual dos modelos em escala apresenta razões dos parâmetros Π adimensionais mais próximos da unidade, sendo este, portanto, o modelo com melhor similaridade dinâmica incompleta com o protótipo em questão.

Analisa-se a seguir, como exemplo, um sistema modelado como um quarto de carro com um grau de liberdade sujeito a excitações de base conforme desenvolvimento feito no CAP. 2. Tal sistema encontra-se representado esquematicamente na FIG. 8.1, que é igual à FIG. 2.1.

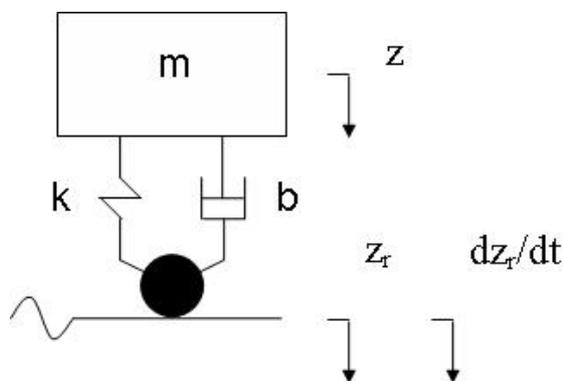


FIG. 8.1: Modelo de $\frac{1}{4}$ de carro.

O desenvolvimento feito na Seção 2.2 com o uso da matriz dimensional para este sistema conduziu inicialmente a três parâmetros Π adimensionais que não possuem um

significado físico associado a eles. Tais parâmetros Π , dados pelas EQ 2.6 a 2.8, encontram-se aqui repetidos nas EQ. 8.1 a 8.3.

$$\Pi_1 = z_{eq}^0 m^1 \tau^0 k^1 b^{-2} g^0 = \frac{mk}{b^2} \quad (8.1)$$

$$\Pi_2 = z_{eq}^0 m^{-1} \tau^1 k^0 b^1 g^0 = \frac{b\tau}{m} \quad (8.2)$$

$$\Pi_3 = z_{eq}^0 m^0 \tau^1 k^1 b^{-1} g^0 = \frac{k\tau}{b} \quad (8.3)$$

Considere-se o protótipo com parâmetros dados na TAB. 8.1 e dois modelos em escala possíveis de serem construídos cujos parâmetros são dados nas TAB. 8.2 e 8.3. Calculando-se os três parâmetros Π adimensionais dados pelas EQ. 8.1 a 8.3 para os três sistemas, pode-se construir a TAB. 8.4, que tem, na sua primeira coluna, as razões dos parâmetros adimensionais do primeiro modelo e do protótipo e, na sua segunda coluna, as razões dos parâmetros adimensionais do protótipo e do segundo modelo.

Utilizando-se o critério baseado na afirmativa de Brennan para resolver o problema proposto – que consiste em determinar qual dos dois modelos é o melhor – analisam-se as linhas da TAB. 8.4 e escolhe-se o modelo cujas razões de parâmetros Π adimensionais sejam mais próximas de um.

Neste ponto surge uma primeira dificuldade no uso do critério intuitivo. Analisando-se a primeira e a terceira linhas da TAB. 8.4, percebe-se que as razões mais próximas da unidade são as do segundo modelo, entretanto, analisando-se a segunda linha da mesma tabela a razão mais próxima da unidade é a do primeiro modelo. Assim, utilizando-se o critério intuitivo baseado em BRENNAN (2004), qual modelo em escala escolher?

TAB. 8.1: Parâmetros do protótipo.

m_p	365 kg
k_p	17500 N/m
b_p	1200 N.s/m

TAB. 8.2: Parâmetros do primeiro modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	1500 N/m
b_m	46,521245 N.s/m

TAB. 8.3: Parâmetros do segundo modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	1500 N/m
b_m	69,781868 N.s/m

TAB. 8.4: Razões de parâmetros Π .

$\Pi_{1m1}/\Pi_{1p} = 1,5626$	$\Pi_{1p}/\Pi_{1m2} = 1,4400$
$\Pi_{2m1}/\Pi_{2p} = 0,8000$	$\Pi_{2p}/\Pi_{2m2} = 0,8333$
$\Pi_{3m1}/\Pi_{3p} = 1,2500$	$\Pi_{3p}/\Pi_{3m2} = 1,2000$

8.3 ADIMENSIONALIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE GOVERNO

Procedendo-se à adimensionalização da equação diferencial de governo do sistema, conforme desenvolvimento da Seção 2.3 – o que consiste na primeira etapa da metodologia proposta – chega-se, para este sistema, a um único parâmetro adimensional Π_4 dado pela EQ. 8.4. Com isso, a dificuldade surgida acima pode ser superada uma vez que só há necessidade de se

analisar a proximidade da unidade para uma razão de parâmetros Π , e não três razões, como aconteceu anteriormente.

$$\Pi_4 = \frac{b}{\sqrt{m.k}} \quad (8.4)$$

Com somente um parâmetro adimensional a ser considerado, a primeira idéia de se comparar as razões adimensionais dos parâmetros ganha um novo impulso, visto que é necessário comparar somente um parâmetro.

Mesmo assim, esta idéia inicial é intuitiva uma vez que não temos um critério objetivo para quantificar qual é realmente o melhor modelo em escala.

8.4 METODOLOGIA PROPOSTA

A metodologia proposta para resolver o problema em pauta consiste em adimensionalizar as equações diferenciais de governo do sistema e, uma vez que a similaridade dinâmica completa seja teoricamente possível, determinar o melhor modelo em escala minimizando a norma \mathcal{H}_2 da diferença dos sistemas adimensionais gerados a partir do protótipo e a partir dos modelos em escala considerados. Com isso vai se usar a norma \mathcal{H}_2 para quantificar a similaridade dinâmica incompleta entre o protótipo e o modelo em escala.

Neste ponto, a metodologia proposta oferece uma vantagem sobre o critério intuitivo baseado na afirmativa de Brennan, uma vez que apresenta uma medida da similaridade dinâmica incompleta, permitindo quantificar de maneira objetiva a similaridade incompleta e escolher o melhor modelo em escala para o protótipo em questão.

Com o emprego da metodologia proposta, pode-se testar o critério intuitivo proposto, baseado em BRENNAN (2004), e analisar se ele é razoável ou não.

8.5 TESTES E RESULTADOS

Partindo-se de um protótipo cujos valores dos parâmetros são dados na TAB. 8.5 e dois modelos em escala com parâmetros dados nas TAB. 8.6 e 8.7, o emprego do critério intuitivo e da metodologia proposta leva aos resultados da TAB. 8.8, onde a primeira coluna se refere a resultados do primeiro modelo e, a segunda coluna, a resultados do segundo modelo.

Neste primeiro teste realizado com modelos em escala cuja razão dos parâmetros difere de 1 em quantidades diferentes, obteve-se um valor de norma H_2 menor (melhor similaridade) com o modelo que apresentava razão do parâmetro adimensional Π_4 mais próxima de 1. Para estes modelos uma melhor razão de parâmetros adimensionais Π_4 coincidiu com um menor valor da norma \mathcal{H}_2 da diferença dos sistemas, e o melhor modelo em escala é o mesmo tanto empregando o critério intuitivo imaginado como empregando a nova metodologia proposta. Este é um primeiro indício de que o critério intuitivo pode ser válido.

TAB. 8.5: Parâmetros do protótipo.

m_p	365 kg
k_p	17500 N/m
b_p	5054,700782 N.s/m

TAB. 8.6: Parâmetros do primeiro modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	1500 N/m
b_m	159,2168333 N.s/m

TAB. 8.7: Parâmetros do segundo modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	1500 N/m
b_m	367,4234614 N.s/m

TAB. 8.8: Razões dos parâmetros Π e norma \mathcal{H}_2 .

$\Pi_{4m1}/\Pi_{4p} = 0,65$	$\Pi_{4m2}/\Pi_{4p} = 1,5$
$\ H\ _2 = 0,4534$	$\ H\ _2 = 0,4830$

Realizando-se um segundo teste com um protótipo cujos valores dos parâmetros são dados na TAB. 8.9 e dois modelos em escala com parâmetros dados nas TAB. 8.10 e 8.11, o emprego do critério intuitivo e da metodologia proposta leva aos resultados da TAB. 8.12, onde a primeira coluna se refere a resultados do primeiro modelo e, a segunda coluna, a resultados do segundo modelo.

Neste segundo teste realizado, as razões dos parâmetros adimensionais dos modelos diferem de 1 em quantidades iguais e apesar disso obteve-se um valor de norma \mathcal{H}_2 menor (melhor similaridade) para o segundo modelo. Entre os modelos que apresentavam razões do parâmetro adimensional Π_4 igualmente próximas de 1, o segundo modelo apresentou valor da norma \mathcal{H}_2 da diferença dos sistemas menor que o primeiro modelo. Assim, os modelos em escala são indiferentes pelo uso do critério intuitivo, mas o segundo modelo é melhor que o primeiro pelo emprego do critério da norma \mathcal{H}_2 da metodologia proposta. Este é um primeiro indício de que o critério intuitivo pode não ser válido.

TAB. 8.9: Parâmetros do protótipo.

m_p	365 kg
k_p	17500 N/m
b_p	1200 N.s/m

TAB. 8.10: Parâmetros do primeiro modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	1500 N/m
b_m	46,521245 N.s/m

TAB. 8.11: Parâmetros do segundo modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	1500 N/m
b_m	69,781868 N.s/m

TAB. 8.12 Razões dos parâmetros Π e norma \mathcal{H}_2 .

$\Pi_{4m1}/\Pi_{4p} = 0,80$	$\Pi_{4m2}/\Pi_{4p} = 1,20$
$\ H\ _2 = 0,2628$	$\ H\ _2 = 0,2014$

Realizando-se um terceiro teste com um protótipo cujos valores dos parâmetros são dados na TAB. 8.13 e dois modelos em escala com parâmetros dados nas TAB. 8.14 e 8.15, o emprego do critério intuitivo e da metodologia proposta leva aos resultados da TAB. 8.16, onde a primeira coluna se refere a resultados do primeiro modelo e, a segunda coluna, a resultados do segundo modelo.

Neste terceiro teste realizado com modelos em escala cuja razão dos parâmetros difere de 1 em quantidades diferentes, obteve-se um valor de norma \mathcal{H}_2 menor (melhor similaridade) com o modelo que apresentava razão do parâmetro adimensional Π_4 mais distante de 1. Para estes modelos, uma pior razão de parâmetros adimensionais Π_4 coincidiu com um menor valor da norma \mathcal{H}_2 da diferença dos sistemas, e o pior modelo em escala empregando o critério intuitivo imaginado é o melhor modelo em escala empregando a nova metodologia proposta. Este é um segundo indício de que o critério intuitivo pode não ser válido.

TAB. 8.13: Parâmetros do protótipo.

m_p	365 kg
k_p	17500 N/m
b_p	1200 N.s/m

TAB. 8.14: Parâmetros do primeiro modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	1500 N/m
b_m	37,79851407 N.s/m

TAB. 8.15: Parâmetros do segundo modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	1500 N/m
b_m	87,22734015 N.s/m

TAB. 8.16: Razões dos parâmetros Π e norma \mathcal{H}_2 .

$\Pi_{4m1}/\Pi_{4p} = 0,65$	$\Pi_{4m2}/\Pi_{4p} = 1,50$
$\ H\ _2 = 0,5252$	$\ H\ _2 = 0,4335$

TAB. 8.17: Parâmetros do protótipo.

m_p	365 kg
k_p	17500 N/m
b_p	5054,700782 N.s/m

TAB. 8.18: Parâmetros do primeiro modelo em escala.

m_m	10 kg
k_m	1500 N/m
b_m	146,9693846 N.s/m

TAB. 8.19 Parâmetros do segundo modelo em escala

m_m	10 kg
k_m	1500 N/m
b_m	367,4234614 N.s/m

TAB. 8.20: Razões dos parâmetros Π e norma \mathcal{H}_2 .

$\Pi_{4m1}/\Pi_{4p} = 0,60$	$\Pi_{4m2}/\Pi_{4p} = 1,5$
$\ H\ _2 = 0,5323$	$\ H\ _2 = 0,4830$

Realizando-se um quarto teste com um protótipo cujos valores dos parâmetros são dados na TAB. 8.17 e dois modelos em escala com parâmetros dados nas TAB. 8.18 e 8.19, o emprego do critério intuitivo e da metodologia proposta leva aos resultados da TAB. 8.20, onde a primeira coluna se refere a resultados do primeiro modelo e, a segunda coluna, a resultados do segundo modelo.

Neste quarto teste realizado com modelos em escala cuja razão dos parâmetros difere de 1 em quantidades diferentes, obteve-se um valor de norma \mathcal{H}_2 menor (melhor similaridade) com o modelo que apresentava razão do parâmetro adimensional Π_4 mais distante de 1. Para estes modelos, uma pior razão de parâmetros adimensionais Π_4 coincidiu com um menor valor da norma \mathcal{H}_2 da diferença dos sistemas, e o pior modelo em escala empregando o critério intuitivo imaginado é o melhor modelo em escala empregando a nova metodologia proposta. Este é um terceiro indício de que o critério intuitivo pode não ser válido.

8.6 COMPARAÇÃO DOS CRITÉRIOS

Com o intuito de analisar a relação existente entre os critérios intuitivo e da metodologia proposta, traça-se o gráfico da FIG. 8.2 que relaciona a razão dos parâmetros adimensionais Π_4 com a norma \mathcal{H}_2 da diferença da saída dos sistemas.

O gráfico da FIG. 8.2 revela que a variação das razões dos parâmetros adimensionais Π_4 possui influência no valor da norma \mathcal{H}_2 da diferença da saída dos sistemas. À medida que a razão entre os parâmetros Π_4 se aproxima de um, o valor da norma \mathcal{H}_2 da diferença dos sistemas diminui, apresentando um mínimo global quando a referida razão é igual à um – o

que corresponde à similaridade dinâmica completa entre o modelo e o protótipo. Entretanto, o gráfico não apresenta simetria em relação à reta vertical cujo valor da razão é igual à unidade.

Como se pode observar no gráfico da FIG. 8.2, a variação do valor da norma \mathcal{H}_2 é maior, em módulo, para razões de Π_4 menores que a unidade em comparação com a mesma variação para razões maiores que um. Isto vem explicar os resultados (aparentemente incoerentes) obtidos no segundo, terceiro e quarto testes executados anteriormente. Tais resultados são incoerentes se for adotado unicamente o critério da proximidade da razão entre os parâmetros adimensionais para determinar qual dos modelos apresenta melhor similaridade dinâmica incompleta com o protótipo.

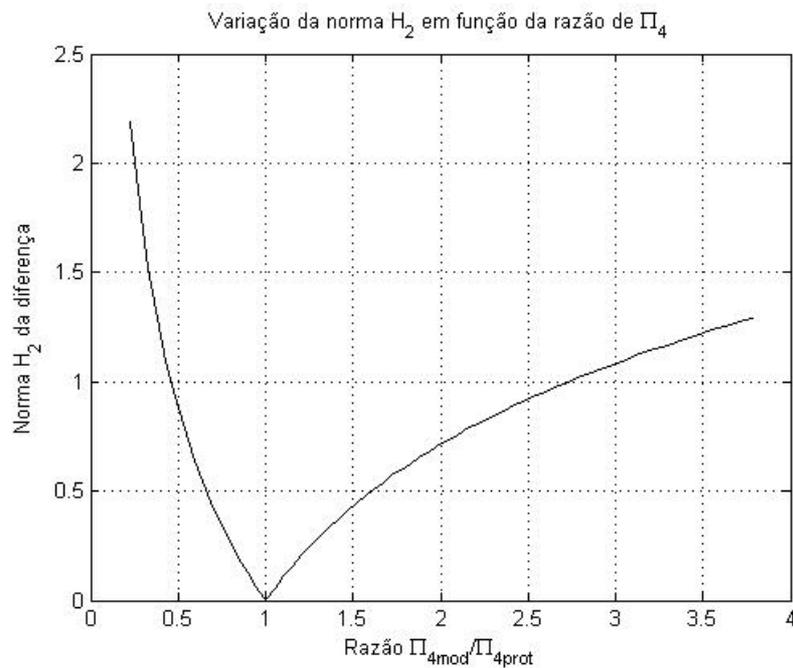


FIG. 8.2: Variação da norma \mathcal{H}_2 em função da razão de Π_4 .

Considerando que o problema proposto consiste em se determinar, dentre dois modelos em escala, o modelo em escala que possui melhor similaridade com um protótipo dado, pode-se afirmar que o critério intuitivo baseado na afirmativa de BRENNAN não consegue fornecer uma resposta satisfatória para o problema.

Empregando a metodologia proposta, que se baseia na norma H_2 da diferença das saídas dos sistemas, o resultado de todos os testes realizados anteriormente fazem sentido e podem ser justificados com o auxílio do gráfico da FIG. 8.2. Deste modo, a metodologia proposta consegue fornecer uma resposta satisfatória para o problema proposto e pode ser usada contanto que as equações diferenciais de governo (modelo matemático) estejam disponíveis para adimensionalização e a similaridade dinâmica completa seja teoricamente possível. Além disso, o critério inicialmente imaginado é intuitivo e o critério empregado pela metodologia proposta é quantitativo.

A metodologia proposta pode também utilizar a norma \mathcal{H}_∞ para quantificar a similaridade dinâmica incompleta. A variação da norma \mathcal{H}_∞ da diferença da saída dos sistemas em função da razão dos parâmetros adimensionais Π_4 do modelo e do protótipo é mostrada no gráfico da FIG. 8.3. Pode-se notar que o comportamento qualitativo das normas em função da razão dos parâmetros adimensionais é o mesmo tanto para norma \mathcal{H}_2 quanto para a norma \mathcal{H}_∞ . O gráfico comparativo do comportamento das duas normas em função da razão dos parâmetros adimensionais é mostrado na FIG. 8.4.

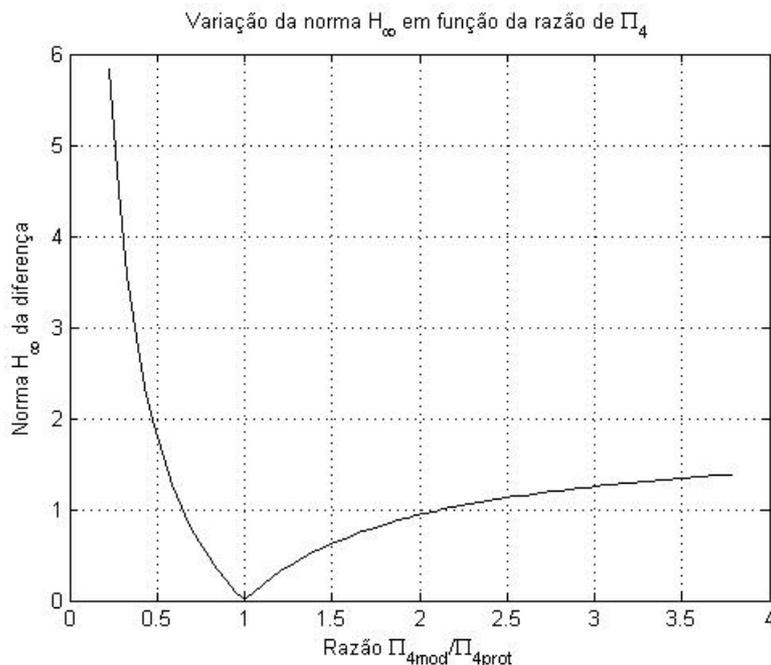


FIG. 8.3: Variação da norma \mathcal{H}_∞ em função da razão de Π_4

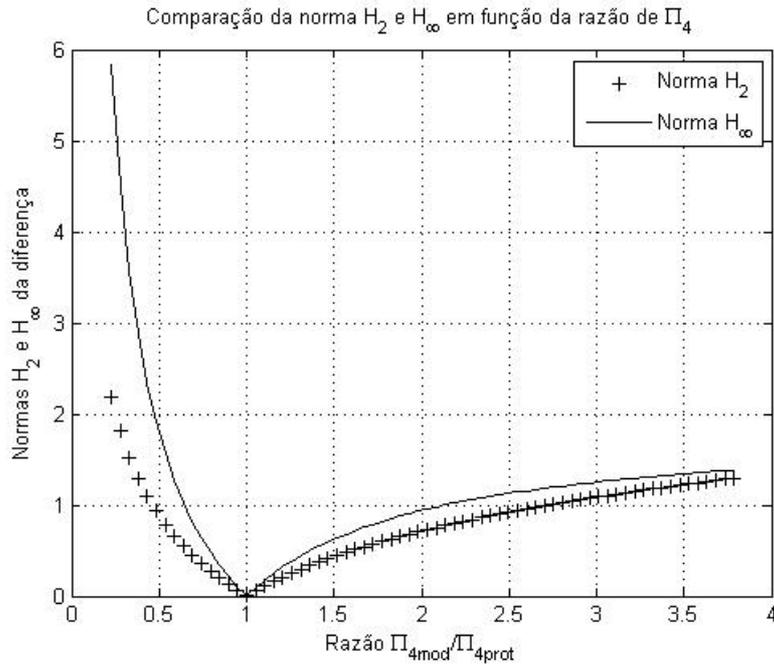


FIG. 8.4: Comparativo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ em função da razão de Π_4

O fato do comportamento qualitativo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ em função da razão dos parâmetros dimensionais ser o mesmo, indica que a metodologia proposta pode usar tanto a norma \mathcal{H}_2 quanto a norma \mathcal{H}_∞ como critério quantitativo para se determinar qual é o modelo em escala apresenta melhor similaridade com um protótipo, dentre dois modelos em escala analisados. Esta consideração aliada ao fato de o emprego da otimização do modelo em escala pela norma \mathcal{H}_2 e pela norma \mathcal{H}_∞ , realizada no CAP. 8, ter resultado no mesmo modelo em escala ótimo, corrobora a afirmativa de que tanto a norma \mathcal{H}_2 quanto a norma \mathcal{H}_∞ podem ser usadas na metodologia proposta. Vantagens e desvantagens decorrentes do uso de uma ou outra norma serão objeto de estudo em trabalhos futuros. Até o momento, numa análise inicial, pode-se afirmar que o uso da norma \mathcal{H}_2 torna a otimização mais rápida e simples.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

9.1 CONTRIBUIÇÃO

Esta tese apresenta, como principal contribuição, a proposta de uma nova metodologia que trata da avaliação do comportamento de um protótipo por meio do emprego de um modelo em escala que apresente similaridade dinâmica incompleta em relação ao protótipo em questão. A metodologia proposta introduz uma ferramenta para análise, projeto e calibração de modelos em escala com o objetivo de predição do comportamento dinâmico de protótipos.

A importância da metodologia proposta se apóia no fato de que, mesmo quando a similaridade dinâmica completa entre sistemas é teoricamente possível, esta é quase impossível de se obter na prática. Assim, nos casos em que a similaridade dinâmica completa pode ser teoricamente atingida e o sistema for estável e pode ser modelado por equações diferenciais lineares, a metodologia proposta é plenamente aplicável.

Outras contribuições do presente trabalho são:

- a proposta de adoção de três critérios que permitem quantificar a similaridade dinâmica incompleta, quando a similaridade dinâmica completa não puder ser atingida, o que serve de base para o desenvolvimento da metodologia proposta;
- uma nova proposta para definição dos parâmetros Π adimensionais e fatores de forma que garantem a similaridade dinâmica completa entre o protótipo e o modelo em escala;
- um enfoque conjunto para a abordagem da similaridade aplicada à dinâmica de veículos que considera a análise dimensional e modelagem específica do sistema;
- a determinação das relações que devem existir entre as excitações de base do protótipo e do modelo de modo que estas sejam semelhantes e possibilitem a análise do comportamento do protótipo a partir do modelo em escala;

- a determinação das relações que devem existir entre os ganhos em malha fechada para que haja semelhança dinâmica completa entre o protótipo e o modelo em escala de um sistema modelado como um quarto de carro dotado de um sistema de suspensão ativa com sistema de controle por realimentação de estado.

9.2 TRABALHOS FUTUROS

A metodologia proposta se aplica a sistemas que podem ser modelados por meio de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes (sistemas LTI) e que sejam estáveis. O prosseguimento normal do trabalho aponta para a investigação da aplicabilidade da metodologia a sistemas não-lineares e a sistemas lineares a parâmetros variáveis (sistemas LPV), o que aumentaria a abrangência da metodologia proposta. Esta investigação parece promissora, uma vez que esses sistemas possuem métodos de solução numérica e também normas aplicáveis a eles. A possibilidade de se aplicar a metodologia proposta a sistemas não lineares possibilitará, por exemplo, a consideração do veículo de 7 DOF em movimentos de maior amplitude, sem ter que se aplicar a hipótese simplificadora de pequenos deslocamentos e rotações, que é necessária neste trabalho para linearizar as equações diferenciais de governo.

Neste trabalho, ocupou-se fundamentalmente da dinâmica vertical do veículo, mas a metodologia proposta é abrangente e pode ser aplicada no estudo das dinâmicas lateral e longitudinal do veículo, uma vez que já existem modelos matemáticos LTI para análise destes movimentos. Apesar do foco na dinâmica vertical de um veículo militar, pode-se aplicar a metodologia para outros tipos de sistemas, mesmo de outra natureza, como sistemas químicos ou elétricos, contanto que sejam sistemas LTI estáveis.

Embora não tenha sido feita a análise de conforto associada a excitações de base senoidais, pode-se executar tal análise utilizando-se o modelo de sete graus de liberdade (7 DOF), estando o programa desenvolvido já preparado para isso. Além disso, sugere-se o desenvolvimento do modelo adimensional para o veículo de 7 DOF dotado de suspensão ativa.

Sugere-se também a análise de como cada parâmetro Π influencia a norma \mathcal{H}_2 e a norma \mathcal{H}_∞ da diferença dos sistemas, para definir quais componentes têm maior influência na similaridade dinâmica.

10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEYNE, A. **Improved vehicle performance using combined suspension and braking forces.** *Vehicle System Dynamics*, (27): 235-265, 1997.
- ALLEYNE, A. and BRENNAN, S. **Using a scale testbed: Controller design and evaluation.** *IEEE Control Systems Magazine*. Jun 2001.
- BRENNAN, S. and ALLEYNE, A. A scaled testbed for vehicle control: The IRS. *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on control Applications – Koala Coast – Island of Hawai’i, Hawai’i, USA*, Aug 1999.
- BRENNAN, S. and ALLEYNE, A. **The Illinois roadway simulator: A mechatronic testbed for vehicle dynamics and control.** *IEEE ASME Transactions on Mechatronics*. 5 (4): 349-359. Dec 2000.
- BRENNAN, S. Similarity conditions for comparing closed loop vehicle roll and pitch dynamics. *American Control Conference 2004*, Jun 2004.
- BUCKINGHAM, E., **On Physically Similar Systems: Illustrations of the use of dimensional equations,** *Physical Review*, vol. 4, 2nd series, pp. 345-376, 1914.
- CARNEIRO, F. L. *Análise Dimensional e Teoria da Semelhança e dos Modelos Físicos.* UFRJ Editora, 1993. ISBN 85-7108-077-1.
- DIMAROGONAS, A. *Vibration for Engineers.* Prentice Hall International Editions. 1996. ISBN 0-13-462938-8
- FOX, R. W., McDONALD, A. T., PRITCHARD, *Introdução à Mecânica dos Fluidos 7^a* Edição, LTC Editora, 2010. ISBN 9788521617570.
- KITTIRUNGSI, B. A. *A Scaling Methodology for Dynamic Systems: Quantification of Approximate Similitude and use in Multiobjective Design.* UNIVERSITY OF MICHIGAN. Ph.D. Thesis. University of Michigan. 2008.
- LLERENA, R.W.A. *Modelagem de um Simulador de Movimentos para Veículos Terrestres em Escala.* Pontifícia universidade Católica do Rio de Janeiro. Dissertação de Mestrado. 2000.
- LONGORIA, R.G., AL SHARIF, A. and PATIL, C.B. **Scaled vehicle system dynamics and control: a case study in anti-lock braking.** *Int. J. Vehicle Autonomous Systems* 2: 18-37, 2004.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno.* Pearson – Prentice Hall, 2006. ISBN 85-87918-23-0.
- PATIL, CHINMAYA, B., LONGORIA, R.G. and LYMROTH, J. Control prototyping for anti-lock braking control system on a scaled vehicle. *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Dec 2003.

- POLLEY, M. and ALLEYNE, A. G. Dimensionless analysis of tire characteristics for vehicle dynamics studies. *American Control Conference 2004*, Jun 2004.
- POLLEY, M., ALLEYNE, A. and DE VRIES, E. **Scaled vehicle tire characteristics: dimensionless analysis.** *Vehicle System Dynamics*, 44 (2): 87-105, Feb. 2006.
- QUAGLIA, G. and SORLI, M. **Air suspension dimensionless analysis and design procedure.** *Vehicle System Dynamics*, 35 (6): 443-475, 2001.
- SHEN, S., WANG, J., SHI, P., and PREMIER, G. **Nonlinear dynamics and stability analysis of vehicle plane motions.** *Vehicle System Dynamics*, 45 (1):15-35, Jan 2007.
- VERMA, R., VECCIO, D. D. and FATHY, H. K. **Development of a scaled vehicle with longitudinal dynamics of an HMMWV for an ITS testbed.** *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 13: 1-12, 2008.
- WITAYA, W., PARINYA, W., and KRISSADA, C. Scaled vehicle for interactive dynamic simulation (SIS). *Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on robotics and Biomimetics, Bangkok, Thailand*, Feb 2009.
- YOUNG, D.F., **Basic Principles and Concepts of Model Analysis,** *Experimental Mechanics*, July 1971, p 325- 336.

11 APÊNDICES

APÊNDICE 1 - SIMILARIDADE NA DINÂMICA VERTICAL DE ½ CARRO SIMÉTRICO – ESTUDO DE ‘ROLL’

1.1 INTRODUÇÃO

A evolução natural do estudo do sistema de um grau de liberdade realizado no capítulo 2 é a abordagem da dinâmica vertical para o sistema com dois graus de liberdade. Como uma primeira etapa, parte-se para o estudo do movimento de ‘bounce’ associado ao movimento de ‘roll’ do veículo modelado como meio carro. Para este estudo, considera-se que o carro apresenta propriedades de simetria com relação a um plano longitudinal que passa pelo seu centro e pode ser representado esquematicamente pela FIG. 1.1.

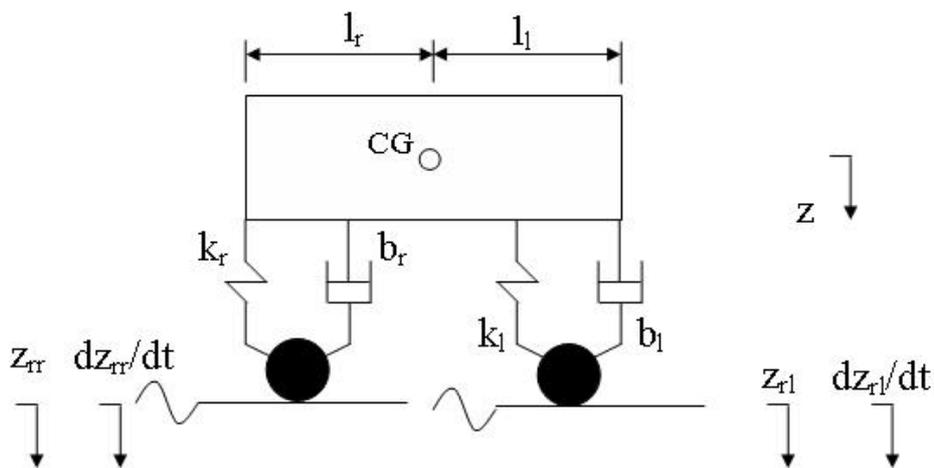


FIG. 1.1: Meio carro simétrico.

A sequência a ser seguida no estudo é semelhante àquela apresentada no capítulo 2, que se inicia pela determinação de parâmetros adimensionais julgados importantes para o estudo em questão, seguida da adimensionalização das equações diferenciais de governo do modelo, da análise das particularidades das excitações de base, da simulação do sistema para condições iniciais e resultados da simulação do modelo para excitações de base.

1.2 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS II

Seguindo o mesmo algoritmo empregado no capítulo 2, adota-se a base $[LMT]$ e escrevem-se as dimensões dos parâmetros de interesse como produtos das grandezas fundamentais elevadas a expoentes racionais, resultando na TAB. 1.1.

TAB. 1.1: Parâmetros do protótipo.

símbolo	descrição	dimensão
L	largura	$[L]$
m	massa	$[M]$
k	rigidez	$[MT^{-2}]$
b	coef. amortecimento	$[MT^{-1}]$
τ	tempo	$[T]$
g	gravidade	$[LT^{-2}]$

A matriz dimensional que relaciona as dimensões da base com os parâmetros de interesse do problema através de expoentes racionais é dada na TAB. 1.2.

TAB. 1.2: Matriz dimensional dos parâmetros do protótipo.

grandeza	L	m	τ	k	b	g
$[L]$	1	0	0	0	0	1
$[M]$	0	1	0	1	1	0
$[T]$	0	0	1	-2	-1	-2

O posto da submatriz 3x3 dada pela TAB. 1.3, que contém os parâmetros básicos, é igual a 3 o que determina que a dimensão da base mínima requerida para representar os parâmetros do problema é 3. Portanto, todas as dimensões da base $[LMT]$ escolhida são necessárias para a representação dos parâmetros do problema.

TAB. 1.3: Submatriz dimensional – Base mínima.

grandeza	L	m	τ
$[L]$	1	0	0
$[M]$	0	1	0
$[T]$	0	0	1

Escrevendo-se o produto dos parâmetros elevados a expoentes racionais a serem determinados como na EQ. 1.1 e substituindo-se os parâmetros por suas dimensões expressas na base escolhida, tem-se a EQ.1.2.

$$L_2^{x_1} m^{x_2} \tau^{x_3} k^{x_4} b^{x_5} g^{x_6} \quad (1.1)$$

$$(L)^{x_1} (M)^{x_2} (T)^{x_3} (MT^{-2})^{x_4} (MT^{-1})^{x_5} (LT^{-2})^{x_6} \quad (1.2)$$

Igualando a zero a soma dos expoentes das dimensões no produto dado na EQ.1.2, tem-se as equações EQ. 1.3, 1.4 e 1.5.

$$L : x_1 + 0 + 0 + 0 + 0 + x_6 = 0 \quad (1.3)$$

$$M : 0 + x_2 + 0 + x_4 + x_5 + 0 = 0 \quad (1.4)$$

$$T : 0 + 0 + x_3 - 2x_4 - x_5 - 2x_6 = 0 \quad (1.5)$$

Utilizando-se a combinação de valores dos x_i que conduza aos parâmetros Π que possuem significado físico associado a eles, tem-se $x_3 = -2$, $x_5 = 0$ e $x_6 = -1$ o que conduz a $x_1 = 1$ pela EQ. 1.3, $x_4 = 0$ pela EQ. 1.5 e $x_2 = 0$ pela EQ. 1.4. O primeiro grupo adimensional está apresentado na EQ. 1.6.

$$\Pi_1 = L_2^1 m^0 \tau^{-2} k^0 b^0 g^{-1} = \frac{L_2}{g \tau^2} = \frac{m L_2}{m g \tau^2} \quad (1.6)$$

Fazendo $x_1 = 1$, $x_4 = 0$ e $x_5 = 1$, tem-se $x_6 = -1$ pela EQ. 1.3, $x_2 = -1$ pela EQ. 1.4 e $x_3 = -1$ pela EQ. 1.5. O segundo grupo adimensional está apresentado na EQ. 1.7.

$$\Pi_2 = L_2^1 m^{-1} \tau^{-1} k^0 b^1 g^{-1} = \frac{b L_2}{m g \tau} \quad (1.7)$$

Fazendo $x_1 = 1$, $x_4 = 1$ e $x_5 = 0$, tem-se $x_6 = -1$ pela EQ.1.3, $x_2 = -1$ pela EQ. 1.4 e $x_3 = 0$ pela EQ.1.5. O terceiro grupo adimensional está apresentado na EQ. 1.8.

$$\Pi_3 = L_2^1 m^{-1} \tau^0 k^1 b^0 g^{-1} = \frac{kL_2}{mg} \quad (1.8)$$

Para este caso, adota-se, para a rigidez k do parâmetro adimensional Π_3 , o valor da rigidez equivalente do sistema dada pela EQ.1.9, e para o amortecimento b do parâmetro adimensional Π_2 , o valor do amortecimento equivalente do sistema dado pela EQ. 1.10.

A massa m é a própria massa do sistema, o parâmetro de dimensão comprimento usado nas adimensionalizações é a largura total do veículo $L_2=l_l+l_r$ (bitola), a aceleração da gravidade é uma constante, e o parâmetro τ é definido utilizando-se o valor de k dado pela EQ. 1.9.

Dessa forma os parâmetros adimensionais Π possuem os significados físicos apresentados no capítulo 2.

$$k = k_{eq} = k_l + k_r \quad (1.9)$$

$$b = b_{eq} = b_l + b_r \quad (1.10)$$

1.3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MOVIMENTO NA FORMA ADIMENSIONAL

Seguindo a sequência da adimensionalização da equação diferencial de movimento do sistema apresentada no capítulo 2, inicia-se pela parametrização da coordenada que representa o deslocamento vertical z , da velocidade vertical dz/dt , e do tempo t , necessários para a

determinação das condições iniciais das equações diferenciais no domínio adimensional, estabelecendo as relações entre essas grandezas nos espaços dimensional e adimensional.

Para a parametrização da coordenada z , dada em metros, que se refere ao grau de liberdade de deslocamento vertical da massa (conforme FIG. 1.1), utiliza-se o valor da largura total do veículo (bitola) L_2 . Desse modo a variável deslocamento no domínio adimensional, z^* , é dada pela EQ. 1.11.

$$z^* = \frac{z}{L_2} \quad (1.11)$$

Utilizando-se os valores da rigidez k e do amortecimento b dados nas equações EQ. 1.9 e 1.10, respectivamente, define-se um valor de tempo τ em segundos pela EQ. 1.12 e estabelece-se a parametrização do tempo no domínio adimensional t^* pela divisão do tempo t por τ , como dado na EQ. 1.13.

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.12)$$

$$t^* = \frac{t}{\tau} \quad (1.13)$$

Para a parametrização da velocidade, utiliza-se a largura total do veículo L_2 e a constante de tempo τ definida na EQ. 1.12, para adimensionalizar a velocidade pela relação dada na EQ. 1.14.

$$v^* = \frac{dz^*}{dt^*} = \frac{\tau}{L_2} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (1.14)$$

A equação diferencial de movimento que rege o grau de liberdade de deslocamento vertical do sistema modelado como apresentado esquematicamente na FIG. 1.1, assumindo que a massa parte da posição de equilíbrio estático (origem do referencial z coincidente com a posição de equilíbrio estático), é dada pela EQ. 1.15.

$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + b_l \cdot \left(\frac{dz}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \cdot l_l - \frac{dz_{roadleft}}{dt} \right) + b_r \cdot \left(\frac{dz}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \cdot l_r - \frac{dz_{roadright}}{dt} \right) + k_l \cdot (z - \theta \cdot l_l - z_{roadleft}) + k_r \cdot (z + \theta \cdot l_r - z_{roadright}) = 0 \quad (1.15)$$

Agrupando os termos em dz/dt , $d\theta/dt$, z e θ , tem-se a EQ. 1.19. Devido às propriedades de simetria consideradas para o modelo e dadas pelas equações EQ. 1.16, 1.17 e 1.18, a EQ. 1.19 se reduz à EQ. 1.20.

$$k_l = k_r = k_{eq} / 2 \quad (1.16)$$

$$b_l = b_r = b_{eq} / 2 \quad (1.17)$$

$$l_l = l_r = L_2 / 2 \quad (1.18)$$

$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + (b_l + b_r) \cdot \frac{dz}{dt} - (b_r \cdot l_r - b_l \cdot l_l) \cdot \frac{d\theta}{dt} - b_l \cdot \left(-\frac{dz_{roadleft}}{dt} \right) - b_r \cdot \left(-\frac{dz_{roadright}}{dt} \right) + (k_l + k_r) \cdot z + (k_r \cdot l_r - k_l \cdot l_l) \cdot \theta - k_l \cdot (z_{roadleft}) + k_r \cdot (z_{roadright}) = 0 \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}
m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + (b_l + b_r) \cdot \frac{dz}{dt} - b_l \cdot \left(-\frac{dz_{roadleft}}{dt} \right) - b_r \cdot \left(-\frac{dz_{roadright}}{dt} \right) \\
+ (k_l + k_r) \cdot z - k_l \cdot (z_{roadleft}) + k_r \cdot (z_{roadright}) = 0
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Para tornar adimensional esta equação diferencial (EQ. 1.20) faz-se o procedimento termo a termo. Assim, considerando as parametrizações expressas nas equações EQ 1.13 e 1.15, respectivamente, chega-se às relações entre diferenciais e variáveis no domínio dimensional e adimensional expressas pelas equações EQ. 1.21 a 1.27.

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \left[\frac{d\left(\frac{z}{L_2}\right)L_2}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \right] = \frac{L_2}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} \tag{1.21}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\left(\frac{z}{L_2}\right)L_2}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{L_2}{\tau} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} \tag{1.22}$$

$$\frac{dz_{roadleft}}{dt} = \frac{d\left(\frac{z_{roadleft}}{L_2}\right)L_2}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{L_2}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadleft}^*}{dt^*} \tag{1.23}$$

$$\frac{dz_{roadright}}{dt} = \frac{d\left(\frac{z_{roadright}}{L_2}\right)L_2}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{L_2}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadright}^*}{dt^*} \tag{1.24}$$

$$z = \left(\frac{z}{L_2} \right) L_2 = L_2 \cdot z^* \quad (1.25)$$

$$z_{roadleft} = \left(\frac{z_{roadleft}}{L_2} \right) L_2 = L_2 \cdot z_{roadleft}^* \quad (1.26)$$

$$z_{roadright} = \left(\frac{z_{roadright}}{L_2} \right) L_2 = L_2 \cdot z_{roadright}^* \quad (1.27)$$

Substituindo-se as relações dadas nas EQ. 1.21 a 1.27 na EQ. 1.20 chega-se à forma da equação diferencial de movimento do sistema dada pela EQ. 1.28.

$$\begin{aligned} \frac{m \cdot L_2}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + (b_l + b_r) \cdot \frac{L_2}{\tau} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} - b_l \cdot \frac{L_2}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadleft}^*}{dt^*} - b_r \cdot \frac{L_2}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadright}^*}{dt^*} \\ + (k_l + k_r) L_2 \cdot z^* - k_l \cdot L_2 \cdot z_{roadleft}^* - k_r \cdot L_2 \cdot z_{roadright}^* = 0 \quad (1.28) \end{aligned}$$

Apesar das variáveis z^* e t^* estarem adimensionalizadas, a EQ. 1.28 tem dimensão de força por conta dos coeficientes das variáveis e suas diferenciais. Com o objetivo de tornar essa equação adimensional, divide-se a equação pelo produto $m \cdot g$, o que faz com que a EQ. 1.28 fique na forma adimensional apresentada na EQ. 1.29.

$$\begin{aligned} \frac{m \cdot L_2}{m \cdot g \cdot \tau^2} \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + (b_l + b_r) \cdot \frac{L_2}{m \cdot g \cdot \tau} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} - b_l \cdot \frac{L_2}{m \cdot g \cdot \tau} \cdot \frac{dz_{roadleft}^*}{dt^*} - b_r \cdot \frac{L_2}{m \cdot g \cdot \tau} \cdot \frac{dz_{roadright}^*}{dt^*} \\ + (k_l + k_r) \cdot \frac{L_2}{m \cdot g} \cdot z^* - k_l \cdot \frac{L_2}{m \cdot g} \cdot z_{roadleft}^* - k_r \cdot \frac{L_2}{m \cdot g} \cdot z_{roadright}^* = 0 \quad (1.29) \end{aligned}$$

A equação diferencial EQ. 1.29 é adimensional e, portanto, seus coeficientes possuem um significado físico claro e simples. O primeiro coeficiente adimensional representa a razão entre a força de inércia e a força gravitacional. O segundo coeficiente adimensional representa a razão entre a força de dissipação viscosa e a força gravitacional, e o terceiro coeficiente adimensional representa a razão entre a força elástica e a força gravitacional, como no caso do sistema de um grau de liberdade.

De maneira semelhante ao sistema com um grau de liberdade, os coeficientes das diferenciais são adimensionais e apresentam a forma geral dos parâmetros Π encontrados na Seção 2.2, sendo que alguns dos parâmetros Π são iguais aos encontrados naquela seção simplesmente substituindo z_{eq} por L_2 (parâmetros Π_1 , Π_2 e Π_3).

Aproveitando a forma geral dos parâmetros Π encontrados na Seção 2.2, definem-se os parâmetros Π pelas equações EQ. 1.30 a 1.37.

$$\Pi_1 = \frac{m \cdot L_2}{m \cdot g \cdot \tau^2} \quad (1.30)$$

$$\Pi_2 = \frac{b_{eq} \cdot L_2}{m \cdot g \cdot \tau} \quad (1.31)$$

$$\Pi_3 = \frac{k_{eq} \cdot L_2}{m \cdot g} \quad (1.32)$$

$$\Pi_4 = \frac{b_{eq}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \quad (1.33)$$

$$\Pi_5 = \frac{b_l \cdot L_2}{m \cdot g \cdot \tau} = \frac{b_l}{(b_l + b_r)} \cdot \Pi_2 = \frac{b_l}{b_{eq}} \cdot \Pi_2 \quad (1.34)$$

$$\Pi_6 = \frac{b_r \cdot L_2}{m \cdot g \cdot \tau} = \frac{b_r}{(b_l + b_r)} \cdot \Pi_2 = \frac{b_r}{b_{eq}} \cdot \Pi_2 \quad (1.35)$$

$$\Pi_7 = \frac{k_l \cdot L_2}{m \cdot g} = \frac{k_l}{(k_l + k_r)} \cdot \Pi_3 = \frac{k_l}{k_{eq}} \cdot \Pi_3 \quad (1.36)$$

$$\Pi_8 = \frac{k_r \cdot L_2}{m \cdot g} = \frac{k_r}{(k_l + k_r)} \cdot \Pi_3 = \frac{k_r}{k_{eq}} \cdot \Pi_3 \quad (1.37)$$

Com os parâmetros Π assim definidos, pode-se escrever a equação diferencial de movimento do grau de liberdade de deslocamento vertical da massa (EQ. 1.29), como na EQ. 1.38.

$$\begin{aligned} \Pi_1 \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \Pi_2 \cdot \frac{dz^*}{dt^*} - \Pi_5 \cdot \frac{dz_{roadleft}^*}{dt^*} - \Pi_6 \cdot \frac{dz_{roadright}^*}{dt^*} \\ + \Pi_3 \cdot z^* - \Pi_7 \cdot z_{roadleft}^* - \Pi_8 \cdot z_{roadright}^* = 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \Pi_4 \cdot \frac{dz^*}{dt^*} - \frac{\Pi_4}{2} \cdot \left(\frac{dz_{roadleft}^*}{dt^*} + \frac{dz_{roadright}^*}{dt^*} \right) + z^* - \frac{1}{2} \cdot (z_{roadleft}^* + z_{roadright}^*) = 0 \quad (1.39)$$

Dividindo-se a EQ. 1.38 por Π_1 e observando-se as relações dadas pelas equações EQ. 1.16 a 1.18, e EQ. 1.33 a 1.37, chega-se à EQ. 1.39 que possui como único parâmetro

adimensional o parâmetro Π_4 . Desse modo, para garantir a semelhança dinâmica no grau de liberdade de deslocamento vertical entre o protótipo e o modelo em escala é suficiente que seus parâmetros adimensionais Π_4 sejam iguais.

O passo seguinte é a adimensionalização da equação de movimento relativa ao grau de liberdade de rotação. A equação diferencial de movimento que rege o grau de liberdade de rotação do sistema modelado, como apresentado esquematicamente na FIG. 1.1, é dada pela EQ. 1.40.

$$I_p \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_l \cdot \left(-l_l \cdot \frac{dz}{dt} + l_l^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} + l_l \cdot \frac{dz_{roadleft}}{dt} \right) + b_r \cdot \left(l_r \cdot \frac{dz}{dt} + l_r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} - l_r \cdot \frac{dz_{roadright}}{dt} \right) + k_l \cdot (-l_l \cdot z + \theta \cdot l_l^2 + l_l \cdot z_{roadleft}) + k_r \cdot (l_r \cdot z + \theta \cdot l_r^2 - l_r \cdot z_{roadright}) = 0 \quad (1.40)$$

Agrupando os termos em dz/dt , $d\theta/dt$, z e θ , tem-se a EQ. 1.41. Devido às propriedades de simetria consideradas para o modelo e dadas pelas equações EQ. 1.16, 1.17 e 1.18, a EQ.1.41 se reduz à EQ. 1.42.

$$I_p \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + (b_l \cdot l_l + b_r \cdot l_r) \cdot \frac{dz}{dt} + (b_r \cdot l_r^2 + b_l \cdot l_l^2) \cdot \frac{d\theta}{dt} + b_l \cdot l_l \cdot \left(\frac{dz_{roadleft}}{dt} \right) - b_r \cdot l_r \cdot \left(-\frac{dz_{roadright}}{dt} \right) + (-k_l \cdot l_l + k_r \cdot l_r) \cdot z + (k_r \cdot l_r^2 + k_l \cdot l_l^2) \cdot \theta + k_l \cdot l_l \cdot z_{roadleft} - k_r \cdot l_r \cdot z_{roadright} = 0 \quad (1.41)$$

$$I_p \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + (b_l + b_r) \cdot \frac{L_2^2}{4} \cdot \frac{d\theta}{dt} + b_l \cdot l_l \cdot \frac{dz_{roadleft}}{dt} - b_r \cdot l_r \cdot \frac{dz_{roadright}}{dt} + (k_l + k_r) \cdot \frac{L_2^2}{4} \cdot \theta + k_l \cdot l_l \cdot z_{roadleft} - k_r \cdot l_r \cdot z_{roadright} = 0 \quad (1.42)$$

Seguindo o procedimento para tornar adimensional a equação diferencial EQ. 1.42 faz-se o procedimento termo a termo como realizado para a EQ. 1.20. Assim, considerando as parametrizações expressas nas equações EQ. 1.13 e 1.15, respectivamente, chega-se às relações entre diferenciais e variáveis no domínio dimensional e adimensional expressas pelas equações EQ. 1.43 a 1.49.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \left[\frac{d\theta}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \right] = \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^{*2}} \quad (1.43)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} \quad (1.44)$$

$$\frac{dz_{roadleft}}{dt} = \frac{d\left(\frac{z_{roadleft}}{L_2}\right)L_2}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{L_2}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadleft}^*}{dt^*} \quad (1.45)$$

$$\frac{dz_{roadright}}{dt} = \frac{d\left(\frac{z_{roadright}}{L_2}\right)L_2}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{L_2}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadright}^*}{dt^*} \quad (1.46)$$

$$\theta = \theta^* \quad (1.47)$$

$$z_{roadleft} = \left(\frac{z_{roadleft}}{L_2}\right)L_2 = L_2 \cdot z_{roadleft}^* \quad (1.48)$$

$$z_{roadright} = \left(\frac{z_{roadright}}{L_2}\right)L_2 = L_2 \cdot z_{roadright}^* \quad (1.49)$$

Substituindo-se as relações dadas pelas equações EQ. 1.43 a 1.49 na EQ. 1.42, chega-se à forma da equação diferencial de movimento do sistema dada pela EQ. 1.50.

$$\begin{aligned} \frac{I_p}{\tau^2} \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^{*2}} + (b_l + b_r) \cdot \frac{L_2^2}{4\tau} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} + b_l \cdot l_l \cdot \frac{L_2}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadleft}^*}{dt^*} - b_r \cdot l_r \cdot \frac{L_2}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadright}^*}{dt^*} \\ + (k_l + k_r) \cdot \frac{L_2^2}{4} \cdot \theta^* + k_l \cdot l_l \cdot L_2 \cdot z_{roadleft}^* - k_r \cdot l_r \cdot L_2 \cdot z_{roadright}^* = 0 \quad (1.50) \end{aligned}$$

Estabelece-se, neste ponto, uma relação entre o momento de inércia polar I_p e o valor do produto $m \cdot L_2^2$ para simplificação do desenvolvimento, o que vai permitir o uso de quase todos os parâmetros Π definidos para o grau de liberdade de translação no grau de liberdade de rotação. Na verdade, o que se busca é uma inércia equivalente de rotação expressa em termos de uma quantidade relacionada com o numerador do parâmetro Π_1 que aparece na adimensionalização da equação diferencial relativa ao grau de liberdade de translação.

Pode-se considerar a forma do corpo do veículo conforme ilustrado na FIG. 1.1 como tendo diversas formas. Formas básicas que se mostram razoáveis para o estudo são a forma de haste delgada e a forma de placa fina retangular com diferentes razões de aspecto (razão entre comprimento e altura), conforme mostra a FIG. 1.2.

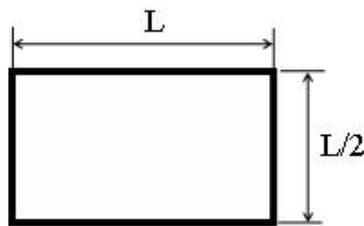


FIG. 1.2: Placa fina retangular – razão de aspecto.

Como as dimensões das duas grandezas entre as quais se deseja estabelecer uma relação é a mesma, a relação entre elas será dada por um fator de multiplicação que é uma constante e esta relação pode ser expressa de uma forma geral pela EQ. 1.51. Assim, para o

caso de se considerar o corpo do veículo como tendo a forma de uma haste delgada, o valor da inércia polar é dado pela EQ. 1.52, e o valor que relaciona as duas grandezas é a constante 1/12.

$$I_p = cte.m.L_2^2 \quad (1.51)$$

$$I_p = \frac{1}{12}.m.L_2^2 \quad (1.52)$$

Caso se considere que o corpo do veículo para estudos no plano em que se encontra o meio carro tem a forma de uma placa fina retangular, o valor da inércia polar é dado pela EQ. 1.53.

$$I_p = \frac{1}{12}.m.(b^2 + c^2) \quad (1.53)$$

Com razão de aspecto dada pela razão entre a dimensão b e a dimensão c igual a $\frac{1}{2}$ como na FIG 1.2, o valor que relaciona as duas grandezas é constante e igual a $\frac{5}{48}$, e o valor de I_p é dado pela EQ. 1.54. Caso se considere o corpo do veículo mais esbelto com uma razão de aspecto igual a $\frac{1}{4}$, o valor da constante em questão é de $\frac{17}{192}$, e o valor de I_p pode ser escrito como na EQ. 1.55.

$$I_p = \frac{5}{48}.m.L_2^2 \quad (1.54)$$

$$I_p = \frac{17}{192}.m.L_2^2 \quad (1.55)$$

Adotando-se para o movimento de ‘roll’ a razão de aspecto igual a $\frac{1}{2}$ (razão entre a altura e a largura do corpo do veículo modelado como meio carro), valem as relações

estabelecidas pelas equações EQ. 1.51 e 1.54. Neste ponto, pode-se prosseguir com a adimensionalização da equação diferencial de movimento relativa ao grau de liberdade de rotação, sendo que onde figura a constante *cte* leia-se o seu valor 5/48 para o estudo de ‘roll’.

Prosseguindo, então, com a adimensionalização, vê-se que, apesar das variáveis z^* , θ e t^* estarem adimensionalizadas, a EQ. 1.50 tem dimensão de momento por conta dos coeficientes das variáveis e suas diferenciais. Com o objetivo de tornar essa equação adimensional, divide-se a equação pelo produto $m.g.L_2$, que tem dimensão de momento.

Observando as propriedades de simetria, expressas nas equações EQ. 1.16, 1.17 e 1.18, e utilizando-se a relação dada pelas equações EQ. 1.51, 1.9, 1.10, a EQ. 1.50 fica na forma adimensional apresentada na EQ. 1.56.

$$\begin{aligned} \frac{cte.L_2.k_{eq}}{m.g} \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^{*2}} + \frac{b_{eq}.L_2}{4.m.g.\tau} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} + \frac{b_l.L_2}{2.m.g.\tau} \cdot \frac{dz_{roadleft}^*}{dt^*} - \frac{b_r.L_2}{2.m.g.\tau} \cdot \frac{dz_{roadright}^*}{dt^*} \\ + \frac{k_{eq}.L_2}{4.m.g} \cdot \theta^* + \frac{k_l.L_2}{2.m.g} \cdot z_{roadleft}^* - \frac{k_r.L_2}{2.m.g} \cdot z_{roadright}^* = 0 \quad (1.56) \end{aligned}$$

Utilizando-se os parâmetros Π_1 , Π_2 , Π_3 , Π_4 , Π_5 , Π_6 , Π_7 e Π_8 definidos pelas equações EQ. 1.30 a 1.37, pode-se escrever a equação diferencial de movimento adimensional relativa ao grau de liberdade de rotação como na EQ. 1.57.

$$\begin{aligned} cte.\Pi_1 \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^{*2}} + \frac{\Pi_2}{4} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} + \frac{\Pi_5}{2} \cdot \frac{dz_{roadleft}^*}{dt^*} - \frac{\Pi_6}{2} \cdot \frac{dz_{roadright}^*}{dt^*} \\ + \frac{\Pi_3}{4} \cdot \theta^* + \frac{\Pi_7}{2} \cdot z_{roadleft}^* - \frac{\Pi_8}{2} \cdot z_{roadright}^* = 0 \quad (1.57) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\theta^*}{dt^{*2}} + \frac{\Pi_4}{4.cte} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} + \frac{\Pi_4}{4.cte} \cdot \left(\frac{dz_{roadleft}^*}{dt^*} - \frac{dz_{roadright}^*}{dt^*} \right) + \frac{1}{4.cte} \cdot \theta^* + \frac{1}{4.cte} \cdot (z_{roadleft}^* - z_{roadright}^*) = 0 \quad (1.58)$$

Seguindo procedimento similar ao executado com a EQ. 1.38, divide-se a EQ. 1.57 pelo produto $cte \cdot \Pi_1$. Observando-se as relações dadas pelas equações EQ. 1.16 a 1.18, e EQ. 1.33 a 1.37, chega-se à EQ. 1.58 que, como a EQ. 1.39, também possui como único parâmetro adimensional, o parâmetro Π_4 . Desse modo, para garantir a semelhança dinâmica no grau de liberdade de rotação entre o protótipo e o modelo em escala é suficiente que seus parâmetros adimensionais Π_4 sejam iguais. Como esta mesma condição garante também a semelhança no grau de liberdade de deslocamento vertical, como visto anteriormente, a igualdade dos parâmetros Π_4 garante a semelhança dinâmica entre o modelo em escala e o protótipo nos dois graus de liberdade considerados.

Pode-se também utilizar o valor de z_{eq} para a parametrização dos comprimentos. A parametrização dos comprimentos pelo uso de z_{eq} dado pela EQ. 1.59 seguindo os passos descritos anteriormente, conduz às equações EQ. 1.60 e 1.61 para os graus de liberdade de deslocamento vertical e rotação respectivamente.

$$z^* = \frac{z}{z_{eq}} \quad (1.59)$$

$$\frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \Pi_4 \cdot \frac{dz^*}{dt^*} - \frac{\Pi_4}{2} \cdot \left(\frac{dz_{roadleft}^*}{dt^*} + \frac{dz_{roadright}^*}{dt^*} \right) + z^* - \frac{1}{2} \cdot (z_{roadleft}^* + z_{roadright}^*) = 0 \quad (1.60)$$

$$\frac{d^2\theta^*}{dt^{*2}} + \frac{\Pi_4}{4.cte} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} + \frac{\Pi_4}{4.cte} \cdot \frac{z_{eq}}{L_2} \cdot \left(\frac{dz_{roadleft}^*}{dt^*} - \frac{dz_{roadright}^*}{dt^*} \right) + \frac{1}{4.cte} \cdot \theta^* + \frac{1}{4.cte} \cdot \frac{z_{eq}}{L_2} \cdot (z_{roadleft}^* - z_{roadright}^*) = 0 \quad (1.61)$$

Observa-se que a EQ. 1.59, referente ao grau de liberdade de deslocamento vertical, é igual à EQ. 1.39 resultante da parametrização por L_2 , mas comparando as equações referentes ao grau de liberdade de rotação para as duas parametrizações, equações EQ. 1.57 e 1.60, nota-se que na segunda aparece um fator z_{eq}/L_2 que tem que apresentar semelhança – além da semelhança requerida para o parâmetro Π_4 – para a similaridade dinâmica dos sistemas.

APÊNDICE 2 - SIMILARIDADE NA DINÂMICA VERTICAL DE 1/2 CARRO ASSIMÉTRICO – ESTUDO DE ‘PITCH’

2.1 INTRODUÇÃO

Este apêndice aborda a dinâmica vertical de 1/2 carro para o sistema com dois graus de liberdade. Numa primeira etapa, realizou-se o estudo do movimento de ‘bounce’ associado ao movimento de ‘roll’ do veículo modelado como meio carro (APÊNDICE 1). Para esse estudo, considerou-se que o carro apresenta propriedades de simetria com relação a um plano longitudinal que passa pelo seu centro, o que constitui uma particularidade no modelo. Agora, é considerado o estudo do movimento de ‘bounce’ associado ao movimento de ‘pitch’ do veículo modelado como meio carro e representado esquematicamente na FIG. 2.1. A hipótese de simetria adotada anteriormente não é mais razoável para este estudo e simplificações decorrentes dela não podem ser realizadas neste desenvolvimento, o que leva a formas mais complexas de coeficientes adimensionais das equações diferenciais em suas formas adimensionais.

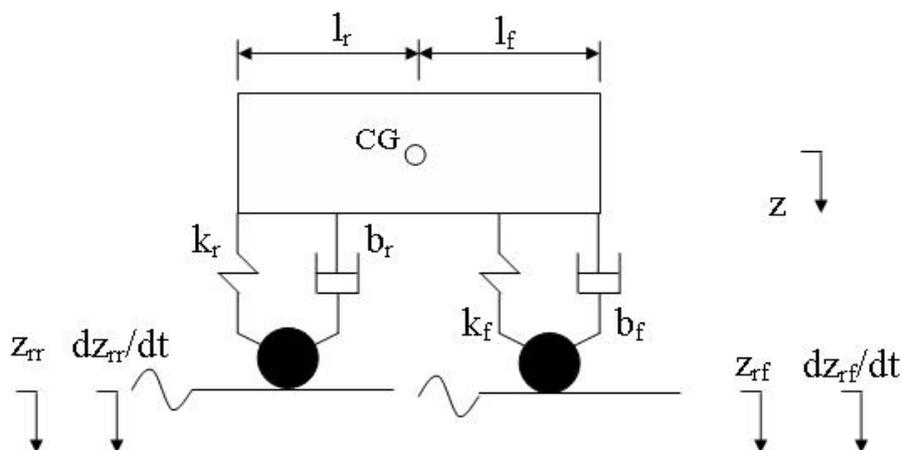


FIG. 2.1: Meio carro assimétrico.

A sequência a ser seguida no estudo é semelhante àquela apresentada no Capítulo 4, para a determinação da forma adimensional das equações diferenciais de governo, adotando-se como parâmetros Π os coeficientes adimensionais das diferenciais adimensionais nas equações diferenciais assim obtidas.

Para concluir a adimensionalização do sistema, utilizam-se as relações entre as excitações de base nos domínios dimensional e adimensional desenvolvidas na Seção 2.7.

Os resultados mostram que é possível prever o comportamento do protótipo por meio do modelo em escala sem simulá-lo e bons resultados são também obtidos com o modelo de 1/2 de carro assimétrico com dois graus de liberdade, revelando que a similaridade dinâmica completa foi obtida também para este modelo.

2.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MOVIMENTO NA FORMA ADIMENSIONAL

Considera-se o sistema constituído por meio carro assimétrico com dois graus de liberdade representado esquematicamente na FIG. 2.1.

Para obter a equação diferencial na forma adimensional, inicia-se pela parametrização das coordenadas que representam o deslocamento vertical z , da velocidade vertical dz/dt , do deslocamento angular de pitch θ , da velocidade angular de pitch $d\theta/dt$, e do tempo t , (necessários para a determinação das condições iniciais das equações diferenciais no domínio adimensional), estabelecendo as relações entre essas grandezas nos espaços dimensional e adimensional.

Definem-se as constantes de rigidez e de amortecimento equivalentes do sistema pelas relações dadas nas equações EQ. 2.1 e 2.2.

$$k = k_{eq} = k_l + k_r \quad (2.1)$$

$$b = b_{eq} = b_l + b_r \quad (2.2)$$

Para a parametrização da coordenada z , dada em metros, que se refere ao grau de liberdade de deslocamento vertical – ‘bounce’ – (conforme FIG. 2.1), utiliza-se o valor da variável z_{eq} dado pela EQ. 2.3, que é o deslocamento da massa do sistema em metros até a posição de equilíbrio estático. Desse modo, a variável deslocamento da massa no domínio adimensional, z^* , é dada pela EQ. 2.4.

Como o ângulo de ‘pitch’ é dado em radianos, que já é uma grandeza adimensional, o deslocamento angular adimensional será tomado como o próprio ângulo de ‘pitch’. Então, a relação entre o deslocamento angular no domínio dimensional e adimensional é dada pela EQ. 2.5.

$$z_{eq} = \frac{m \cdot g}{k_{eq}} \quad (2.3)$$

$$z^* = \frac{z}{z_{eq}} \quad (2.4)$$

$$\theta^* = \theta \quad (2.5)$$

Para a parametrização do tempo t em segundos, define-se um valor de tempo τ em segundos pela EQ. 2.6 e estabelece-se a parametrização do tempo no domínio adimensional t^* pela divisão do tempo t por τ , como dado na EQ. 2.7.

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.6)$$

$$t^* = \frac{t}{\tau} \quad (2.7)$$

Para a parametrização da velocidade, utiliza-se z_{eq} e τ definidas em EQ. 2.3 e 2.6, respectivamente, para definir uma velocidade v_{eq} em m/s dada pela EQ. 2.8. A parametrização da velocidade é dada pela EQ. 2.9.

$$v_{eq} = \frac{z_{eq}}{\tau} \quad (2.8)$$

$$\frac{dz^*}{dt^*} = \frac{1}{v_{eq}} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (2.9)$$

A equação diferencial de movimento que rege o grau de liberdade de deslocamento vertical do sistema modelado como apresentado esquematicamente na FIG. 2.1, e assumindo que a massa parte da posição de equilíbrio estático (origem do referencial z coincidente com a posição de equilíbrio estático), é dada pela EQ. 2.10. Agrupando os termos em dz/dt , $d\theta/dt$, z e θ , tem-se a EQ 2.11.

$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + b_l \cdot \left(\frac{dz}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \cdot l_f - \frac{dz_{roadfront}}{dt} \right) + b_r \cdot \left(\frac{dz}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \cdot l_r - \frac{dz_{roadrear}}{dt} \right) + k_f \cdot (z - \theta \cdot l_r - z_{roadfront}) + k_r \cdot (z + \theta \cdot l_r - z_{roadrear}) = 0 \quad (2.10)$$

$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + (b_f + b_r) \cdot \frac{dz}{dt} - (b_r \cdot l_r - b_f \cdot l_f) \cdot \frac{d\theta}{dt} - b_f \cdot \left(-\frac{dz_{roadfront}}{dt} \right) - b_r \cdot \left(-\frac{dz_{roadrear}}{dt} \right) + (k_f + k_r) \cdot z + (k_r \cdot l_r - k_f \cdot l_f) \cdot \theta - k_f \cdot (z_{roadfront}) + k_r \cdot (z_{roadrear}) = 0 \quad (2.11)$$

Para tornar adimensional esta equação diferencial EQ. 2.11, faz-se o procedimento termo a termo. Assim, considerando as parametrizações expressas nas equações EQ. 2.4 e 2.7, respectivamente, chegam-se às relações entre diferenciais e variáveis no domínio dimensional e adimensional expressas pelas equações EQ. 2.12 a 2.18.

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \left[\frac{d\left(\frac{z}{z_{eq}}\right)z_{eq}}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \right] = \frac{z_{eq}}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} \quad (2.12)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\left(\frac{z}{z_{eq}}\right)z_{eq}}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{z_{eq}}{\tau} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} \quad (2.13)$$

$$\frac{dz_{roadfront}}{dt} = \frac{d\left(\frac{z_{roadfront}}{z_{eq}}\right)z_{eq}}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{z_{eq}}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadfront}^*}{dt^*} \quad (2.14)$$

$$\frac{dz_{roadrear}}{dt} = \frac{d\left(\frac{z_{roadrear}}{z_{eq}}\right)z_{eq}}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{z_{eq}}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadrear}^*}{dt^*} \quad (2.15)$$

$$z = \left(\frac{z}{z_{eq}}\right)z_{eq} = z_{eq} \cdot z^* \quad (2.16)$$

$$z_{roadfront} = \left(\frac{z_{roadfront}}{z_{eq}}\right)z_{eq} = z_{eq} \cdot z_{roadfront}^* \quad (2.17)$$

$$z_{roadrear} = \left(\frac{z_{roadrear}}{z_{eq}}\right)z_{eq} = z_{eq} \cdot z_{roadrear}^* \quad (2.18)$$

Substituindo-se as relações dadas nas EQ. 2.12 a 2.18 na EQ. 2.11, chega-se à forma da equação diferencial de movimento do sistema dada pela EQ. 2.19.

$$\begin{aligned} & \frac{m \cdot z_{eq}}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + (b_f + b_r) \frac{z_{eq}}{\tau} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + \frac{(b_r l_r - b_f l_f)}{\tau} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - b_f \cdot \frac{z_{eq}}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadfront}^*}{dt^*} - b_r \cdot \frac{z_{eq}}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadrear}^*}{dt^*} \\ & + (k_f + k_r) z_{eq} \cdot z^* + (k_r l_r - k_f l_f) \theta^* - k_f \cdot z_{eq} \cdot z_{roadfront}^* - k_r \cdot z_{eq} \cdot z_{roadrear}^* = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Apesar das variáveis z^* e t^* estarem adimensionalizadas, a EQ. 2.19 tem dimensão de força por conta dos coeficientes das variáveis e suas diferenciais. Com o objetivo de tornar essa equação adimensional, divide-se a equação pelo produto $m \cdot g$, o que faz com que a EQ. 2.19 fique na forma adimensional apresentada na EQ. 2.20.

$$\begin{aligned} & \frac{m \cdot z_{eq}}{m \cdot g \cdot \tau^2} \cdot \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + (b_f + b_r) \frac{z_{eq}}{m \cdot g \cdot \tau} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + \frac{(b_r l_r - b_f l_f)}{m \cdot g \cdot \tau} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - b_f \cdot \frac{z_{eq}}{m \cdot g \cdot \tau} \cdot \frac{dz_{roadfront}^*}{dt^*} - b_r \cdot \frac{z_{eq}}{m \cdot g \cdot \tau} \cdot \frac{dz_{roadrear}^*}{dt^*} \\ & + (k_f + k_r) \frac{z_{eq}}{m \cdot g} \cdot z^* + \frac{(k_r l_r - k_f l_f)}{m \cdot g} \cdot \theta^* - \frac{k_f \cdot z_{eq}}{m \cdot g} \cdot z_{roadfront}^* - \frac{k_r \cdot z_{eq}}{m \cdot g} \cdot z_{roadrear}^* = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dividindo-se a EQ. 2.20 pelo coeficiente do primeiro termo, a equação fica em uma forma mais compacta apresentada na EQ. 2.21.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \frac{(b_f + b_r)}{\sqrt{m(k_f + k_r)}} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + \frac{(b_r l_r - b_f l_f)}{z_{eq} \sqrt{m(k_f + k_r)}} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - \frac{b_f}{\sqrt{m(k_f + k_r)}} \cdot \frac{dz_{roadfront}^*}{dt^*} - \frac{b_r}{\sqrt{m(k_f + k_r)}} \cdot \frac{dz_{roadrear}^*}{dt^*} \\ & + z^* + \frac{(k_r l_r - k_f l_f)}{z_{eq} \cdot (k_f + k_r)} \cdot \theta^* - \frac{k_f}{(k_f + k_r)} \cdot z_{roadfront}^* - \frac{k_r}{(k_f + k_r)} \cdot z_{roadrear}^* = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Parte-se para a adimensionalização da equação de movimento relativa ao grau de liberdade de rotação. A equação diferencial de movimento que rege o grau de liberdade de rotação do sistema modelado, como apresentado esquematicamente na FIG. 2.1, é dada pela EQ. 2.22.

$$I_p \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_f \cdot \left(-l_f \cdot \frac{dz}{dt} + l_f^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} + l_f \cdot \frac{dz_{roadfront}}{dt} \right) + b_r \cdot \left(l_r \cdot \frac{dz}{dt} + l_r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} - l_r \cdot \frac{dz_{roadrear}}{dt} \right) + k_f \cdot \left(-l_f \cdot z + \theta \cdot l_f^2 + l_f \cdot z_{roadfront} \right) + k_r \cdot \left(l_r \cdot z + \theta \cdot l_r^2 - l_r \cdot z_{roadrear} \right) = 0 \quad (2.22)$$

Agrupando os termos em dz/dt , $d\theta/dt$, z e θ ; tem-se a EQ. 2.23.

$$I_p \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + (b_r \cdot l_r + b_f \cdot l_f) \cdot \frac{dz}{dt} + (b_r \cdot l_r^2 + b_f \cdot l_f^2) \cdot \frac{d\theta}{dt} + b_f \cdot l_f \cdot \left(\frac{dz_{roadfront}}{dt} \right) - b_r \cdot l_r \cdot \left(-\frac{dz_{roadrear}}{dt} \right) + (k_r \cdot l_r - k_f \cdot l_f) \cdot z + (k_f \cdot l_f^2 + k_r \cdot l_r^2) \cdot \theta + k_f \cdot l_f \cdot z_{roadfront} - k_r \cdot l_r \cdot z_{roadrear} = 0 \quad (2.23)$$

Considerando as parametrizações expressas nas equações EQ. 2.4 e 2.7, respectivamente, chega-se às relações entre diferenciais e variáveis no domínio dimensional e adimensional expressas pelas equações EQ. 2.24 a 2.26.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \left[\frac{d\theta}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} \right] = \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^{*2}} \quad (2.24)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)\tau} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} \quad (2.25)$$

$$\theta = \theta^* \quad (2.26)$$

Substituindo-se as relações dadas pelas equações EQ. 2.12 a 2.18, e EQ. 2.24 a 2.26 na EQ. 2.23, chega-se à forma da equação diferencial de movimento do sistema dada pela EQ. 2.27.

$$\begin{aligned} & \frac{I_p}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 \theta^*}{dt^{*2}} + (b_r l_r - b_f l_f) \cdot \frac{z_{eq}}{\tau} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + (b_f l_f^2 + b_r l_r^2) \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} + b_f l_f \cdot \frac{z_{eq}}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadfront}^*}{dt^*} - b_r l_r \cdot \frac{z_{eq}}{\tau} \cdot \frac{dz_{roadrear}^*}{dt^*} \\ & + (k_r l_r - k_f l_f) \cdot z_{eq} \cdot z^* + (k_f l_f^2 + k_r l_r^2) \cdot \theta^* + k_f l_f \cdot z_{eq} \cdot z_{roadfront}^* - k_r l_r \cdot z_{eq} \cdot z_{roadrear}^* = 0 \quad (2.27) \end{aligned}$$

Utilizando-se a relação entre o momento de inércia polar para o movimento de ‘pitch’, I_p , e o valor do produto $m.L^2$ desenvolvida na seção 3.3 dada pelas equações EQ. 3.50 a 3.54 e dividindo-se a equação resultante pelo coeficiente do primeiro termo, chega-se à forma mais compacta apresentada na EQ. 2.28. Nesta equação, $cte1$ vale 17/192 e $L_1 = l_f + l_r$ é o comprimento do veículo.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \theta^*}{dt^{*2}} + \frac{(b_r l_r - b_f l_f) \cdot z_{eq}}{cte1 \cdot L_1^2 \cdot \sqrt{m} \cdot (k_f + k_r)} \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + \frac{(b_f l_f^2 + b_r l_r^2)}{cte1 \cdot L_1^2 \cdot \sqrt{m} \cdot (k_f + k_r)} \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} \\ & + \frac{b_f \cdot l_f \cdot z_{eq}}{cte1 \cdot L_1^2 \cdot \sqrt{m} \cdot (k_f + k_r)} \cdot \frac{dz_{roadfront}^*}{dt^*} - \frac{b_r \cdot l_r \cdot z_{eq}}{cte1 \cdot L_1^2 \cdot \sqrt{m} \cdot (k_f + k_r)} \cdot \frac{dz_{roadrear}^*}{dt^*} + \frac{(k_r l_r - k_f l_f) \cdot z_{eq}}{cte1 \cdot L_1^2 \cdot (k_f + k_r)} \cdot z^* \\ & + \frac{(k_f l_f^2 + k_r l_r^2)}{cte1 \cdot L_1^2 \cdot (k_f + k_r)} \cdot \theta^* + \frac{k_f \cdot l_f \cdot z_{eq}}{cte1 \cdot L_1^2 \cdot (k_f + k_r)} \cdot z_{roadfront}^* - \frac{k_r \cdot l_r \cdot z_{eq}}{cte1 \cdot L_1^2 \cdot (k_f + k_r)} \cdot z_{roadrear}^* = 0 \quad (2.28) \end{aligned}$$

2.3 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS II

Seguindo-se a sequência apresentada no CAP. 4 parte-se para a determinação dos grupos adimensionais – parâmetros II – que garantem a similaridade dinâmica completa dos sistemas em tamanho real (protótipo) e em tamanho reduzido (modelo em escala). Tomam-se, então, os coeficientes adimensionais das diferenciais adimensionais nas equações EQ. 2.21 e 2.28 como parâmetros II adimensionais de interesse do sistema em estudo, com o objetivo de garantir a similaridade dinâmica completa dos sistemas.

Desta forma, os parâmetros II adimensionais assumem as formas dadas pelas equações EQ. 2.29 a 2.43.

$$\Pi_1 = \frac{(b_r + b_f)}{\sqrt{m.(k_f + k_r)}} \quad (2.29)$$

$$\Pi_2 = \frac{(b_r l_r - b_f l_f)}{z_{eq} \cdot \sqrt{m.(k_f + k_r)}} \quad (2.30)$$

$$\Pi_3 = \frac{b_f}{\sqrt{m.(k_f + k_r)}} \quad (2.31)$$

$$\Pi_4 = \frac{b_r}{\sqrt{m.(k_f + k_r)}} \quad (2.32)$$

$$\Pi_5 = \frac{(k_r l_r - k_f l_f)}{z_{eq} \cdot (k_f + k_r)} \quad (2.33)$$

$$\Pi_6 = \frac{k_f}{(k_f + k_r)} \quad (2.34)$$

$$\Pi_7 = \frac{k_r}{(k_f + k_r)} \quad (2.35)$$

$$\Pi_8 = \frac{(b_r l_r - b_f l_f) z_{eq}}{cte l . L_1^2 \cdot \sqrt{m.(k_f + k_r)}} \quad (2.36)$$

$$\Pi_9 = \frac{(b_f l_f^2 + b_r l_r^2)}{cte1.L_1^2 \cdot \sqrt{m.(k_f + k_r)}} \quad (2.37)$$

$$\Pi_{10} = \frac{b_f . l_f . z_{eq}}{cte1.L_1^2 \cdot \sqrt{m.(k_f + k_r)}} \quad (2.38)$$

$$\Pi_{11} = \frac{b_r . l_r . z_{eq}}{cte1.L_1^2 \cdot \sqrt{m.(k_f + k_r)}} \quad (2.39)$$

$$\Pi_{12} = \frac{(k_r l_r - k_f l_f) z_{eq}}{cte1.L_1^2 \cdot (k_f + k_r)} \quad (2.40)$$

$$\Pi_{13} = \frac{(k_r l_r^2 + k_f l_f^2)}{cte1.L_1^2 \cdot (k_f + k_r)} \quad (2.41)$$

$$\Pi_{14} = \frac{k_f . l_f . z_{eq}}{cte1.L_1^2 \cdot (k_f + k_r)} \quad (2.42)$$

$$\Pi_{15} = \frac{k_r . l_r . z_{eq}}{cte1.L_1^2 \cdot (k_f + k_r)} \quad (2.43)$$

Substituindo-se os parâmetros Π nas equações EQ. 2.21 e 2.28, estas assumem as formas das equações EQ. 2.44 e 2.45.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} + \Pi_1 \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + \Pi_2 \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} - \Pi_3 \cdot \frac{dz_{roadfront}^*}{dt^*} - \Pi_4 \cdot \frac{dz_{roadrear}^*}{dt^*} \\ + z^* + \Pi_5 \cdot \theta^* - \Pi_6 \cdot z_{roadfront}^* - \Pi_7 \cdot z_{roadrear}^* = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta^*}{dt^{*2}} + \Pi_8 \cdot \frac{dz^*}{dt^*} + \Pi_9 \cdot \frac{d\theta^*}{dt^*} + \Pi_{10} \cdot \frac{dz_{roadfront}^*}{dt^*} - \Pi_{11} \cdot \frac{dz_{roadrear}^*}{dt^*} \\ + \Pi_{12} \cdot z^* + \Pi_{13} \cdot \theta^* + \Pi_{14} \cdot z_{roadfront}^* - \Pi_{15} \cdot z_{roadrear}^* = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

À medida que o modelo do sistema vai se tornando mais complexo, a forma dos parâmetros Π , definidos seguindo o procedimento proposto, também vai se tornando mais complexa. Apesar de se poder chegar a parâmetros Π com expressões mais simples através do procedimento que envolve o uso da matriz dimensional, os parâmetros de forma mais complexa garantem seguramente a similaridade dinâmica completa (e dificilmente se chegaria à sua forma através do procedimento que envolve o uso da matriz dimensional).

Os parâmetros assim adotados garantem a similaridade dinâmica completa dos sistemas (protótipo e modelo em escala), contanto que as condições iniciais adimensionais e as formas das excitações de base adimensionais sejam correspondentes para ambos os sistemas, conforme desenvolvimento na Seção 2.7. Estas condições compõem o conjunto de requisitos necessários para se garantir a similaridade dinâmica dos sistemas, como já foi apresentado na Seção 2.3.

APÊNDICE 3 - MODELO DE 1/4 DE CARRO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE E SUSPENSÃO ATIVA

3.1 INTRODUÇÃO

Neste apêndice é apresentado um estudo da similaridade de um sistema modelado como 1/4 de carro com dois graus de liberdade e dotado de um sistema de suspensão ativa. As equações diferenciais de governo do modelo são escritas, o que permite obter o equacionamento do sistema na sua representação em espaço de estados diretamente das equações diferenciais do modelo.

Partindo-se da equação diferencial de governo do sistema dimensional e utilizando-se as parametrizações utilizadas nos Capítulos 3 e 5, chega-se às equações diferenciais de governo adimensionais do sistema em malha fechada, o que permite estabelecer as condições necessárias para que haja similaridade dinâmica completa dos sistemas em malha fechada, uma vez que a similaridade dos sistemas em malha aberta já tenha sido obtida. Isso se reflete em relações diretas a serem atendidas entre os ganhos no protótipo e no modelo em escala para que a similaridade dinâmica completa seja obtida para os sistemas em malha fechada.

3.2 MODELO DE 1/4 DE CARRO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE E SUSPENSÃO ATIVA

Nesta seção, considera-se o modelo de 1/4 carro com 2 DOF dotado de um sistema de suspensão ativa, como representado esquematicamente na FIG. 3.1. Nesta representação, m_s é a massa suspensa do veículo, k_s é a rigidez da mola da suspensão, b_s é o coeficiente de amortecimento viscoso da suspensão, m_t é a massa não suspensa, k_t é a rigidez do pneu e b_t é o coeficiente de amortecimento viscoso do pneu. Os graus de liberdade do modelo são a coordenada z_s , que mede o deslocamento vertical do corpo do veículo a partir de sua posição de equilíbrio estático, e a coordenada z_t , que mede o deslocamento vertical da massa não

suspensa – aqui adotada como a massa do pneu, por simplicidade – a partir de sua posição de equilíbrio. z_r e dz_r/dt são as excitações de base a que o modelo está sujeito. Estas excitações de base têm por objetivo reproduzir as irregularidades da pista que geram perturbações no sistema, que devem ter seus efeitos minimizados pela suspensão ativa. O sistema de suspensão ativa está representado por uma força $u(z,t)$ que age no sistema minimizando os efeitos das irregularidades da pista sobre os passageiros.

Como foi comentado no Capítulo 5, no prosseguimento do trabalho, busca-se diretamente a representação do sistema no espaço de estados com base nas equações diferenciais de governo do sistema.

Adota-se, então, como vetor de estado o vetor \mathbf{z} composto pela variável z_s , que corresponde ao deslocamento vertical do corpo do veículo, e a variável dz_s/dt , que corresponde à velocidade vertical do corpo do veículo, a variável z_t , que corresponde ao deslocamento da massa não suspensa e a variável dz_t/dt , que corresponde à velocidade da massa não suspensa, conforme a EQ. 3.5. Desse modo, as equações diferenciais de governo do sistema são as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes dadas nas EQ. 3.1 e 3.2.

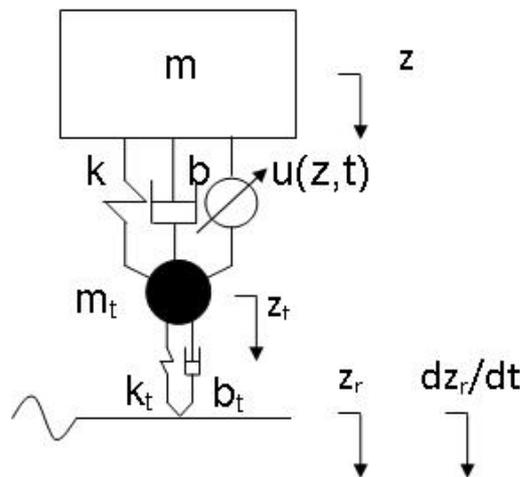


Figura 3.1: Modelo de 1/4 de carro com dois graus de liberdade e suspensão ativa.

$$m_s \frac{d^2 z_s}{dt^2} + b_s \left(\frac{dz_s}{dt} - \frac{dz_t}{dt} \right) + k_s (z_s - z_t) - u(z, t) = 0 \quad (3.1)$$

$$m_t \frac{d^2 z_t}{dt^2} - b_s \left(\frac{dz_s}{dt} - \frac{dz_t}{dt} \right) - k_s (z_s - z_t) + b_t \left(\frac{dz_t}{dt} - \frac{dz_r}{dt} \right) + k_t (z_t - z_r) + u(z, t) = 0 \quad (3.2)$$

Na EQ. 3.1, $u(z, t)$ é a força da suspensão ativa que é calculada utilizando-se um sistema de controle por realimentação de estado, conforme a EQ. 3.3, onde \mathbf{K} é a matriz de ganho de realimentação dada na EQ. 3.4. É admitido que todos os estados estejam disponíveis para realimentação e que o sistema de controle não é limitado, isto é, que ele é capaz de fornecer a entrada de controle requerida pelo sistema.

$$u = -\mathbf{K}z \quad (3.3)$$

$$\mathbf{K} = [K_{11} \quad K_{12} \quad K_{13} \quad K_{14}] \quad (3.4)$$

$$z = \left[z_s \quad \frac{dz_s}{dt} \quad z_t \quad \frac{dz_t}{dt} \right]^T \quad (3.5)$$

A partir das EQ. 3.1 e 3.2, pode-se obter a representação dos sistemas dimensionais (protótipo e modelo em escala) no espaço de estados na forma da equação 8.1, pelas matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} , dadas nas EQ. 3.6 a 3.9 abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_s/m_s & -b_s/m_s & k_s/m_s & b_s/m_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_s/m_t & b_s/m_t & (-k_s/m_t - k_t/m_t) & (-b_s/m_t - b_t/m_t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad (3.8)$$

$$D = [0] \quad (3.9)$$

Procedendo como no CAP. 3, parte-se para a adimensionalização das equações diferenciais para, a partir desse resultado, definir os parâmetros Π adimensionais.

Considerando-se as EQ. 3.1 e 3.2 e utilizando-se as parametrizações dadas pelas EQ. 3.1 a 3.8, procede-se à adimensionalização das diferenciais das equações 3.1 e 3.2, conforme as EQ. 3.11 a 3.18, o que resulta nas equações 3.10 e 3.11.

$$\begin{aligned} \frac{m_s \cdot z_{eqs}}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z_s^*}{dt^{*2}} + \frac{b_s \cdot z_{eqs}}{\tau} \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) + k_s \cdot z_{eqs} \cdot (z_s^* - z_t^*) \\ - K_{11} \cdot z_{eqs} \cdot z_s^* - K_{12} \cdot \frac{z_{eqs}}{\tau} \cdot \frac{dz_s^*}{dt^*} - K_{13} \cdot z_{eqs} \cdot z_t^* - K_{14} \cdot \frac{z_{eqs}}{\tau} \cdot \frac{dz_t^*}{dt^*} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m_t \cdot z_{eqs}}{\tau^2} \cdot \frac{d^2 z_t^*}{dt^{*2}} - \frac{b_s \cdot z_{eqs}}{\tau} \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) - k_s \cdot z_{eqs} \cdot (z_s^* - z_t^*) \\
& + \frac{b_t \cdot z_{eqs}}{\tau} \cdot \left(\frac{dz_t^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + k_t \cdot z_{eqs} \cdot (z_t^* - z_r^*) \\
& + K_{11} \cdot z_{eqs} \cdot z_s^* + K_{12} \cdot \frac{z_{eqs}}{\tau} \cdot \frac{dz_s^*}{dt^*} + K_{13} \cdot z_{eqs} \cdot z_t^* + K_{14} \cdot \frac{z_{eqs}}{\tau} \cdot \frac{dz_t^*}{dt^*} = 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

As equações 3.10 e 3.11 estão com as diferenciais adimensionalizadas, mas ainda têm dimensão de força por conta dos seus coeficientes. Dividindo as EQ. 3.10 e 3.11 pelo produto $m \cdot g$, para tornar as equações diferenciais adimensionais, estas tomam as formas das EQ. 3.12 e 3.13.

$$\begin{aligned}
& \frac{m_s \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau^2} \cdot \frac{d^2 z_s^*}{dt^{*2}} + \frac{b_s \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau} \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) + \frac{k_s \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g} \cdot (z_s^* - z_t^*) \\
& + \frac{K_{11} \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g} \cdot z_s^* + \frac{K_{12} \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau} \cdot \frac{dz_s^*}{dt^*} + \frac{K_{13} \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g} \cdot z_t^* + \frac{K_{14} \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau} \cdot \frac{dz_t^*}{dt^*} = 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m_t \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau^2} \cdot \frac{d^2 z_t^*}{dt^{*2}} - \frac{b_s \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau} \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) - \frac{k_s \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g} \cdot (z_s^* - z_t^*) \\
& + \frac{b_t \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau} \cdot \left(\frac{dz_t^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + \frac{k_t \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g} \cdot (z_t^* - z_r^*) \\
& - \frac{K_{11} \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g} \cdot z_s^* - \frac{K_{12} \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau} \cdot \frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{K_{13} \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g} \cdot z_t^* - \frac{K_{14} \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau} \cdot \frac{dz_t^*}{dt^*} = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\frac{K_{11} \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g} = K_{11}^* \tag{3.14}$$

$$\frac{K_{12} \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau} = K_{12}^* \quad (3.15)$$

$$\frac{K_{13} \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g} = K_{13}^* \quad (3.16)$$

$$\frac{K_{14} \cdot z_{eqs}}{m_s \cdot g \cdot \tau} = K_{14}^* \quad (3.17)$$

Neste ponto, definem-se os ganhos do sistema adimensional em malha fechada K_{11}^* , K_{12}^* , K_{13}^* e K_{14}^* nas equações 3.14 a 3.17.

Utilizando-se K_{11}^* , K_{12}^* , K_{13}^* e K_{14}^* definidos pelas equações 3.14 a 3.17, e dividindo-se as equações diferenciais 3.12 e 3.13 pelo coeficiente dos seus primeiros termos, estas equações se transformam nas equações 3.18 e 3.19, onde os parâmetros adimensionais Π_1 , Π_2 , Π_3 , Π_4 e Π_5 e os ganhos adimensionais K_{11}^* , K_{12}^* , K_{13}^* e K_{14}^* são dados pelas equações 3.14 a 3.17 e 3.20 a 3.24, respectivamente.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_s^*}{dt^{*2}} + \Pi_1 \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) + (z_s^* - z_t^*) \\ + K_{11}^* \cdot z_s^* + K_{12}^* \cdot \frac{dz_s^*}{dt^*} + K_{13}^* \cdot z_t^* + K_{14}^* \cdot \frac{dz_t^*}{dt^*} = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 z_t^*}{dt^{*2}} - \Pi_2 \cdot \left(\frac{dz_s^*}{dt^*} - \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) - \Pi_3 \cdot (z_s^* - z_t^*) \\
& + \Pi_4 \cdot \left(\frac{dz_t^*}{dt^*} - \frac{dz_r^*}{dt^*} \right) + \Pi_5 \cdot (z_t^* - z_r^*) = 0 \\
& - \frac{1}{\Pi_3} \cdot \left(+ K_{11}^* \cdot z_s^* + K_{12}^* \cdot \frac{dz_s^*}{dt^*} + K_{13}^* \cdot z_t^* + K_{14}^* \cdot \frac{dz_t^*}{dt^*} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\Pi_1 = \frac{b_s}{\sqrt{m_s \cdot k_s}} \tag{3.20}$$

$$\Pi_2 = b_s \cdot \sqrt{\frac{m_s}{m_t^2 \cdot k_s}} \tag{3.21}$$

$$\Pi_3 = \frac{m_s}{m_t} \tag{3.22}$$

$$\Pi_4 = b_t \cdot \sqrt{\frac{m_s}{m_t^2 \cdot k_s}} \tag{3.23}$$

$$\Pi_5 = \frac{k_t \cdot m_s}{k_s \cdot m_t} \tag{3.24}$$

À semelhança do que foi feito no Capítulo 5, a partir das equações 3.18 e 3.19, podem-se estabelecer as condições necessárias para que haja similaridade dinâmica completa entre o protótipo e o modelo em escala construídos segundo o modelo representado esquematicamente na FIG. 3.1:

- os sistemas devem ter as mesmas condições iniciais em posições z_{0s}^* e z_{0t}^* , e em velocidades dz_{0s}^*/dt^* e dz_{0t}^*/dt^* adimensionais;
- os sistemas devem ter as mesmas expressões para as excitações de base adimensionais z_r^* e dz_r^*/dt^* ;
- o valor dos parâmetros adimensionais deve ser o mesmo para os dois sistemas, o que é assegurado pela igualdade dos parâmetros Π para os dois sistemas.

Nas equações 3.18 e 3.19 figuram diversos parâmetros adimensionais que são os parâmetros Π e os parâmetros K_{ij}^* . Os parâmetros adimensionais Π estão associados diretamente à parte mecânica do sistema. Os parâmetros K_{ij}^* também são parâmetros Π adimensionais, que tiveram esta nomenclatura adotada simplesmente para enfatizar o fato de que estão associados à parte de controle do sistema, e, como parâmetros Π , também devem ser semelhantes no protótipo e no modelo em escala para que haja similaridade dinâmica completa.

Desta forma, à semelhança do apresentado no Capítulo 5, chega-se a um importante resultado que é a condição para que haja semelhança entre os sistemas de controle em malha fechada, uma vez que a semelhança dos sistemas em malha aberta (semelhança no aspecto da mecânica, associada aos parâmetros Π) já tenha sido obtida:

- o valor dos ganhos adimensionais em malha fechada (ganhos adimensionais K_{ij}^* para este sistema) devem ser os mesmos para os dois sistemas.

Assim, tem-se uma relação entre os ganhos dos sistemas de controle em malha fechada do protótipo e do modelo em escala, de modo que sejam dinamicamente semelhantes. Este resultado permite que seja definido o valor do ganho do sistema de controle do modelo em escala a ser construído para garantir a similaridade dinâmica completa entre os sistemas diretamente, independente da técnica usada para o estabelecimento do valor ideal de ganho do sistema de controle em malha fechada do protótipo (alocação de pólos, LQR ou outro).

APÊNDICE 4 – PARÂMETROS II DO VEÍCULO COM SETE GRAUS DE LIBERDADE

TAB. 4.1: Parâmetros da EQ. 7.41.

$\Pi_1 = \frac{k_{lf}}{k_{eq}}$	$\Pi_2 = \frac{k_{lf} \cdot l_{front}}{k_{eq} \cdot z_{eq}}$
$\Pi_3 = \frac{k_{lf} \cdot l_{left}}{k_{eq} \cdot z_{eq}}$	$\Pi_4 = \frac{b_{lf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}}$
$\Pi_5 = \frac{b_{lf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{front}}{z_{eq}}$	$\Pi_6 = \frac{b_{lf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{left}}{z_{eq}}$
$\Pi_7 = \frac{k_{rf}}{k_{eq}}$	$\Pi_8 = \frac{k_{rf} \cdot l_{front}}{k_{eq} \cdot z_{eq}}$
$\Pi_9 = \frac{k_{rf} \cdot l_{right}}{k_{eq} \cdot z_{eq}}$	$\Pi_{10} = \frac{b_{rf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}}$
$\Pi_{11} = \frac{b_{rf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{front}}{z_{eq}}$	$\Pi_{12} = \frac{b_{rf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{right}}{z_{eq}}$
$\Pi_{13} = \frac{k_{lr}}{k_{eq}}$	$\Pi_{14} = \frac{k_{lr} \cdot l_{rear}}{k_{eq} \cdot z_{eq}}$
$\Pi_{15} = \frac{k_{lr} \cdot l_{left}}{k_{eq} \cdot z_{eq}}$	$\Pi_{16} = \frac{b_{lr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}}$
$\Pi_{17} = \frac{b_{lr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{rear}}{z_{eq}}$	$\Pi_{18} = \frac{b_{lr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{left}}{z_{eq}}$
$\Pi_{19} = \frac{k_{rr}}{k_{eq}}$	$\Pi_{20} = \frac{k_{rr} \cdot l_{rear}}{k_{eq} \cdot z_{eq}}$
$\Pi_{21} = \frac{k_{rr} \cdot l_{right}}{k_{eq} \cdot z_{eq}}$	$\Pi_{22} = \frac{b_{rr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}}$
$\Pi_{23} = \frac{b_{rr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{rear}}{z_{eq}}$	$\Pi_{24} = \frac{b_{rr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{right}}{z_{eq}}$

TAB. 4.2: Parâmetros da EQ. 7.42.

$\Pi_{25} = \frac{1}{c_{teyz}} \cdot \frac{k_{lf}}{k_{eq}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{left}}{L_2^2}$	$\Pi_{26} = \frac{1}{c_{teyz}} \cdot \frac{k_{lf}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{front} \cdot l_{left}}{L_2^2}$
$\Pi_{27} = \frac{1}{c_{teyz}} \cdot \frac{k_{lf}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{left} \cdot l_{left}}{L_2^2}$	$\Pi_{28} = \frac{1}{c_{teyz}} \cdot \frac{b_{lf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{left}}{L_2^2}$
$\Pi_{29} = \frac{1}{c_{teyz}} \cdot \frac{b_{lf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{front} \cdot l_{left}}{L_2^2}$	$\Pi_{30} = \frac{1}{c_{teyz}} \cdot \frac{b_{lf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{left} \cdot l_{left}}{L_2^2}$

$\Pi_{31} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{k_{rf}}{k_{eq}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{right}}{L_2^2}$	$\Pi_{32} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{k_{rf}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{right} \cdot l_{front}}{L_2^2}$
$\Pi_{33} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{k_{rf}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{right} \cdot l_{right}}{L_2^2}$	$\Pi_{34} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{b_{rf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{right}}{L_2^2}$
$\Pi_{35} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{b_{rf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{front} \cdot l_{right}}{L_2^2}$	$\Pi_{36} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{b_{rf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{right} \cdot l_{right}}{L_2^2}$
$\Pi_{37} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{k_{lr}}{k_{eq}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{left}}{L_2^2}$	$\Pi_{38} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{k_{lr}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{rear} \cdot l_{left}}{L_2^2}$
$\Pi_{39} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{k_{lr}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{left} \cdot l_{left}}{L_2^2}$	$\Pi_{40} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{b_{lr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{left}}{L_2^2}$
$\Pi_{41} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{b_{lr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{rear} \cdot l_{left}}{L_2^2}$	$\Pi_{42} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{b_{lr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{left} \cdot l_{left}}{L_2^2}$
$\Pi_{43} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{k_{rr}}{k_{eq}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{right}}{L_2^2}$	$\Pi_{44} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{k_{rr}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{rear} \cdot l_{right}}{L_2^2}$
$\Pi_{45} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{k_{rr}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{right} \cdot l_{right}}{L_2^2}$	$\Pi_{46} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{b_{rr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{right}}{L_2^2}$
$\Pi_{47} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{b_{rr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{rear} \cdot l_{right}}{L_2^2}$	$\Pi_{48} = \frac{1}{cteyz} \cdot \frac{b_{rr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{right} \cdot l_{right}}{L_2^2}$

TAB. 4.3: Parâmetros da EQ. 7.43.

$\Pi_{49} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{k_{lf}}{k_{eq}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{front}}{L_1^2}$	$\Pi_{50} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{k_{lf}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{front} \cdot l_{front}}{L_1^2}$
$\Pi_{51} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{k_{lf}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{left} \cdot l_{front}}{L_1^2}$	$\Pi_{52} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{b_{lf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{front}}{L_1^2}$
$\Pi_{53} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{b_{lf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{front} \cdot l_{front}}{L_1^2}$	$\Pi_{54} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{b_{lf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{left} \cdot l_{front}}{L_1^2}$
$\Pi_{55} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{k_{rf}}{k_{eq}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{front}}{L_1^2}$	$\Pi_{56} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{k_{rf}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{front} \cdot l_{front}}{L_1^2}$
$\Pi_{57} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{k_{rf}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{right} \cdot l_{front}}{L_1^2}$	$\Pi_{58} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{b_{rf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{front}}{L_1^2}$
$\Pi_{59} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{b_{rf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{front} \cdot l_{front}}{L_1^2}$	$\Pi_{60} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{b_{rf}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{right} \cdot l_{front}}{L_1^2}$
$\Pi_{61} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{k_{lr}}{k_{eq}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{rear}}{L_1^2}$	$\Pi_{62} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{k_{lr}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{rear} \cdot l_{rear}}{L_1^2}$
$\Pi_{63} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{k_{lr}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{left} \cdot l_{rear}}{L_1^2}$	$\Pi_{64} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{b_{lr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{rear}}{L_1^2}$
$\Pi_{65} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{b_{lr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{rear} \cdot l_{rear}}{L_1^2}$	$\Pi_{66} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{b_{lr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{left} \cdot l_{rear}}{L_1^2}$

$\Pi_{67} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{k_{rr}}{k_{eq}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{rear}}{L_1^2}$	$\Pi_{68} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{k_{rr}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{rear} \cdot l_{rear}}{L_1^2}$
$\Pi_{69} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{k_{rr}}{k_{eq}} \cdot \frac{l_{right} \cdot l_{rear}}{L_1^2}$	$\Pi_{70} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{b_{rr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{z_{eq} \cdot l_{rear}}{L_1^2}$
$\Pi_{71} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{b_{rr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{rear} \cdot l_{rear}}{L_1^2}$	$\Pi_{72} = \frac{1}{ctexz} \cdot \frac{b_{rr}}{\sqrt{m \cdot k_{eq}}} \cdot \frac{l_{right} \cdot l_{rear}}{L_1^2}$

TAB. 4.4: Parâmetros da EQ. 7.44.

$\Pi_{73} = b_{lf} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirelf}^2}}$	$\Pi_{74} = \frac{b_{lf} \cdot l_{front}}{z_{eq}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirelf}^2}}$
$\Pi_{75} = \frac{b_{lf} \cdot l_{left}}{z_{eq}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirelf}^2}}$	$\Pi_{76} = \frac{k_{lf}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirelf}}$
$\Pi_{77} = \frac{k_{lf}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirelf}} \cdot \frac{l_{front}}{z_{eq}}$	$\Pi_{78} = \frac{k_{lf}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirelf}} \cdot \frac{l_{left}}{z_{eq}}$
$\Pi_{79} = b_{tirelf} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirelf}^2}}$	$\Pi_{80} = \frac{k_{tirelf}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirelf}}$

TAB. 4.5: Parâmetros da EQ. 7.45

$\Pi_{81} = b_{rf} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirerf}^2}}$	$\Pi_{82} = \frac{b_{rf} \cdot l_{front}}{z_{eq}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirerf}^2}}$
$\Pi_{83} = \frac{b_{rf} \cdot l_{right}}{z_{eq}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirerf}^2}}$	$\Pi_{84} = \frac{k_{rf}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirerf}}$
$\Pi_{85} = \frac{k_{rf}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirerf}} \cdot \frac{l_{front}}{z_{eq}}$	$\Pi_{86} = \frac{k_{rf}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirerf}} \cdot \frac{l_{right}}{z_{eq}}$
$\Pi_{87} = b_{tirerf} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirerf}^2}}$	$\Pi_{88} = \frac{k_{tirerf}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirerf}}$

TAB. 4.6: Parâmetros da EQ. 7.46.

$\Pi_{89} = b_{lr} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirelr}^2}}$	$\Pi_{90} = \frac{b_{lr} \cdot l_{rear}}{z_{eq}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirelr}^2}}$
$\Pi_{91} = \frac{b_{lr} \cdot l_{left}}{z_{eq}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirelr}^2}}$	$\Pi_{92} = \frac{k_{lr}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirelr}}$

$\Pi_{93} = \frac{k_{lr}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirelr}} \cdot \frac{l_{rear}}{z_{eq}}$	$\Pi_{94} = \frac{k_{lr}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirelr}} \cdot \frac{l_{left}}{z_{eq}}$
$\Pi_{95} = b_{tirelr} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirelr}^2}}$	$\Pi_{96} = \frac{k_{tirelr}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirelr}}$

TAB. 4.7: Parâmetros da EQ. 7.47.

$\Pi_{97} = b_{rr} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirerr}^2}}$	$\Pi_{98} = \frac{b_{lr} \cdot l_{rear}}{z_{eq}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirerr}^2}}$
$\Pi_{99} = \frac{b_{rr} \cdot l_{right}}{z_{eq}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirerr}^2}}$	$\Pi_{100} = \frac{k_{rr}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirerr}}$
$\Pi_{101} = \frac{k_{rr}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirerr}} \cdot \frac{l_{rear}}{z_{eq}}$	$\Pi_{102} = \frac{k_{rr}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirerr}} \cdot \frac{l_{right}}{z_{eq}}$
$\Pi_{103} = b_{tirerr} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq} \cdot m_{tirerr}^2}}$	$\Pi_{104} = \frac{k_{tirerr}}{k_{eq}} \cdot \frac{m}{m_{tirerr}}$

APÊNDICE 5 – ELEMENTOS DIFERENTES DE ZERO DAS MATRIZES DE ESTADO E ENTRADAS

TAB. 5.1: Elementos diferentes de zero das matrizes **A** e **B**.

$A_{12} = 1$	$A_{21} = -(\Pi_1 + \Pi_7 + \Pi_{13} + \Pi_{19})$
$A_{22} = -(\Pi_4 + \Pi_{10} + \Pi_{16} + \Pi_{22})$	$A_{23} = \Pi_6 - \Pi_{12} + \Pi_{18} - \Pi_{24}$
$A_{24} = \Pi_5 + \Pi_{11} - \Pi_{17} - \Pi_{23}$	$A_{25} = \Pi_3 - \Pi_9 + \Pi_{15} - \Pi_{21}$
$A_{26} = \Pi_2 + \Pi_8 - \Pi_{14} - \Pi_{20}$	$A_{27} = \Pi_1$
$A_{28} = \Pi_4$	$A_{29} = \Pi_7$
$A_{2,10} = \Pi_{10}$	$A_{2,11} = \Pi_{13}$
$A_{2,12} = \Pi_{16}$	$A_{2,13} = \Pi_{19}$
$A_{2,14} = \Pi_{22}$	$A_{3,1} = \Pi_{25} - \Pi_{31} + \Pi_{37} - \Pi_{43}$
$A_{3,2} = \Pi_{28} - \Pi_{34} + \Pi_{40} - \Pi_{46}$	$A_{3,3} = -(\Pi_{30} + \Pi_{36} + \Pi_{42} + \Pi_{48})$
$A_{3,4} = -\Pi_{29} + \Pi_{35} + \Pi_{41} - \Pi_{47}$	$A_{3,5} = -(\Pi_{27} + \Pi_{33} + \Pi_{39} + \Pi_{45})$
$A_{3,6} = -\Pi_{26} + \Pi_{32} + \Pi_{38} - \Pi_{44}$	$A_{3,7} = -\Pi_{25}$
$A_{3,8} = -\Pi_{28}$	$A_{3,9} = \Pi_{31}$
$A_{3,10} = \Pi_{34}$	$A_{3,11} = -\Pi_{37}$
$A_{3,12} = -\Pi_{40}$	$A_{3,13} = \Pi_{43}$
$A_{3,14} = \Pi_{46}$	$A_{4,1} = \Pi_{49} + \Pi_{55} - \Pi_{61} - \Pi_{67}$
$A_{4,2} = \Pi_{52} + \Pi_{58} - \Pi_{64} - \Pi_{70}$	$A_{4,3} = -\Pi_{54} + \Pi_{60} + \Pi_{66} - \Pi_{72}$
$A_{4,4} = -(\Pi_{53} + \Pi_{59} + \Pi_{65} + \Pi_{71})$	$A_{4,5} = -\Pi_{51} + \Pi_{57} + \Pi_{63} - \Pi_{69}$
$A_{4,6} = -(\Pi_{50} + \Pi_{56} + \Pi_{62} + \Pi_{68})$	$A_{4,7} = -\Pi_{49}$
$A_{4,8} = -\Pi_{52}$	$A_{4,9} = -\Pi_{55}$
$A_{4,10} = -\Pi_{58}$	$A_{4,11} = \Pi_{61}$
$A_{4,12} = \Pi_{64}$	$A_{4,13} = \Pi_{67}$
$A_{4,14} = \Pi_{70}$	$A_{5,3} = 1$
$A_{6,4} = 1$	$A_{7,8} = 1$
$A_{8,1} = \Pi_{76}$	$A_{8,2} = \Pi_{73}$
$A_{8,3} = -\Pi_{75}$	$A_{8,4} = -\Pi_{74}$

$A_{8,5} = -\Pi_{78}$	$A_{8,6} = -\Pi_{77}$
$A_{8,7} = -(\Pi_{76} + \Pi_{80})$	$A_{8,8} = -(\Pi_{73} + \Pi_{79})$
$A_{9,10} = 1$	$A_{10,1} = \Pi_{84}$
$A_{10,2} = \Pi_{81}$	$A_{10,3} = \Pi_{83}$
$A_{10,4} = -\Pi_{82}$	$A_{10,5} = \Pi_{86}$
$A_{10,6} = -\Pi_{85}$	$A_{10,9} = -(\Pi_{84} + \Pi_{88})$
$A_{10,10} = -(\Pi_{81} + \Pi_{87})$	$A_{11,12} = 1$
$A_{12,1} = \Pi_{92}$	$A_{12,2} = \Pi_{89}$
$A_{12,3} = -\Pi_{91}$	$A_{12,4} = \Pi_{90}$
$A_{12,5} = -\Pi_{94}$	$A_{12,6} = \Pi_{93}$
$A_{12,11} = -(\Pi_{92} + \Pi_{96})$	$A_{12,12} = -(\Pi_{89} + \Pi_{95})$
$A_{13,14} = 1$	$A_{14,1} = \Pi_{100}$
$A_{14,2} = \Pi_{97}$	$A_{14,3} = \Pi_{99}$
$A_{14,4} = \Pi_{98}$	$A_{14,5} = \Pi_{102}$
$A_{14,6} = \Pi_{101}$	$A_{14,13} = -(\Pi_{100} + \Pi_{104})$
$A_{14,14} = -(\Pi_{97} + \Pi_{103})$	$B_{8,1} = \Pi_{80}$
$B_{8,2} = \Pi_{79}$	$B_{10,3} = \Pi_{88}$
$B_{10,4} = \Pi_{87}$	$B_{12,5} = \Pi_{96}$
$B_{12,6} = \Pi_{95}$	$B_{14,7} = \Pi_{104}$
$B_{14,8} = \Pi_{103}$	