

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE
ARMAMENTO**

GABRIEL FERNANDEZ SANTOS

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA
TRANSIENTE EM TUBOS DE ARMAS**

**RIO DE JANEIRO
2022**

GABRIEL FERNANDEZ SANTOS

MODELAGEM E SIMULAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA
TRANSIENTE EM TUBOS DE ARMAS

Projeto Final de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica e de Armamento do Instituto Militar de Engenharia, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica e de Armamento.

Orientador(es): Francesco Scofano Neto, D.Sc.
Rodrigo Otávio de Castro Guedes, Ph.D.

Rio de Janeiro

2022

CIP - Catalogação na Publicação

Fernandez Santos, Gabriel
Modelagem e Simulação da Distribuição de
Temperatura Transiente em Tubos de Armas /
Gabriel Fernandez Santos. – Rio de Janeiro, 2022.
72 f.

Orientador: Francesco Scofano Neto.

Coorientador: Rodrigo Otávio de Castro Guedes.

Projeto Final de Curso (graduação) – Instituto
Militar de Engenharia, Bacharel em Engenharia
Mecânica e de Armamento, 2022.

1. Transferência de calor. 2. Temperatura. 3.
Autoignição. 4. Obuseiros. 5. Tubo de armamento.
I. Scofano Neto, Francesco, orient. II. Otávio de
Castro Guedes, Rodrigo, coorient. III. Título

GABRIEL FERNANDEZ SANTOS

**Modelagem e Simulação da Distribuição de Temperatura
Transiente em Tubos de Armas**

Projeto Final de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica e de Armamento do Instituto Militar de Engenharia, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica e de Armamento.

Orientador(es): Francesco Scofano Neto e Rodrigo Otávio de Castro Guedes.

Aprovado em Rio de Janeiro, **06** de outubro de 2022, pela seguinte banca examinadora:

Francesco Scofano Neto

Prof. Francesco Scofano Neto - D.Sc. do IME - Presidente

Bruna Rafaella Loiola

Prof. Bruna Rafaella Loiola - D.Sc. do IME

Rodrigo Otávio de Castro Guedes

Prof. Rodrigo Otávio de Castro Guedes - Ph.D. do IME

Rio de Janeiro

2022

*Este trabalho é dedicado à minha noiva Thainá, e aos meus pais Gilberto (in memoriam)
e Fátima.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por, todos os dias, estar ao meu lado e me dar forças para continuar na jornada de desenvolver este trabalho.

Agradeço aos meus pais, Fátima Soares Fernandez e Gilberto Silva Santos (*in memoriam*), os quais, desde antes de entrar para este Instituto, nunca deixaram de apoiar minhas decisões e sempre moveram montanhas por mim. Graças aos seus esforços, este trabalho pôde ser realizado.

Também dedico este agradecimento à minha noiva, Thainá Lucciola Hipólito de Lima, a qual, dia após dia, me viu batalhar neste projeto e constatemente me lembrou dos motivos pelos quais escolhi tal caminho. Sem a sua ajuda e dedicação ao nosso futuro, nada disso seria possível.

Sou grato ao meu orientador Francesco Scofano Neto por toda sua dedicação em me auxiliar ao longo de cada passo deste trabalho. Ademais, agradeço à Bruna Rafaella Loiola e ao Rodrigo Otávio de Castro Guedes pelo tempo e disponibilidade em me auxiliar sempre que os procurei.

Também agradeço aos professores Allan Moraes de Lira e Guilherme Machado Freitas pelo suporte nos momentos de dificuldade ao longo deste trabalho. Sem a ajuda dos senhores, muito deste projeto não seria possível.

Por fim, agradeço aos meus amigos por sempre me encorajarem a dar o meu máximo e por me auxiliarem a voltar ao caminho do sucesso, em momentos de cansaço e desânimo. Em especial, gostaria de agradecer aos meus companheiros de engenharia, pois sem eles, jamais seria capaz de alcançar este momento.

*“Uma gema não pode ser polida sem atrito,
nem um homem aperfeiçoado sem provações.”
(Sêneca)*

RESUMO

Em um projeto de armamento, a segurança do operador e seus auxiliares possui um papel importante em sua concepção. A omissão da influência das altas temperaturas nas munições e seus propelentes gerou, ao longo da história, diversos acidentes. Tendo em vista este contexto, o estudo sobre a taxa de transferência de calor no interior do tubo dos armamentos e sua distribuição de temperatura ao longo do tempo se tornaram itens necessários para o projeto de novas armas e munições, a fim de garantir a integridade da arma e a saúde de quem os opera. Com esta preocupação em mente, este trabalho tem por finalidade verificar a influência das propriedades termofísicas do material na quantidade de disparos que podem ser realizados até que a superfície interna do tubo da arma atinja a temperatura de autoignição do propelente da munição utilizada. Os estudos aqui apresentados aplicam metodologias numéricas para solução das equações diferenciais, como o método dos volumes de controle. Após a comparação das propriedades termofísicas constantes e variáveis, notou-se que a mudança da condutividade térmica com a temperatura não influenciou muito na temperatura na superfície interna do tubo. Todavia, considerando o calor específico dependente da temperatura, obteve-se valores mais baixos tanto para os picos de temperatura, quanto para os intervalos entre disparos, levando a um aumento no número de tiros que podem ser executados até atingir a temperatura de autoignição do propelente da munição.

Palavras-chave: transferência de calor. temperatura. autoignição. obuseiros. tubo de armamento.

ABSTRACT

In a weapons project, the safety of the operator and his assistants plays an important role in its conception. The omission of the influence of high temperatures in munitions and their propellants has generated, throughout history, several accidents. Given this context, the study of the heat transfer rate inside the tube of weapons and its temperature distribution over time have become necessary items for the design of new weapons and ammunition, in order to ensure the integrity of the weapon and the health of those who operate them. With this concern in mind, this work focus on verify the influence of the thermophysical properties of the material on the quantity of shots that can be fired until the internal surface of the gun tube reaches the auto-ignition temperature of the propellant of the ammunition used. The studies presented here apply numerical methodologies for solving differential equations, such as the method of control volumes. After comparing the constant and variable thermophysical properties, it was noted that the change in thermal conductivity with temperature did not influence much the temperature at the inner surface of the tube. However, considering the temperature-dependent specific heat, lower values were obtained both for temperature peaks and for the intervals between shots, leading to an increase in the number of shots that can be performed until the auto-ignition temperature of the ammunition propellant is reached.

Keywords: heat transfer. temperature. cook-off. howitzers. gun tube.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Munição de morteiro 120mm sendo autodisparada	15
Figura 2 – Elemento volumétrico diferencial em coordenadas cilíndricas	21
Figura 3 – Discretização do domínio da função em intervalos iguais	25
Figura 4 – Volume de controle definido ao redor de um nó arbitrário	26
Figura 5 – Cilindro oco representando uma seção reta do tubo de um armamento .	28
Figura 6 – Discretização do espaço para o problema em questão	29
Figura 7 – Variação das propriedades termofísicas do aço 4130 com a temperatura	33
Figura 8 – Temperatura da superfície interna do tubo para diferentes valores de β	34
Figura 9 – Gráfico de comparação entre a solução analítica e a implementação do problema em regime transiente para $x = 0$ [m]	37
Figura 10 – Campo de temperaturas ao longo da parede plana, para o tempo de 60 s	38
Figura 11 – Gráfico de comparação entre a solução analítica e a implementação do problema em regime transiente para $r = r_{int}$	39
Figura 12 – Campo de temperaturas ao longo da espessura do tubo, para o tempo de 60 s	40
Figura 13 – Erro entre as temperaturas no regime permanente e transiente	41
Figura 14 – Temperatura da superfície interna do tubo do armamento, com diferentes números de nós (a) e comparação com resultados de (SALAZAR, 2011), para $m = 300$ (b)	43
Figura 15 – Temperatura da superfície interna do tubo para diferentes quantidades de nós utilizados	44
Figura 16 – Variação dos parâmetros de $k(T)$ e $c_p(T)$	45
Figura 17 – Rajada de disparos para $c_p = 460$ e $k = 40$	46
Figura 18 – Rajada de disparos para $c_p = 460$ e $k(T) = 47,149(1 - 0,00025T)$. . .	48
Figura 19 – Rajada de disparos para as 4 possibilidades das propriedades termofísicas do material	50
Figura 20 – Influência das propriedades termofísicas nos intervalos entre disparos (a) e nos picos de temperatura (b)	51
Figura 21 – Comparação entre $c_p(T) = 400.3 + 0.43T$ e $c_p = 460$, mantendo $k = 40$	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados utilizados no problema	36
Tabela 2 – Comparação entre os valores calculados, para $x = 0$	37
Tabela 3 – Comparação entre os valores calculados, para $r = r_{int}$	40
Tabela 4 – Picos de temperatura para cada combinação de propriedades termofísicas (em graus Celsius)	45
Tabela 5 – Comparação entre a simulação de vários disparos e os resultados de (SALAZAR, 2011)	47
Tabela 6 – Comparação entre picos de temperatura entre condutividade térmica variável e constante	49
Tabela 7 – Picos de temperatura para diferentes combinações de $k(T)$ e $c_p(T)$	53
Tabela 8 – Quantidade de disparos para cada consideração sobre as características do material	55

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ONU	Organização das Nações Unidas
SAE	Society of Automotive Engineers
EDP	Equação diferencial parcial
FDM	Método das diferenças finitas
FEM	Método dos elementos finitos
FVM	Método dos volumes finitos
MATLAB	Matrix Laboratory [®]
ext	Externo
int	Interno
esq	Esquerda
dir	Direita
VC	Volume de controle
SC	Superfície de controle

LISTA DE SÍMBOLOS

q_x	Taxa de transferência de calor na direção x
q_0	Taxa de transferência de calor dos gases para o tubo, no instante inicial
t_0	Constante de tempo
r	Raio
k	Condutividade térmica do material
φ	Direção circunferencial
z	Direção normal
ρ	Massa específica do material
c_p	Calor específico à pressão constante do material
t	Tempo
g	Geração de energia interna
q''	Fluxo térmico
h	Coefficiente de convecção térmica
T_s	Temperatura da superfície de contato com o fluido
T_∞	Temperatura do fluido
$T_{ambiente}$	Temperatura ambiente
Δt	Passo de discretização do domínio do tempo
Δx	Passo de discretização do domínio do espaço, em coordenadas cartesianas
Δr	Passo de discretização do domínio do espaço, em coordenadas cilíndricas
k_0	Constante do coeficiente de condução térmica
β	Constante do coeficiente de condução térmica
$q(t)$	Fluxo térmico prescrito no interior do tubo do armamento
$f(x)$	Função genérica
$\Theta(\Delta x)$	Função erro sobre o truncamento da série de Taylor

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	MOTIVAÇÃO	15
1.2	OBJETIVOS	16
1.3	DISPOSIÇÃO DAS SEÇÕES	16
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1	O PROBLEMA DA CONDUÇÃO TÉRMICA EM TUBOS DE ARMAMENTOS	18
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
3.1	TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO	21
3.2	TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO	21
3.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO E CONDIÇÃO INICIAL	22
3.3.1	CONDIÇÃO INICIAL	22
3.3.2	CONDIÇÕES DE CONTORNO DE PRIMEIRA ESPÉCIE	22
3.3.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO DE SEGUNDA ESPÉCIE	23
3.3.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO DE TERCEIRA ESPÉCIE	23
3.4	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	23
3.5	MÉTODO DO VOLUME DE CONTROLE	25
4	MODELAGEM DO PROBLEMA	28
4.1	DETERMINAÇÃO DO PROBLEMA FÍSICO	28
4.2	DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA E INTRODUÇÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS	29
4.2.1	CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL COM A TEMPERATURA	29
4.2.2	CALOR ESPECÍFICO À PRESSÃO CONSTANTE VARIÁVEL COM A TEMPERATURA	32
5	RESULTADOS E ANÁLISES	33
5.1	CÁLCULO DAS EQUAÇÕES PARA VARIAÇÃO DAS PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS	33
5.2	COMPARAÇÃO E VALIDAÇÃO DA METODOLOGIA	35
5.2.1	PROBLEMA DA PAREDE PLANA	35
5.2.2	PROBLEMA DO CILINDRO OCO	38
5.3	CÁLCULO DO CAMPO DE TEMPERATURAS PARA UM DISPARO	41
5.3.1	CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL	42
5.3.2	CONSIDERAÇÃO DE TODAS AS PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS VARIÁVEIS	43
5.4	ANÁLISE DE VÁRIOS DISPAROS	45

5.4.1	VALIDAÇÃO DO MÉTODO	45
5.4.2	VARIAÇÃO DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA COM A TEMPERATURA	46
5.4.3	VARIAÇÃO DO CALOR ESPECÍFICO COM A TEMPERATURA	48
6	CONCLUSÃO	54
	REFERÊNCIAS	56
	ANEXO A – CÓDIGOS EM <i>MATLAB</i>	57
A.1	CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DO PROBLEMA DA PAREDE PLANA	57
A.2	CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DO PROBLEMA DO CILINDRO OCO	60
A.3	CÓDIGO PARA SIMULAR DIFERENTES QUANTIDADES DE NÓS	63
A.4	CÓDIGO PARA UM DISPARO E COMPARAÇÃO COM OS DADOS RETI- RADOS DE (SALAZAR, 2011)	67
A.5	CÓDIGO PARA RAJADA DE DISPAROS, VARIANDO AS PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS DO MATERIAL	70

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

A análise da transferência de calor nos projetos de armamentos se mostra cada vez mais relevante, tendo em vista as diferentes influências que este fenômeno pode causar na integridade da arma em questão. Dentre estas interferências, o risco de autoignição do projétil é um dos que mais causam acidentes com os usuários, principalmente com armamentos pesados e morteiros.

O portal eletrônico (MSIAC, 2011) é um projeto organizado pela Organização das Nações Unidas (ONU), fundado em 1991, o qual visa ajudar os países a eliminarem os incidentes causados por explosões de munições ou materiais explosivos e reduzirem os riscos às pessoas envolvidas e, em 2011, reportou diferentes acidentes envolvendo estes objetos, como no Paquistão e no Turcomenistão, onde, em ambos os locais, foram relatadas grandes detonações de propelentes devido às altas temperaturas do ambiente, que fizeram estes materiais iniciarem seus processos de queima.

Além disso, (MSIAC, 2011) também relata um acidente, ocorrido em 2011, nos Estados Unidos. Cientistas testaram disparos de tiros de morteiro com munições aquecidas a temperaturas específicas, até que a temperatura chegou ao ponto de autoignição. Ademais, um vídeo feito por militares americanos mostra um incidente ocorrido com um morteiro, em que é possível ver o projétil sendo auto-iniciado somente pela alta temperatura do tubo do armamento. A Figura 1 mostra o momento em que o projétil ejeta da peça de artilharia, e nela é possível notar o propelente do disparo sendo queimado no ar.



Figura 1 – Munição de morteiro 120mm sendo auto-disparada

Estes eventos resultam na importância do estudo e controle da temperatura ao redor de produtos inflamáveis, principalmente quando estão envolvidos armamentos, munições e

seus usuários.

Além disso, pode-se notar que, historicamente, os incidentes relacionados ao fenômeno do *cook-off* (autoignição) estão atrelados aos armamentos pesados e morteiros.

Diante disso, modelos físicos e matemáticos são desenvolvidos com o objetivo de modelar as taxas de transferência de calor e as temperaturas internas nos tubos dos armamentos pesados, para então conhecer os limites que estes equipamentos podem trabalhar, a fim de garantir a segurança dos operadores.

1.2 Objetivos

O seguinte trabalho baseia-se na teoria de transferência de calor em regime transiente e cálculo das temperaturas ao longo de um corpo cilíndrico e, tem por objetivos principais a avaliação o tubo do armamento após vários disparos, segundo uma determinada cadência de tiro, a fim de estimar o número máximo de disparos que é possível realizar até chegar no ponto de autoignição do propelente.

Ademais do citado acima, o presente trabalho procura ainda aplicar métodos numéricos para a solução do problema de transferência de calor no tubo de um armamento em *MATLAB*, para obtenção dos resultados e interpretação das considerações aplicadas.

1.3 Disposição das Seções

A Seção 2 contém uma revisão bibliográfica das principais fontes de consulta utilizadas ao longo do trabalho. As obras citadas abordam de diferentes formas a situação da taxa de transferência de calor ao longo do tubo de um armamento, procurando obter as temperaturas no interior do material. Além disso, algumas das citações buscam explanar de maneira extensiva as peculiaridades dos problemas de difusão de calor por condução.

Na Seção 3 são apresentadas as teorias por trás de todo o trabalho, abordando os princípios da transferência de calor em sólidos, bem como os fenômenos da balística interna ao longo do movimento do projétil na alma do tubo do armamento. Ademais, esta seção também aborda o método das diferenças finitas e o método dos volumes de controle, os quais serão utilizados em conjunto para a solução das equações diferenciais encontradas para a modelagem física do problema de transferência de calor abordado neste trabalho.

Ao longo da Seção 4, o problema principal deste trabalho é desenvolvido matematicamente, através da aplicação do método dos volumes de controle e das discretizações das derivadas por séries de Taylor truncadas, visando obter um conjunto de equações para calcular o campo de temperaturas em todo o domínio do espaço.

Na Seção 5 são apresentados os resultados gerados ao longo do trabalho, os quais

são analisados e explicados com o objetivo de melhor esclarecer as ideias por trás dos dados mostrados.

A Seção 6 avalia os resultados obtidos ao longo do trabalho e apresenta as conclusões do autor. Ademais, esta seção comenta sobre algumas sugestões de trabalhos futuros acerca do tema aqui abordado.

Por fim, o Anexo A contém os códigos desenvolvidos em *MATLAB* pelo autor, com o objetivo de realizar as simulações dos problemas aqui apresentados.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 O Problema da Condução Térmica em Tubos de Armamentos

(SALAZAR, 2011) busca desenvolver uma solução analítica para o problema de condução de calor em regime transiente em um tubo de armamento, segundo uma determinada cadência de tiro e condições de uso. Além disso, durante seu desenvolvimento, o autor também apresenta uma abordagem para o estudo do desgaste no interior dos tubos e, baseado nisso, encontra um determinado número de disparos máximo possíveis para garantir a segurança dos seus operadores e o funcionamento do armamento. (SALAZAR, 2011) realiza os cálculos matemáticos para a determinação de uma solução analítica para o resfriamento convectivo a ar do tubo, considerando as propriedades termofísicas do material constantes com a temperatura. Avaliado o campo de temperaturas, é possível então calcular o desgaste e obter a quantidade de disparos máxima dentro dos limites de segurança. Os resultados são então comparados com trabalhos anteriormente realizados no assunto, os quais utilizam métodos numéricos para solução da mesma situação, e constata-se que o procedimento analítico possui boa precisão nos valores obtidos. A grande contribuição de (SALAZAR, 2011) está atrelada ao desenvolvimento da solução analítica, uma vez que esta é de mais fácil utilização que os métodos numéricos já estabelecidos e empregados. Com as hipóteses simplificadoras de propriedades termofísicas constantes e com a precisão dos seus resultados, a dissertação de mestrado de (SALAZAR, 2011) apresenta uma solução simples de implementar, a qual servirá como base para o início do trabalho aqui desenvolvido.

Utilizando métodos numéricos computacionais, (MISHRA; HAMEED; LAWTON, 2010) perceberam que os trabalhos já desenvolvidos sobre o cálculo do campo de temperaturas no tubo de um armamento envolviam puramente a interação no interior do material. Portanto, seus estudos buscaram integrar os efeitos da balística interna do disparo do projétil com a taxa de transferência de calor dos gases produzidos para a parede interna do tubo. Um código foi desenvolvido para simular os fenômenos da balística interna e o calor transmitido, para então ser introduzido no problema de condução de calor, como uma condição de contorno do segundo tipo. Além disso, (MISHRA; HAMEED; LAWTON, 2010) utiliza a teoria de elementos finitos para discretizar a superfície do tubo e então calcular o campo de temperaturas ao longo do tempo, com condição de fluxo térmico prescrito na superfície interna, conforme a equação 2.1, a qual aproxima a taxa de transferência de calor dos gases para uma função exponencial. Os resultados do código e das simulações por elementos finitos foram comparados com dados experimentais coletados e pode-se que ambas as abordagens ao problema obtiveram alta proximidade com os valores reais

utilizados como base de comparação. (MISHRA; HAMEED; LAWTON, 2010) valida a utilização da equação 2.1 para o caso estudado, o que possibilita o uso da mesma para o problema que será estudado por este trabalho.

$$q_x = q_0 e^{-t/t_0} \quad (2.1)$$

O trabalho feito por (ISIK; GOKTAS, 2017) busca avaliar os efeitos do calor gerado pela queima do propelente de um projétil de pequeno calibre e rápido disparo, como é o caso do emprego da munição 7,62 mm. Através do software *ANSYS* para simular o comportamento térmico da câmara da arma utilizada nos experimentos realizados, os autores buscaram primeiro encontrar em qual ponto há a maior concentração de energia térmica absorvida pelo material do armamento, tendo em vista que este será o local de maior probabilidade de auto-iniciar o propelente do projétil. Após este passo, (ISIK; GOKTAS, 2017) realizam cálculos numéricos para as equações de transferência de calor por condução em duas coordenadas para determinar quantos disparos serão necessários para atingir o ponto de cook-off do propelente. O trabalho desenvolvido se diferencia dos demais já realizados por avaliar a influência da espessura do cartucho que envolve o propelente do projétil, e seus resultados mostram que esta variável pode influenciar consideravelmente a quantidade de disparos capazes de serem realizados até a temperatura de autoignição.

(GERBER; BUNDY, 1992) estuda a influência da variação da condutividade térmica e do calor específico à pressão constante do material do tubo do canhão 120 mm do carro de combate americano M1A1 e buscam determinar se esta interferência gera resultados diferentes daqueles já calculados considerando tais propriedades constantes. Após definir o problema de transferência de calor, os autores apresentam e utilizam a transformada de Kirchhoff como uma maneira de simplificar os cálculos e obter o campo de temperaturas da situação unidimensional proposta. Por fim, os dados obtidos mostram que a consideração da variação do coeficiente de condução térmica e do calor específico com a temperatura não apresentam diferenças significativas daqueles já calculados, utilizando estes valores constantes com a temperatura. Tendo em vista o teor da discussão feita por (GERBER; BUNDY, 1992) e seus resultados, este trabalho será utilizado como base para o desenvolvimento dos estudos aqui feitos.

(ABDULKAREEM, 2013) aborda o problema da condução de calor unidimensional em um tubo cilíndrico, em regime transiente, com condutividade térmica do material variando com a temperatura através da Equação 2.2, a qual ele afirma ser desenvolvida através de dados experimentais e busca encontrar uma solução analítica através da utilização da transformada de Kirchhoff para simplificar a equação diferencial parcial que rege a situação física. Além de toda a análise matemática feita para buscar a solução analítica aproximada, (ABDULKAREEM, 2013) também realiza comparações entre os

resultados oriundos das aproximações com àqueles obtidos do problema similar, porém com condutividade térmica constante. A principal contribuição do trabalho desenvolvido por (ABDULKAREEM, 2013) é a explicação e implementação da transformada de Kirchhoff no problema de coordenadas cilíndricas, o qual é semelhante à situação que aqui será estudada.

$$k(T) = a + bT^c \quad (2.2)$$

(HILL; CONNER, 2012) buscam estudar o fenômeno térmico no tubo de armamentos para determinar a espessura ótima para o cano da arma, de forma que sua vida útil seja alta, ao mesmo tempo que haja uma redução no peso total do armamento. Para atingir seus objetivos, os autores mesclam os fenômenos de balística interna ao problema de condução de calor unidimensional em regime transiente, com todas as propriedades termofísicas variando com a temperatura. Como condições de contorno, (HILL; CONNER, 2012) admite convecção natural em ambas as superfícies do tubo, além de radiação na superfície externa. Portanto, os autores apresentam uma maneira de calcular o valor do coeficiente de convecção térmica no interior da alma do tubo, em que leva em conta a balística interna do disparo. Como maior contribuição para este trabalho, (HILL; CONNER, 2012) afirma que um material muito comum para a fabricação do tubo de armamentos é o aço SAE 4130, e também apresenta informações de como as propriedades termofísicas deste material se comportam com a variação da temperatura. A partir destes dados, é possível determinar os parâmetros para linearizar a mudança da condutividade térmica, a qual será implementada neste trabalho.

(ÖZISIK et al., 2017) é um livro voltado para a aplicação dos métodos numéricos nos problemas de transferência de calor. Seus capítulos iniciais discutem os diferentes métodos de solução de problemas numéricos e, já no capítulo 5, apresenta soluções para problemas unidimensionais de transferência de calor em regime transiente, o qual é o foco do trabalho aqui desenvolvido. Dentro deste capítulo, (ÖZISIK et al., 2017) comenta sobre a estabilidade do método explícito e as vantagens e desvantagens dos métodos implícito e explícito, além de propor diferentes abordagens. Já no capítulo 7, os autores apresentam possíveis formas de lidar com problemas de transferência de calor em regime transiente com propriedades termofísicas variáveis com a temperatura do corpo, o que também é o foco do trabalho aqui realizado.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Transferência de Calor por Condução

O estudo da transferência de calor por condução se mostra relevante para mapear a temperatura em um local, a qual será resultado das condições impostas ao sistema e sua condição inicial. Por meio deste estudo, é possível verificar outros pontos importantes em um projeto, como o impacto das tensões térmicas na estrutura do meio, a dilatação promovida pelo aquecimento (ou resfriamento) do material (INCROPERA; DEWITT, 2003).

Dado que o problema que será tratado ao longo do trabalho será sobre um cilindro oco, é conveniente realizar os cálculos utilizando coordenadas cilíndricas. A Figura 2 ilustra o volume de controle diferencial utilizado.

Portanto, conservando a energia térmica no sistema, chega-se na equação 3.1.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

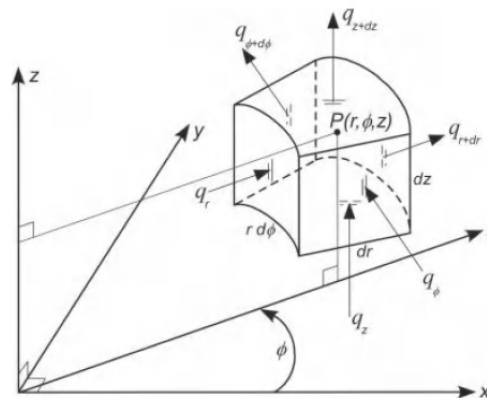


Figura 2 – Elemento volumétrico diferencial em coordenadas cilíndricas (HAHN; OZISIK, 2012)

3.2 Transferência de Calor por Convecção

Conforme (INCROPERA; DEWITT, 2003) apresenta, este tipo de transferência de calor está associado com o movimento das partículas de um fluido sobre uma superfície que possui uma temperatura diferente daquela no escoamento.

Dentro desta definição, existem diferentes formas de classificar a troca de calor por convecção, entretanto, a equação base para o fluxo de energia é denominada lei do resfriamento de Newton, e é definida como:

$$q'' = h(T_s - T_\infty) \quad (3.2)$$

Em que T_s e T_∞ são as temperaturas da superfície que está em contato com o fluido e do fluido, respectivamente, e h (W/m^2K) é o coeficiente de transferência de calor por convecção, também chamado de coeficiente de filme.

(HAHN; OZISIK, 2012) pontua que os problemas de convecção estão associados com o cálculo do coeficiente h , o qual é dependente de muitos fatores, como o tipo de escoamento, a geometria da superfície que o fluido interage, dentre outros.

3.3 Condições de Contorno e Condição Inicial

Uma equação diferencial parcial, como a Equação 3.1, necessita condições de contorno para a solução no domínio do espaço, além de uma condição inicial, para a solução no domínio do tempo. Desta forma, existem diferentes maneiras de definir tais requisitos, dependendo do problema físico em análise.

3.3.1 Condição Inicial

Para o domínio do tempo, é comum definir que todos os pontos do espaço estão dispostos a mesma temperatura, equivalente a temperatura do ambiente. Matematicamente, a Equação 3.3 representa esta definição.

$$T(r, 0) = T_{ambiente} \quad (3.3)$$

3.3.2 Condições de Contorno de Primeira Espécie

Para este tipo de condição, considera-se que a temperatura na extremidade do domínio é constante, independente do tempo. Desta forma, tem-se:

$$T(r_i, t) = T_i, \text{ para } r = r_i \quad (3.4)$$

$$T(r_e, t) = T_e, \text{ para } r = r_e \quad (3.5)$$

3.3.3 Condições de Contorno de Segunda Espécie

As condições de contorno de segunda espécie são para problemas em que há uma fonte de fluxo térmico nas extremidades do domínio do espaço.

Utilizando a equação de Fourier para troca de calor por condução térmica, tem-se:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = q_i, \text{ para } r = r_i \quad (3.6)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} = q_e, \text{ para } r = r_e \quad (3.7)$$

3.3.4 Condições de Contorno de Terceira Espécie

Considerando que há troca de calor por convecção entre o ambiente e as extremidades do corpo sendo estudado, pode-se definir estas condições de contorno através da composição da equação de resfriamento de Newton (Equação 3.2) com as condições de contorno de segunda espécie.

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h_i(T_{i,ambiente} - T(r_i, t)), \text{ para } r = r_i \quad (3.8)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} = h_e(T_{e,ambiente} - T(r_e, t)), \text{ para } r = r_e \quad (3.9)$$

3.4 Método das Diferenças Finitas

Como (ÖZISIK et al., 2017) apresenta, os métodos numéricos são ótimas ferramentas para problemas de transferência de calor ou qualquer outro fenômeno físico que envolva equações diferenciais parciais, uma vez que suas soluções normalmente não podem ser encontradas de forma analítica, devido à não-linearidades na formulação, geometrias complexas ou condições de contorno complexas.

O desenvolvimento tecnológico e o aumento do poder computacional proporcionaram a aplicação dos métodos numéricos de forma mais ágil e simples, possibilitando a solução de problemas complexos nos mais diversos campos da ciência e da engenharia.

Atualmente, para solucionar problemas de transferência de calor, existem três métodos que são aplicados: o método das diferenças finitas (*finite difference method (FDM)*), o método dos elementos finitos (*finite-element method (FEM)*) e o método dos volumes finitos (*finite volume method (FVM)*). Conforme (ÖZISIK et al., 2017) pontua, o método FDM é indicado para problemas com geometria simples, como é o caso do tubo de um armamento. Além disso, o FDM possui uma metodologia simples, o que favorece o entendimento e a aplicação em programas de computador.

Como (APOSTOL, 1967) apresenta, supondo que uma função f possua uma quantidade indefinida de derivadas dentro de um intervalo no entorno de um ponto a , pode-se então definir esta função da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (3.10)$$

A Equação 3.10 é chamada de expansão em série de Taylor da função $f(x)$ em torno do ponto a . Além disso, (APOSTOL, 1967) também mostra as condições para a convergência desta série e quando que uma função pode ser descrita utilizando tal aproximação.

Como se pode perceber, a série de Taylor se trata de uma soma infinita de termos, entretanto, análises numéricas trabalham com valores finitos de pontos. Portanto, faz-se necessário o truncamento do somatório, o que atrela junto ao resultado obtido, um erro.

Dado que expansão em série de Taylor utiliza as derivadas da função para aproximá-la em um ponto, pode-se então, por simples algebrismo, calcular as derivadas de uma função através de sua expansão. Para tal, basta definir a acurácia desejada e truncar a série de Taylor no ponto em que seu erro for tão baixo quanto se queira.

Considerando a expansão da função $f(x)$ para frente e para trás em Δx , no entorno de um ponto x_0 , tem-se:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots \\ f(x_0 - \Delta x) &= f(x_0) - \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \dots \end{aligned}$$

Truncando ambas as equações após o termo de primeira derivada e os isolando, encontra-se:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \Theta(\Delta x) \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + \Theta(\Delta x) \quad (3.12)$$

Em que, as Equações 3.11 e 3.12 representam as derivadas de primeira ordem da função $f(x)$, no ponto $x = x_0$, para frente e para trás de Δx . Além disso, $\Theta(\Delta x)$ representa o erro do truncamento realizado na série infinita.

Para reduzir o erro atrelado a estas aproximações, utiliza-se o método da diferença central, representado pela Equação 3.13. Tal formulação é definida através da subtração das duas equações encontradas acima.

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} + [\Theta(\Delta x)]^2 \quad (3.13)$$

Considerando a discretização no domínio da função em diferentes intervalos iguais, separados por Δx , conforme ilustra a Figura 3, adotar-se-á a notação de $i + 1$ para $x_0 + \Delta x$ e $i - 1$ para $x_0 - \Delta x$, conforme mostra a Equação 3.14.

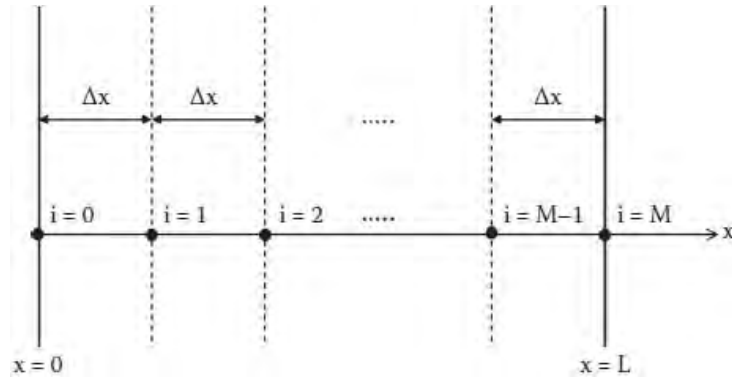


Figura 3 – Discretização do domínio da função em intervalos iguais (ÖZISIK et al., 2017)

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + [\Theta(\Delta x)]^2 \quad (3.14)$$

Extrapolando as ideias aqui apresentadas sobre o cálculo da primeira derivada de uma função para a sua segunda derivada, (ÖZISIK et al., 2017) apresenta a formulação utilizando o método da diferença central, através da Equação 3.15

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{(\Delta x)^2} + [\Theta(\Delta x)]^2 \quad (3.15)$$

3.5 Método do Volume de Controle

Como visto anteriormente, o método das diferenças finitas se resume na utilização da expansão em série de Taylor para discretizar a equação de difusão térmica. Portanto, trata-se apenas de uma abordagem matemática ao problema.

Buscando um viés físico para discretizar a equação diferencial 3.1, existe o método de volume de controle, o qual utiliza a conservação de energia sobre uma pequena porção ao redor de um nó do domínio do espaço.

Considerando o problema de difusão térmica em regime transiente, sem geração de energia interna, em coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\rho c_p \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \quad (3.16)$$

Integrando a Equação 3.16 em todo o volume de controle e utilizando o teorema de Gaus, que apresenta uma relação entre a integral em um volume de controle com a integral da superfície dele, conforme mostra a Equação 3.18, chega-se na Equação 3.19.

$$\int_{VC} \rho c_p \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dV = - \int_{VC} \nabla \cdot \mathbf{q}(r, t) dV \quad (3.17)$$

$$\int_{VC} \nabla q dV = \int_{SC} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.18)$$

$$\int_{VC} \rho c_p \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dV = - \int_{SC} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.19)$$

Aplicando a lei de Fourier, a qual calcula o calor trocado por condução no interior do volume de controle, conforme a Equação 3.20, e integrando, chega-se na Equação 3.21 para o cálculo do campo de temperaturas em um problema de regime transiente.

$$\mathbf{q}(r, t) = -k \nabla T(r, t) \quad (3.20)$$

$$V \rho c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \int k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (3.21)$$

Em que, V é o volume da região definida ao redor do ponto da malha gerada, $\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$ é a variação temporal da temperatura média ao redor do nó avaliado, e n é o vetor unitário normal à área da superfície do volume de controle. Ademais, todos os termos destacados em negrito ao longo das equações acima são vetores.

Vale ressaltar que a Equação 3.21 representa a conservação de energia no volume de controle definido. Sabendo que a o fluxo de calor entre regiões diferentes também é conservativo, então a solução deste problema garante a preservação global de energia no sistema (ÖZISIK et al., 2017). A Figura 4 exemplifica um corpo unidimensional discretizado, com um volume de controle definido ao redor de um nó arbitrário.

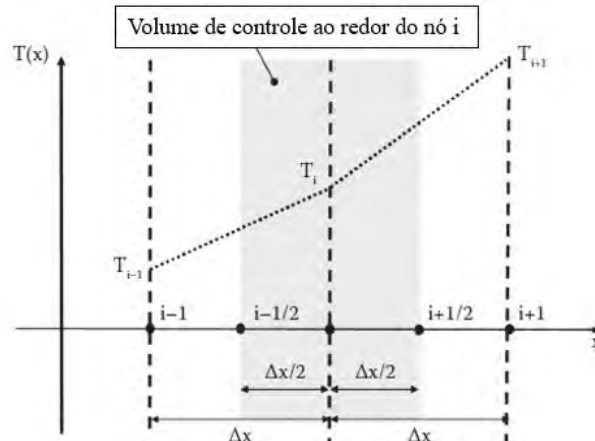


Figura 4 – Volume de controle definido ao redor de um nó arbitrário (ÖZISIK et al., 2017)

Por fim, para a solução da equação encontrada, basta aplicar os conceitos vistos anteriormente de discretização de derivadas, para então aplicar métodos numéricos e encontrar o campo de temperaturas desejado.

Conforme já mencionado, existem diferentes maneiras de discretizar a derivada de uma função, seja pelas equações 3.11 ou 3.12, no caso de derivadas de primeira ordem. Para o presente trabalho, será utilizado o método explícito de solução de equações diferenciais.

Este método utiliza o método das diferenças centrais para as derivadas no domínio do espaço, e, em contra partida, emprega a metodologia das derivadas para frente no domínio do tempo. Desta forma, a equação final gerada possibilita uma solução de simples implementação computacional (ÖZISIK et al., 2017).

Todavia, esta combinação de maneiras de calcular as derivadas no tempo e no espaço gera um problema de estabilidade. Através de uma análise matemática sobre o problema, nota-se que os principais parâmetros que definem a equação da difusão térmica em regime transiente deve seguir a relação 3.22 para garantir que a solução seja estável.

$$0 < \frac{k\Delta t}{\rho c_p (\Delta r)^2} < \frac{1}{2} \quad (3.22)$$

Ademais, como o problema a ser abordado neste trabalho possui uma condição de contorno de convecção com o ar ambiente, será necessário ainda cumprir com a relação 3.23, a qual é o critério de estabilidade para este tipo de condição de contorno.

$$0 < \frac{k\Delta t}{\rho c_p (\Delta r)^2} < \frac{1}{2[1 + (1 + \frac{1}{2N})\frac{\Delta r h_0}{k}]} \quad (3.23)$$

Em que h_0 é o coeficiente de convecção térmica do ar e N é o número de divisões da malha, no domínio do espaço. Vale ressaltar que, para simulações numéricas, estes critérios de estabilidade devem ser verificados a cada iteração, a fim de garantir que o problema está sendo atendido e convergirá.

4 MODELAGEM DO PROBLEMA

4.1 Determinação do Problema Físico

O problema de transferência de calor ao longo do tubo do armamento, cuja condutividade térmica varia com a temperatura conforme a Equação 4.1, pode ser resumido ao estudo do campo de temperaturas em um disco, cujos raios interno e externo são r_i e r_e respectivamente, com um fluxo térmico imposto pelo calor oriundo dos gases gerados pela explosão do propelente do projétil no interior do tubo e um resfriamento por convecção natural na superfície externa do tubo. Ademais, como condição inicial do problema, considera-se que todos os pontos do material estão a mesma temperatura, a qual equivale a temperatura do ambiente.

$$k(T) = k_0[1 + \beta T(r, t)] \quad (4.1)$$

Além disso, no passo seguinte do trabalho, o calor específico à pressão constante será considerado como variável com a temperatura, seguindo a Equação 4.2, em que a e c são valores constantes, que dependem apenas do material que é feito o tubo do armamento, porém as condições de contorno e a condição inicial serão as mesmas.

$$c_p(T) = c + aT \quad (4.2)$$

Conforme a Figura 5 ilustra, o tubo de um armamento pode ser resumido como um cilindro oco, de raio interno r_i e raio externo r_o , e as Equações 4.3, 4.4 e 4.5 apresentam a definição matemática para a situação.

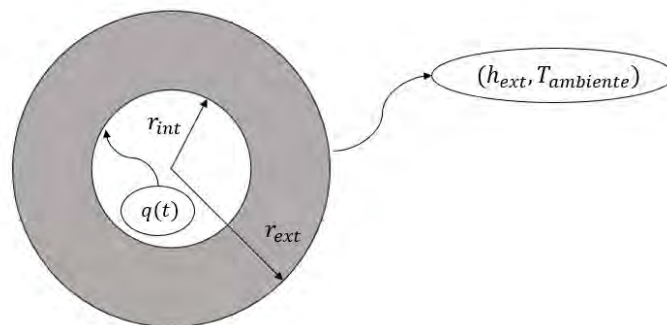


Figura 5 – Cilindro oco representando uma seção reta do tubo de um armamento

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho c_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\text{Condições de Contorno: } \begin{cases} -k \frac{\partial T}{\partial r} = q(t); & \text{para } r = r_{int} \\ -k \frac{\partial T}{\partial r} = h_{ext}[T(r_{ext}, t) - T_{ambiente}]; & \text{para } r = r_{ext} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\text{Condição Inicial: } \begin{cases} T(r, 0) = T_{ambiente} \end{cases} \quad (4.5)$$

Em que $r \in \mathfrak{R}$; $r_{int} \leq r \leq r_{ext}$ é o domínio da função $T(r, t)$ no espaço, e $t \in \mathfrak{R}$; $t \geq 0$ no tempo. Além disso, a função $q(t)$ representada na Equação 4.4 trata-se de um fluxo térmico prescrito descrito pela Equação 2.1 (MISHRA; HAMEED; LAWTON, 2010).

4.2 Discretização do Problema e Introdução dos Métodos Numéricos

4.2.1 Condutividade Térmica Variável com a Temperatura

O primeiro passo deve ser a discretização do domínio do espaço em pontos igualmente espaçados de Δr , conforme mostra a Figura 6, de tal forma que $r_{int} \leq r_i \leq r_{ext}$, em que o subíndice i representa a localização do ponto no espaço, variando do raio interno (r_{int}) para o raio externo (r_{ext}).

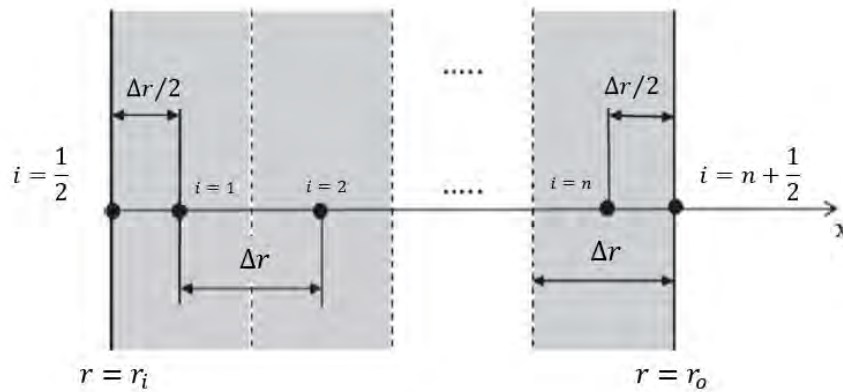


Figura 6 – Discretização do espaço para o problema em questão (ÖZISIK et al., 2017)

Aplicando o método dos volumes finitos na Equação 4.3 para os pontos internos no espaço, ou seja, para $r_{int} + \frac{\Delta r}{2} \leq r_i \leq r_{ext} - \frac{\Delta r}{2}$, tem-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) r dr dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r dr dt \quad (4.6)$$

Avaliando separadamente cada um dos lados da igualdade acima, tem-se, para o lado esquerdo:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(k(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} dt$$

$$\left(\left[k(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r_{i+\frac{1}{2}}} - \left[k(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r_{i-\frac{1}{2}}} \right) (t + \Delta t - t)$$

Como será empregado o método explícito, então tem-se:

$$\begin{cases} \left[k(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r_{i+\frac{1}{2}}} = k_{r_{i+\frac{1}{2}}}^t r_{r_{i+\frac{1}{2}}} \frac{(T_{r_{i+1}} - T_{r_i})}{\Delta r} \\ \left[k(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r_{i-\frac{1}{2}}} = k_{r_{i-\frac{1}{2}}}^t r_{r_{i-\frac{1}{2}}} \frac{(T_{r_i} - T_{r_{i-1}})}{\Delta r} \end{cases} \quad (4.7)$$

Logo, tem-se:

$$\left[k_{r_{i+\frac{1}{2}}}^t r_{r_{i+\frac{1}{2}}} T_{r_{i+1}}^t - (k_{r_{i+\frac{1}{2}}}^t r_{r_{i+\frac{1}{2}}} + k_{r_{i-\frac{1}{2}}}^t r_{r_{i-\frac{1}{2}}}) T_{r_i}^t + k_{r_{i-\frac{1}{2}}}^t r_{r_{i-\frac{1}{2}}} T_{r_{i-1}}^t \right] \frac{\Delta t}{\Delta r} \quad (4.8)$$

Avaliando o lado direito da Equação 4.6, considerando um volume de controle infinitesimal, tem-se:

$$\rho c_p r_i \Delta r \Delta t \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\rho c_p r_i \Delta r (T_i^{t+\Delta t} - T_i^t) \quad (4.9)$$

Logo, substituindo as Equações 4.8 e 4.9 em 4.6, tem-se a equação geral para o cálculo do campo de temperaturas no interior do domínio do espaço desejado, conforme indicada abaixo:

$$T_i^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t \left[k_{r_{i+\frac{1}{2}}}^t r_{r_{i+\frac{1}{2}}} T_{r_{i+1}}^t - (k_{r_{i+\frac{1}{2}}}^t r_{r_{i+\frac{1}{2}}} + k_{r_{i-\frac{1}{2}}}^t r_{r_{i-\frac{1}{2}}}) T_{r_i}^t + k_{r_{i-\frac{1}{2}}}^t r_{r_{i-\frac{1}{2}}} T_{r_{i-1}}^t \right]}{\rho c_p r_i \Delta r^2} + T_i^t \quad (4.10)$$

Como mencionado anteriormente, estas equações são aplicáveis apenas para pontos no interior do corpo. Portanto, para cada condição de contorno adotada, novas equações devem ser encontradas para completar o sistema e determinar a temperatura em cada um dos pontos.

Como o problema em questão possui uma condição de contorno do segundo tipo e outra do terceiro tipo, deve-se avaliar cada uma delas de maneira separada.

Para a superfície interna do tubo, a condição de contorno é do segundo tipo. Conforme a Figura 6, para a discretização deste ponto, deve-se utilizar o método de diferenças finitas para frente, logo, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\left[k(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{\frac{3}{2}} - \left[k(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{\frac{1}{2}} \right) \Delta t = \rho c_p r_1 \Delta r (T_1^{t+\Delta t} - T_1^t) \\ - \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{\frac{1}{2}} = q(t) \\ \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{\frac{1}{2}} = \frac{T_{\frac{1}{2}} - T_1}{\frac{\Delta r}{2}} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Utilizando as equações acima, pode-se encontrar expressões para o cálculo da temperatura na superfície interna do tubo do armamento, caracterizada por $T_{\frac{1}{2}}$, e também para o cálculo da temperatura T_1 , conforme é apresentado abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1^{t+\Delta t} = \Delta t \frac{k_{\frac{3}{2}}^t r_{\frac{3}{2}} T_2^t - k_{\frac{3}{2}}^t r_{\frac{3}{2}} T_1^t + r_{\frac{1}{2}} \Delta r q(t)}{\rho c_p \Delta r^2 r_1} + T_1^t \\ T_{\frac{1}{2}}^t = T_1^t + \frac{q(t) \Delta r}{2k_{\frac{1}{2}}^t} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Ao avaliar a superfície externa da alma do tubo, nota-se que a condição de contorno é de terceira espécie. Para esta extremidade, deve-se utilizar o método das diferenças finitas para frente, logo, encontra-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\left[k(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{m+\frac{1}{2}} - \left[k(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{m-\frac{1}{2}} \right) \Delta t = \rho c_p r_m \Delta r (T_m^{t+\Delta t} - T_m^t) \\ - \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{m+\frac{1}{2}} = h_{ext} [T_{m+\frac{1}{2}} - T_{ambiente}] \\ \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{m+\frac{1}{2}} = \frac{T_m - T_{m-1}}{\frac{\Delta r}{2}} \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Através de manipulações matemáticas, pode-se determinar as equações necessárias para o cálculo das temperaturas da superfície externa e para T_m :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_m^{t+\Delta t} = \Delta t \frac{-r_{m+\frac{1}{2}} \Delta r h_{ext} T_{m+\frac{1}{2}}^t - k_{m-\frac{1}{2}}^t r_{m-\frac{1}{2}} T_m^t + r_{m-\frac{1}{2}} k_{m-\frac{1}{2}}^t T_{m-1}^t + r_{m+\frac{1}{2}} \Delta r h_{ext} T_{ambiente}}{\rho c_p \Delta r^2 r_m} + T_m^t \\ T_{m+\frac{1}{2}}^t = \frac{h_{ext} T_{ambiente} \Delta r + 2k_{m+\frac{1}{2}}^t T_m^t}{h_{ext} \Delta r + 2k_{m+\frac{1}{2}}^t} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Portanto, através da Equação 4.10, para os pontos $2 \leq i \leq m - 1$, e das Equações 4.12 e 4.14 para as extremidades do corpo e seus nós adjacentes, o problema de condução de calor estudado está completamente definido e pronto para ser implementado no programa de computador MATLAB.

4.2.2 Calor Específico à Pressão Constante Variável com a Temperatura

Utilizando a mesma modelagem feita acima, agora considerando que ambas as propriedades termofísicas do material variam com a temperatura, de forma linear, o lado esquerdo da Equação 4.8 se manterá inalterado. Todavia, o lado direito da equação será alterado.

Considerando um volume de controle infinitesimal, tão pequeno como se queira, tem-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \rho c_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} r dr dt = \rho c_p(T) r_i \Delta r \Delta t \frac{(T_i^{t+\Delta t} - T_i^t)}{\Delta t} \quad (4.15)$$

Logo, o lado direito se tornará a equação abaixo. Nota-se que a única diferença real na situação será a implementação da variação do calor específico, conforme a Equação 4.2. Portanto, todas as equações para implementação numérica já desenvolvidas na seção anterior se aplicam para este novo caso.

$$\rho c_p(T) r_i \Delta r (T_i^{t+\Delta t} - T_i^t) \quad (4.16)$$

5 RESULTADOS E ANÁLISES

5.1 Cálculo das Equações para Variação das Propriedades Termofísicas

Como (HILL; CONNER, 2012) afirmam, o aço SAE 4130 é o material mais utilizado, na indústria bélica, para fabricação dos tubos de armamentos, sejam eles leves ou pesados. Desta forma, os autores apresentam o Gráfico 7 que ilustra a dependência da condutividade térmica e do calor específico deste material com a temperatura.

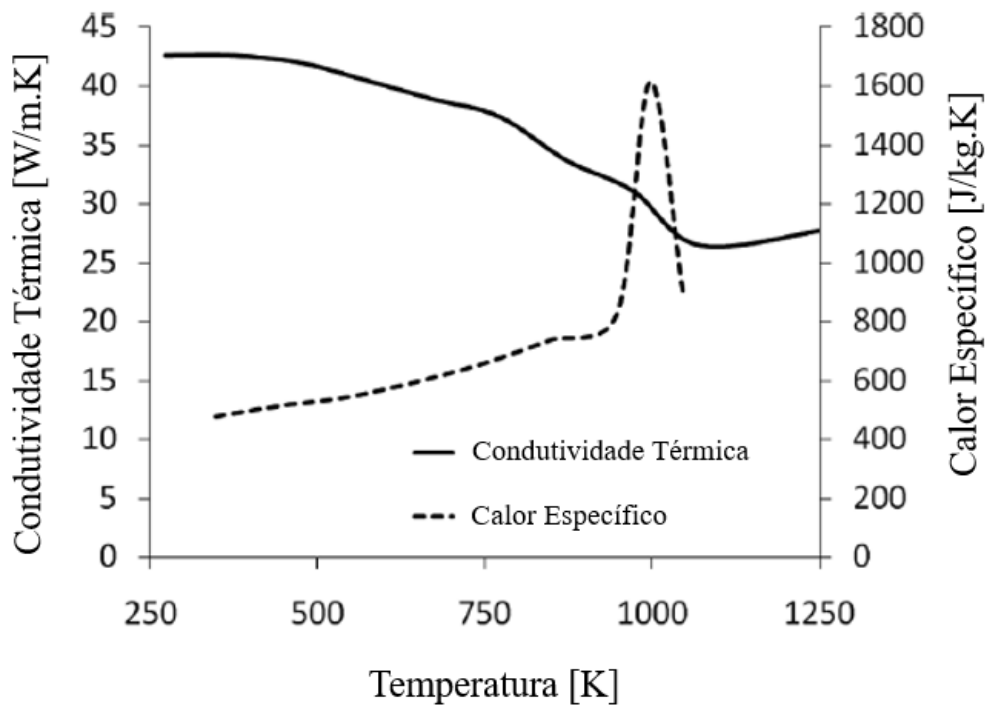


Figura 7 – Variação das propriedades termofísicas do aço 4130 com a temperatura (HILL; CONNER, 2012)

Como se pode perceber, o comportamento destas propriedades termofísicas se aproxima de uma reta, dentro do intervalo de $250K$ à $1000K$. Desta forma, é possível aproximar estes dados por uma regressão linear e encontrar a equação da reta que melhor descreve tal comportamento. As Equações 5.1 apresentam o resultado de tal estudo.

$$\begin{cases} k(T) = 47,149(1 - 0,00025T) \\ c_p(T) = 400,27 + 0,4294T \end{cases} \quad (5.1)$$

Nota-se que, para a condutividade térmica, o valor do termo que multiplica a temperatura (β) é muito baixo, o que diminui muito o efeito da variação da temperatura nesta propriedade. Desta forma, através da simulação do problema do tubo do armamento com calor interno e convecção natural com o ar ambiente, diferentes valores de β foram testados para verificar como a temperatura na superfície interna do tubo do armamento se comporta. A Figura 8 mostra tal resultado.

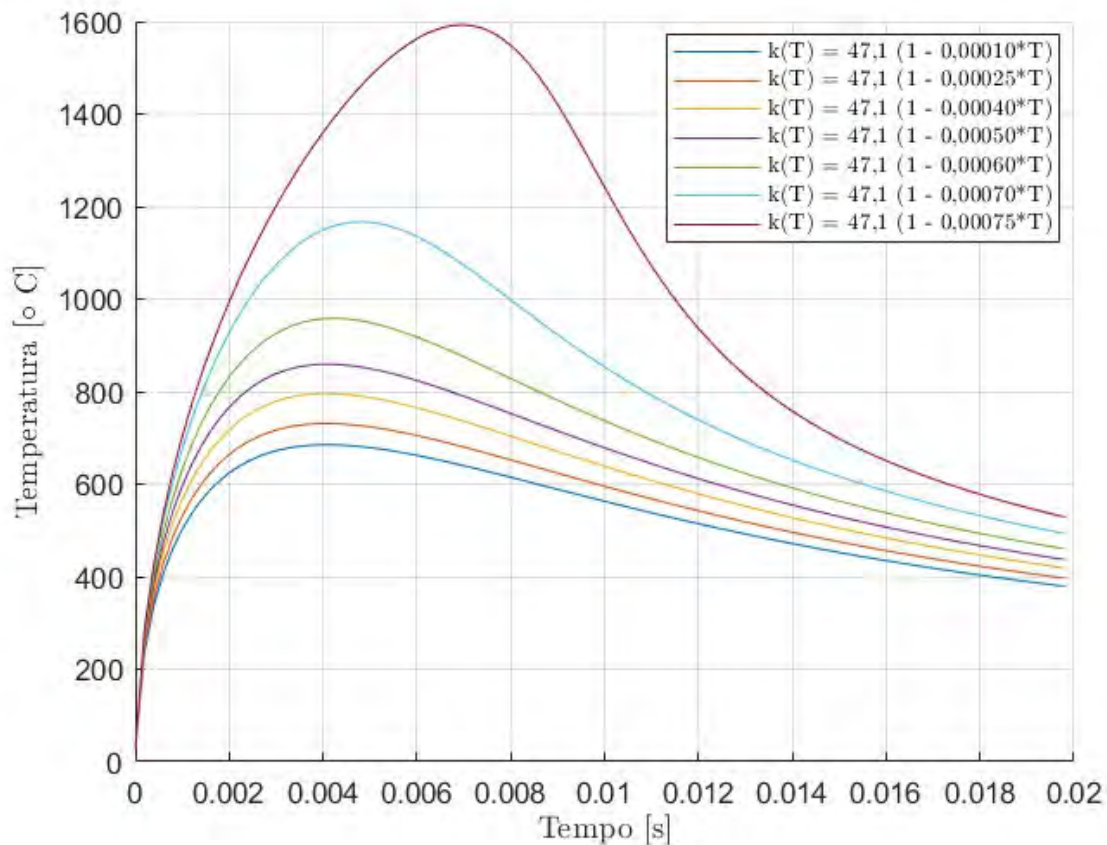


Figura 8 – Temperatura da superfície interna do tubo para diferentes valores de β

Como se pode perceber, quanto maior o valor de β , maior é o pico de temperatura que se obtém. Este fenômeno acontece uma vez que, conforme maior o termo dependente da temperatura, menor o valor da condutividade térmica, o que aproxima cada vez mais a superfície interna do tubo para um isolante térmico, o qual retém toda a energia térmica logo na primeira interação com o fluxo de calor, o que resulta em temperaturas muito elevadas.

5.2 Comparação e Validação da Metodologia

Antes de abordar o problema final do trabalho, foram realizados diferentes testes com problemas mais simples, a fim de validar a metodologia empregada, economizando tempo e esforço.

Iniciou-se esta tarefa pelo problema mais simples de condução de calor em regime transiente: uma parede plana com temperaturas prescritas nas extremidades. A partir desta situação, introduziu-se o mesmo problema em um sistema de coordenadas cilíndricas.

Como próximo passo, após validar a discretização no novo sistema de coordenadas, incluiu-se a condição de convecção natural em uma das bordas do tubo, uma vez que este tipo de condição está presente no problema fim.

Por fim, incorporou-se o fluxo térmico no interior do tubo, caracterizando então a situação de estudo desejada.

5.2.1 Problema da Parede Plana

Tendo em mente que este tipo de problema possui solução analítica em regime permanente, buscou-se implementar tal resposta para validar a solução calculada pela discretização do problema geral.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} [k_0(1 + \beta T) \frac{dT}{dx}] = 0 \\ T(0) = T_{esq} \\ T(L) = T_{dir} \end{cases} \quad (5.2)$$

Através da solução da Equação 5.2, a qual ilustra a condução de calor, em regime, permanente em uma parede plana, com temperaturas prescritas nas extremidades, encontra-se:

$$T(x) = \frac{\sqrt{-L(\beta T_{esq} + 1)^2 + \beta x(T_{esq} - T_{dir})(\beta(T_{esq} + T_{dir}) + 2) + L^2}}{bL^2} \quad (5.3)$$

Avaliando o problema em regime transiente, representado pelo sistema de Equações 5.4, encontra-se a Equação 5.5.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [k_0(1 + \beta T) \frac{\partial T}{\partial x}] = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \\ T(0, t) = T_{esq} \\ T(L, t) = T_{dir} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} T_1^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t [k_{\frac{3}{2}}^t T_2^t - (k_{\frac{3}{2}}^t + 2k_{\frac{1}{2}}^t) T_1^t + 2k_{\frac{1}{2}}^t T_{esq}]}{\rho c_p \Delta x^2} + T_1^t; \text{ para } i = 1 \\ T_i^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t [k_{i+\frac{1}{2}}^t T_{i+1}^t - (k_{i+\frac{1}{2}}^t + k_{i-\frac{1}{2}}^t) T_i^t + k_{i-\frac{1}{2}}^t T_{i-1}^t]}{\rho c_p \Delta x^2} + T_i^t; \text{ para } 2 \leq i \leq m - 1 \\ T_m^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t [2k_{\frac{3}{2}}^t T_{dir} - (2k_{\frac{3}{2}}^t + k_{\frac{1}{2}}^t) T_m^t + k_{\frac{1}{2}}^t T_{m-1}^t]}{\rho c_p \Delta x^2} + T_m^t; \text{ para } i = m \end{cases} \quad (5.5)$$

Ao utilizar o software *MATLAB* para implementação numérica da Equação 5.3 e do sistema de equações 5.5, introduziu-se os valores para solução apresentados na Tabela 1. Os dados de massa específica e calor específico foram retirados de (SALAZAR, 2011).

Tabela 1 – Dados utilizados no problema

Temperatura Inicial	300 K
Temperatura Esquerda (T_{esq})	600 K
Temperatura Direita (T_{dir})	300 K
Massa Específica	7833 kg/m ³
Calor Específico à Pressão Constante	460 J/kg K
k_0	47,149 W/m K
β	-0,00025 1/K
Comprimento (L)	0,1 m

Além disso, diferentes testes foram realizados e obteve-se os valores de 40 nós e 0,02 s para o passo de discretização do tempo. Ademais, o código foi executado até o tempo de 60 segundos, o que se provou suficiente para que a solução transiente assumisse o estado permanente.

O Gráfico 9 apresenta a comparação dos resultados obtidos com a simulação feita. Além disso, a Tabela 2 compara os valores obtidos e apresenta o erro entre cada um. Nota-se, então, que os parâmetros adotados e a discretização realizada apresentaram resultados coerentes com o esperado.

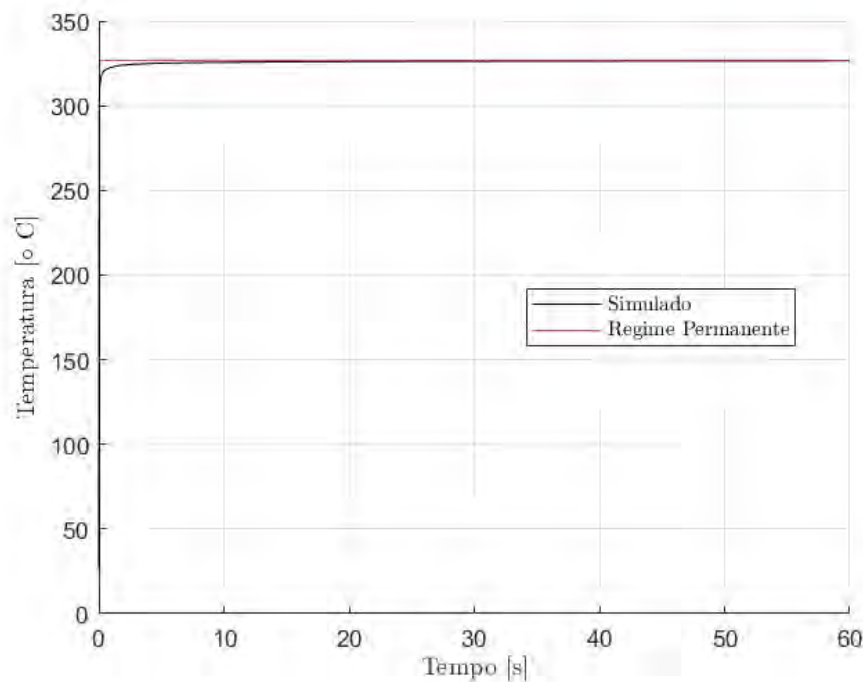


Figura 9 – Gráfico de comparação entre a solução analítica e a implementação do problema em regime transiente para $x = 0$ [m]

Tabela 2 – Comparação entre os valores calculados, para $x = 0$

Tempo [s]	Solução Geral [K]	Regime Permanente [K]	Erro [K] ($ T(x, t) - T(x) $)
0	300	600	300
10	598,64	600	1,36
20	599,04	600	0,96
30	599,22	600	0,78
40	599,32	600	0,68
50	599,39	600	0,61
60	599,45	600	0,55

A Figura 10 apresenta o campo de temperaturas ao longo do comprimento da parede, para o tempo final estipulado neste exemplo, juntamente com a curva de diferença de temperatura entre o regime permanente e a simulação do regime transiente.

Nota-se que há uma diferença máxima de cerca de 100°C entre os dois casos, e isto se dá por conta da largura da parede e do pouco tempo de simulação, os quais não permitem que a temperatura em regime transiente atinja o permanente.

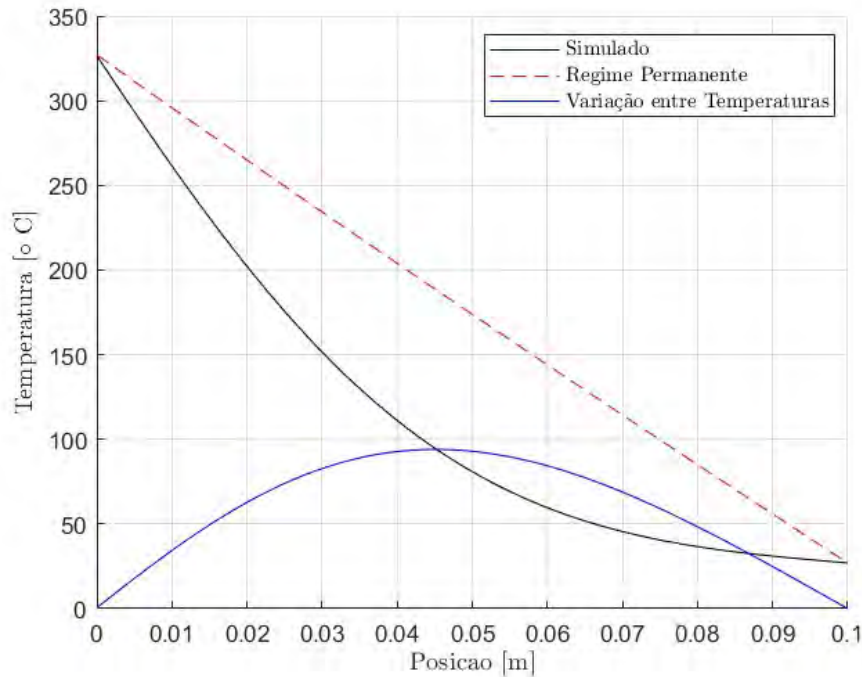


Figura 10 – Campo de temperaturas ao longo da parede plana, para o tempo de 60 s

5.2.2 Problema do Cilindro Oco

Introduzindo o sistema de coordenadas cilíndricas para a discretização em volumes de controle, examinou-se o problema da condução de calor em regime permanente e em regime transiente para um cilindro vazado, de raio interno $r_{int} = 77,5\text{mm}$ e raio externo $r_{ext} = 107,5\text{mm}$, cujas temperaturas nas extremidades se manterão constantes ao longo do tempo.

Resolvendo o problema, descrito pelas equações 5.6 em regime permanente, chega-se na Equação 5.7.

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [k_0(1 + \beta T)r \frac{dT}{dr}] = 0 \\ T(r_{int}) = T_{esq} \\ T(r_{ext}) = T_{dir} \end{cases} \quad (5.6)$$

$$T(r) = \frac{\sqrt{\frac{\ln r_{int}(\beta T_{dir} + 1)^2 - \ln r_{ext}(\beta T_{esq} + 1)^2 + \beta(\beta(T_{esq} + T_{dir}) + 2)(T_{esq} - T_{dir}) \ln r}{(\ln r_{int} - \ln r_{ext})^2}} - 1}{b} \quad (5.7)$$

Avaliando o sistema de equações abaixo, para o problema em regime transiente, encontra-se o resultado apresentado nas Equações 5.9.

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[k_0 (1 + \beta T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \\ T(r_{int}, t) = T_{esq} \\ T(r_{ext}, t) = T_{dir} \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} T_1^{t+\Delta t} = \Delta t \frac{\left[k_{\frac{3}{2}}^t r_{\frac{3}{2}} T_2^t - (k_{\frac{3}{2}}^t r_{\frac{3}{2}} + 2k_{\frac{1}{2}}^t r_{\frac{1}{2}}) T_1^t + 2k_{\frac{1}{2}}^t r_{\frac{1}{2}} T_{esq} \right]}{\rho c_p \Delta r^2 r_1} + T_1^t; \text{ para } i = 1 \\ T_i^{t+\Delta t} = \Delta t \frac{\left[k_{i+\frac{1}{2}}^t r_{i+\frac{1}{2}} T_{i+1}^t - (k_{i+\frac{1}{2}}^t r_{i+\frac{1}{2}} + k_{i-\frac{1}{2}}^t r_{i-\frac{1}{2}}) T_i^t + k_{i-\frac{1}{2}}^t r_{i-\frac{1}{2}} T_{i-1}^t \right]}{\rho c_p \Delta r^2 r_i} + T_i^t; \text{ para } 2 \leq i \leq m-1 \\ T_m^{t+\Delta t} = \Delta t \frac{\left[2k_{m+\frac{1}{2}}^t r_{m+\frac{1}{2}} T_{dir} - (2k_{m+\frac{1}{2}}^t r_{m+\frac{1}{2}} + k_{m-\frac{1}{2}}^t r_{m-\frac{1}{2}}) T_m^t + k_{m-\frac{1}{2}}^t r_{m-\frac{1}{2}} T_{m-1}^t \right]}{\rho c_p \Delta r^2 r_m} + T_m^t; \text{ para } i = m \end{cases} \quad (5.9)$$

Os dados utilizados para este caso são semelhantes aos apresentados pela Tabela 1, com exceção ao comprimento (L), que é substituído pelos valores de raio interno e externo. Além disso, a quantidade de nós e o passo temporal também são os mesmos do caso da parede plana.

O Gráfico 11 ilustra a comparação entre a simulação do problema transiente com o resultado permanente, além de incluir a diferença entre os valores encontrados para cada situação. De forma auxiliar, a Tabela 3 compara os resultados para o raio interno do tubo.

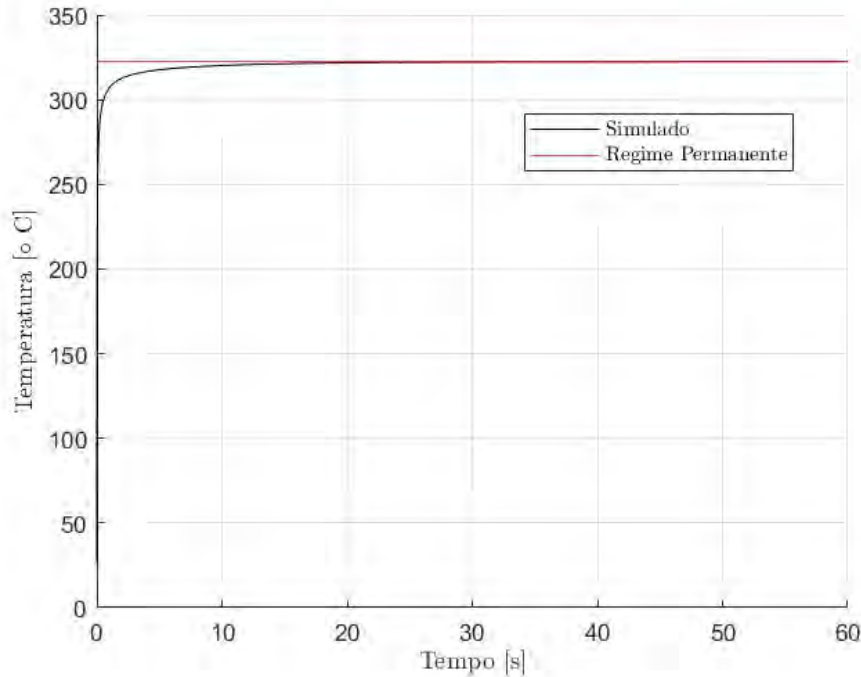


Figura 11 – Gráfico de comparação entre a solução analítica e a implementação do problema em regime transiente para $r = r_{int}$

Tabela 3 – Comparação entre os valores calculados, para $r = r_{int}$

Tempo [s]	Solução Geral [K]	Regime Permanente [K]	Erro [K] ($ T(r, t) - T(r) $)
0	300	600	300
10	599,09	600	0,91
20	599,3	600	0,70
30	599,36	600	0,64
40	599,38	600	0,62
50	599,38	600	0,62
60	599,38	600	0,62

A Figura 12 mostra o campo de temperaturas ao longo do comprimento da espessura do cilindro, para o tempo final da simulação. Pode-se perceber que ambas as soluções seguem próximas, e isso se dá devido ao fato de que a combinação entre o tamanho da espessura da parede e o tempo de simulação permitem que o regime transiente atinja a solução permanente. A Figura 13 ilustra a diferença entre as soluções em regime permanente e transiente.

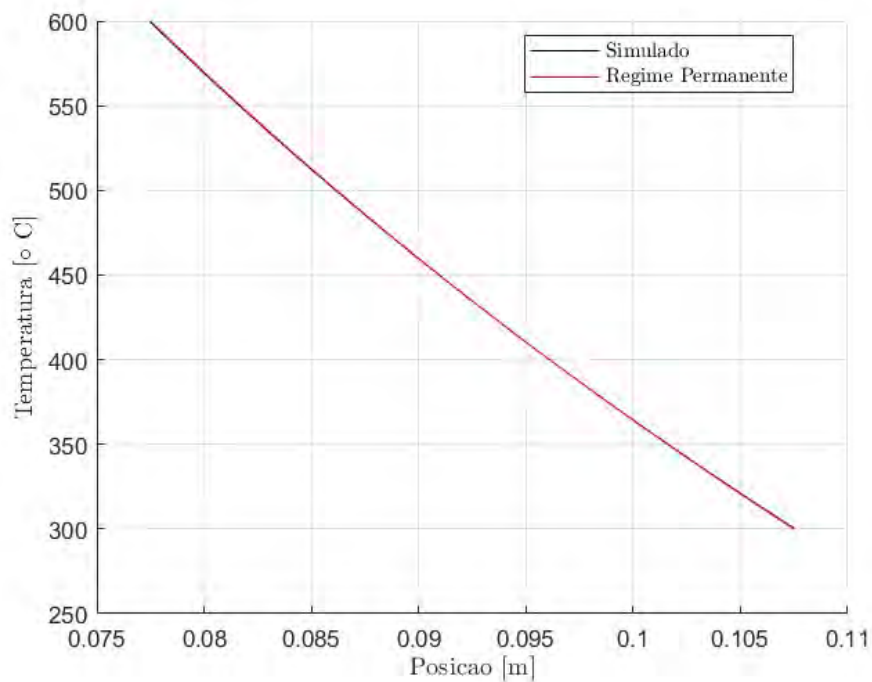


Figura 12 – Campo de temperaturas ao longo da espessura do tubo, para o tempo de 60 s

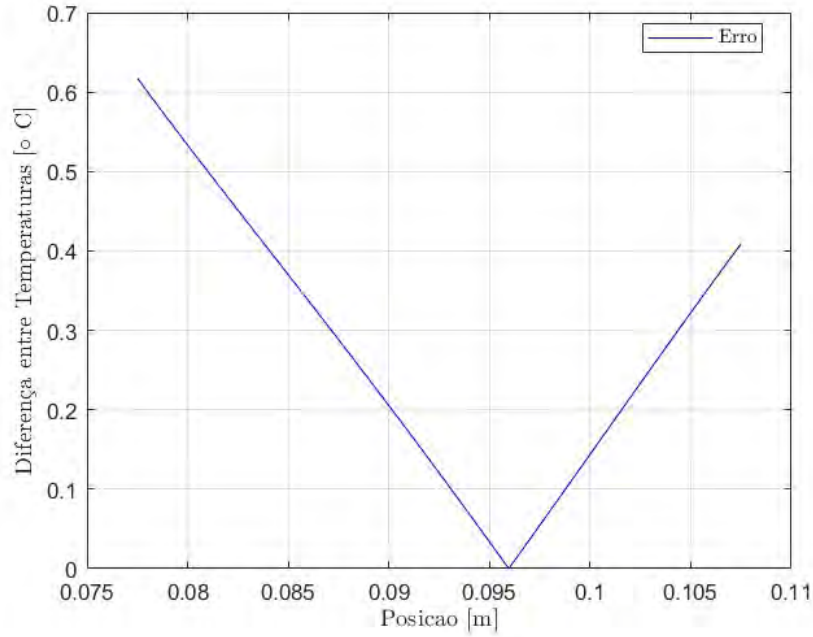


Figura 13 – Erro entre as temperaturas no regime permanente e transiente

5.3 Cálculo do Campo de Temperaturas para um Disparo

Aplicando as teorias explicadas anteriormente para o cálculo do campo de temperatura no tubo de um armamento com condutividade térmica variando com a temperatura, fluxo térmico prescrito no interior e convecção natural na superfície externa, em regime transiente, tem-se:

$$\begin{cases}
 T_{\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} = T_1^t + \frac{q(t)\Delta r}{2k_{\frac{1}{2}}^t}; \text{ para } r = r_{int} \\
 T_1^{t+\Delta t} = \Delta t \frac{[k_{\frac{3}{2}}^t r_{\frac{3}{2}} T_2^t - k_{\frac{3}{2}}^t r_{\frac{3}{2}} T_1^t + r_{\frac{1}{2}} \Delta r q(t)]}{\rho c_p \Delta r^2 r_1} + T_1^t; \text{ para } i = 1 \\
 T_i^{t+\Delta t} = \Delta t \frac{[k_{i+\frac{1}{2}}^t r_{i+\frac{1}{2}} T_{i+1}^t - (k_{i+\frac{1}{2}}^t r_{i+\frac{1}{2}} + k_{i-\frac{1}{2}}^t r_{i-\frac{1}{2}}) T_i^t + k_{i-\frac{1}{2}}^t r_{i-\frac{1}{2}} T_{i-1}^t]}{\rho c_p \Delta r^2 r_i} + T_i^t; \text{ para } 2 \leq i \leq m-1 \\
 T_m^{t+\Delta t} = \Delta t \frac{[k_{m+\frac{1}{2}}^t r_{m+\frac{1}{2}} T_{m+\frac{1}{2}}^t - (2k_{m+\frac{1}{2}}^t r_{m+\frac{1}{2}} + k_{m-\frac{1}{2}}^t r_{m-\frac{1}{2}}) T_m^t + k_{m-\frac{1}{2}}^t r_{m-\frac{1}{2}} T_{m-1}^t]}{\rho c_p \Delta r^2 r_m} + T_m^t; \text{ para } i = m \\
 T_{m+\frac{1}{2}}^{t+\Delta t} = \frac{h_{ext} T_{ambiente} \Delta r + 2k_{m+\frac{1}{2}}^t T_m^t}{h_{ext} \Delta r + 2k_{m+\frac{1}{2}}^t}; \text{ para } r = r_{ext}
 \end{cases} \quad (5.10)$$

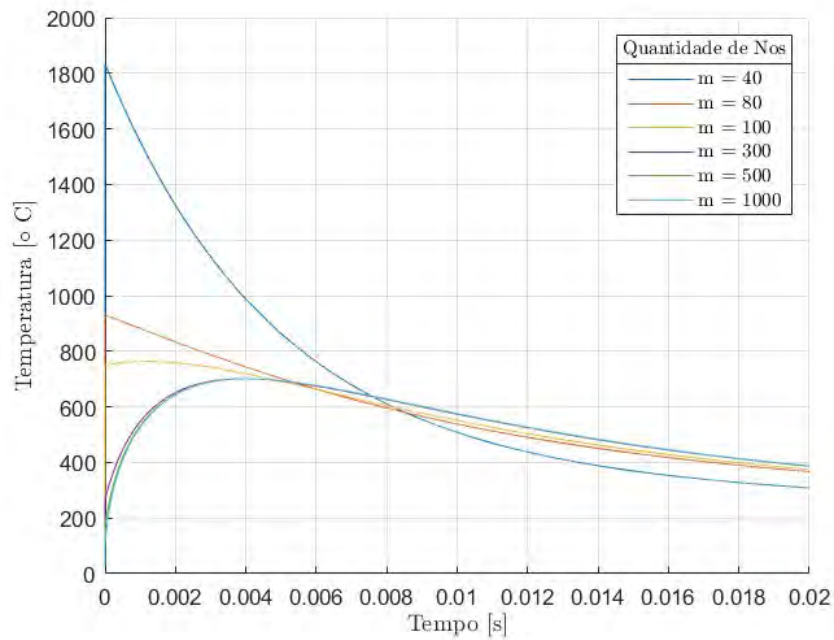
Vale ressaltar que o fluxo térmico prescrito é dado através da Equação 2.1, em que $q_0 = 1,927 \cdot 10^8 \text{ W/m}^2$ e $b = 1/(4,74 \cdot 10^{-3}) \text{ 1/s}$ (SALAZAR, 2011). Ademais, ao longo dos resultados aqui apresentados, a temperatura da superfície interna do tubo do armamento em questão não deverá ultrapassar o valor de $200 \text{ }^\circ\text{C}$ em seu regime permanente que, para o caso do obuseiro autopropulsado ARM198, do Exército do Equador, com carregamento automático, significa um tempo de 6 s.

5.3.1 Condutividade Térmica Variável

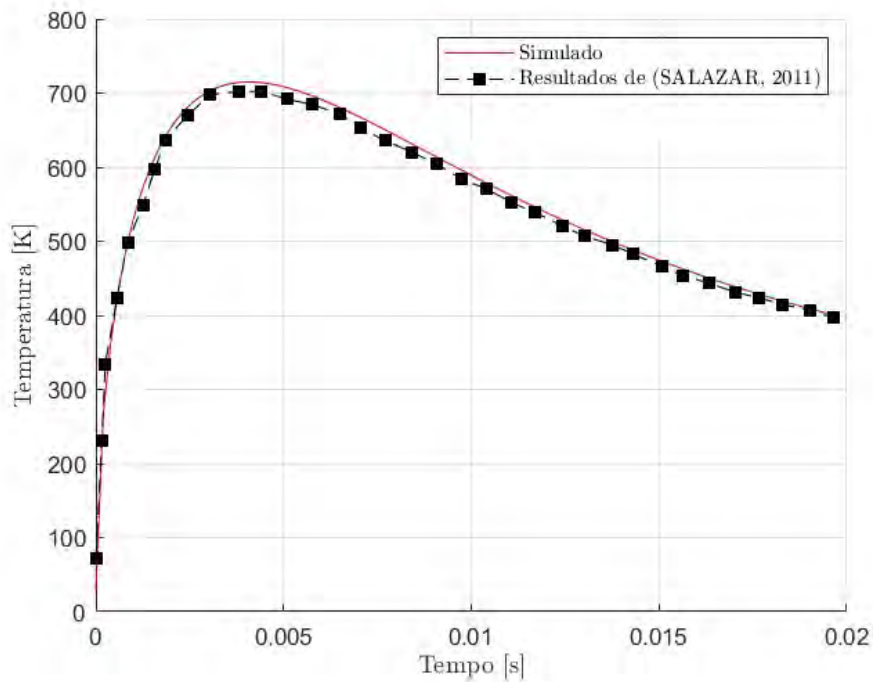
Como se trata de um problema mais complexo, com grande número de equações e condições de contorno mais complexas, deve-se tomar especial atenção na escolha do número de nós necessários para discretização do domínio do espaço. Desta forma, realizou-se diferentes testes para o cálculo da temperatura da superfície interna do tubo do armamento, com diferentes discretizações e todas foram comparadas ao resultado obtido por (SALAZAR, 2011), para um coeficiente de condutividade térmica constante de 40 W/m.K e um coeficiente de convecção térmica $h_{ext} = 40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ para o resfriamento natural com o ar, a $27 \text{ }^\circ\text{C}$.

Analisando o Gráfico 14a, que apresenta a variação da temperatura interna do tubo ao longo do tempo para diferentes quantidades de nós, nota-se que, para valores acima de 300 nós, a variação dos valores da temperatura é muito baixa. Portanto, o domínio do espaço será particionado em 300 unidades igualmente espaçadas. Vale destacar que $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ foi o valor adotado para a discretização do domínio do tempo, uma vez que ele atende ao critério de estabilidade definido em 3.22.

Após definido a quantidade de nós, utilizou-se os dados obtidos por (SALAZAR, 2011) como fonte de comparação para verificação da discretização apresentada em 5.10. O Gráfico 14b ilustra a proximidade dos resultados obtidos pelo código feito em MATLAB e os de referência, evidenciando que a modelagem matemática aqui adotada apresenta bons resultados, para o caso da condutividade térmica constante.



(a)



(b)

Figura 14 – Temperatura da superfície interna do tubo do armamento, com diferentes números de nós (a) e comparação com resultados de (SALAZAR, 2011), para $m = 300$ (b)

5.3.2 Consideração de Todas as Propriedades Termofísicas Variáveis

Conforme mencionado anteriormente, a introdução da variação do calor específico à pressão constante dependente da temperatura não altera o equacionamento matemático

do problema. Portanto, as equações definidas em 5.10 podem ser aplicadas nesta nova situação, apenas atentando para a utilização da Equação 4.2.

Realizando o mesmo estudo para detecção do número de nós suficientes para a nova situação de propriedades termofísicas variáveis, nota-se que, para valores acima de 300 nós, a temperatura na superfície interna do tubo não possui alterações significativas para justificar utilizar uma malha mais discretizada. Desta forma, o domínio do espaço, para este problema, manteve-se com 300 nós, igualmente espaçados. A Figura 15 apresenta o resultado dos testes com diferentes quantidades de nós.

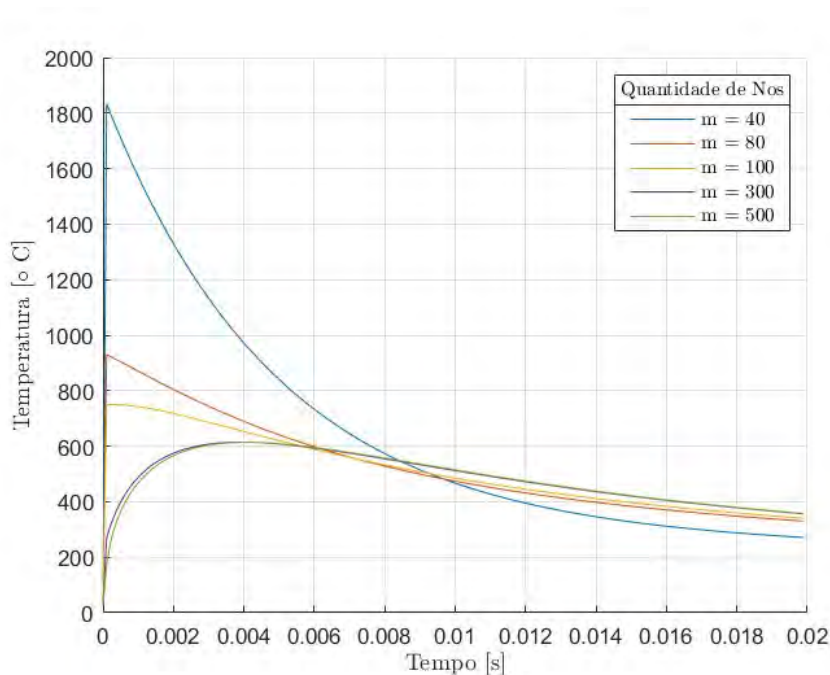


Figura 15 – Temperatura da superfície interna do tubo para diferentes quantidades de nós utilizados

Após definida a discretização do domínio do espaço para este problema, comparou-se os resultados entre as situações de propriedades termofísicas constantes e variáveis, para verificar a relevância de cada consideração e em que aspecto dos resultados estas ideias interferem. A Figura 16 apresenta o resultado com todas as combinações de características do material do tubo.

A Tabela 4 apresenta os picos de temperatura para cada uma das combinações de propriedades termofísicas, representadas no gráfico acima. Através dela, é possível perceber o efeito de cada consideração na temperatura da superfície interna do tubo.

Nota-se que, ao considerar o calor específico à pressão constante variando com a temperatura, segundo uma equação linear, percebe-se que os picos de temperatura são reduzidos em cerca de $100^{\circ}C$. Em contra partida, considerar a condutividade térmica do material como dependente da temperatura não gera alteração significativa nos picos de temperatura.

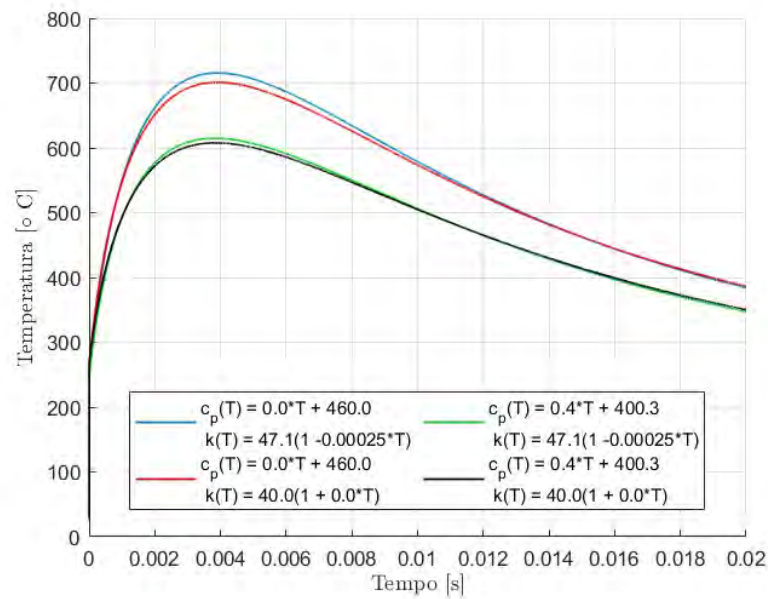


Figura 16 – Variação dos parâmetros de $k(T)$ e $c_p(T)$

Tabela 4 – Picos de temperatura para cada combinação de propriedades termofísicas (em graus Celsius)

$c_p(T) / k(T)$	$40(1 + 0T)$	$47.1(1 - 0,00025T)$
$0T + 460$	701	715,5
$0,4T + 400,3$	607,7	614,7

5.4 Análise de Vários Disparos

5.4.1 Validação do Método

Como forma de validar a metodologia numérica implementada em MATLAB, decidiu-se por simular as condições feitas por (SALAZAR, 2011) em seu trabalho. Portanto, foram adotadas as condições de propriedades termofísicas constantes e uma cadência de tiro de 10 disparos por minuto, a qual é compatível com o observado por um obuseiro com carregamento automático.

A Figura 17 ilustra o resultado da simulação feita para a temperatura da superfície interna ao longo do tempo, com os disparos sendo realizados. Pode-se perceber que, após o 22º disparo, a temperatura atinge um valor acima da temperatura de autoignição do projétil, em seu regime transiente, o que causará a detonação do projétil de maneira espontânea, ocasionando acidentes. Portanto, para a cadência de tiro aqui imposta, deve-se realizar apenas 22 disparos.

A Tabela 5 apresenta os valores para os picos de temperatura que ocorrem ao longo do tempo e os compara com os máximos de temperatura apresentados por (SALAZAR, 2011).

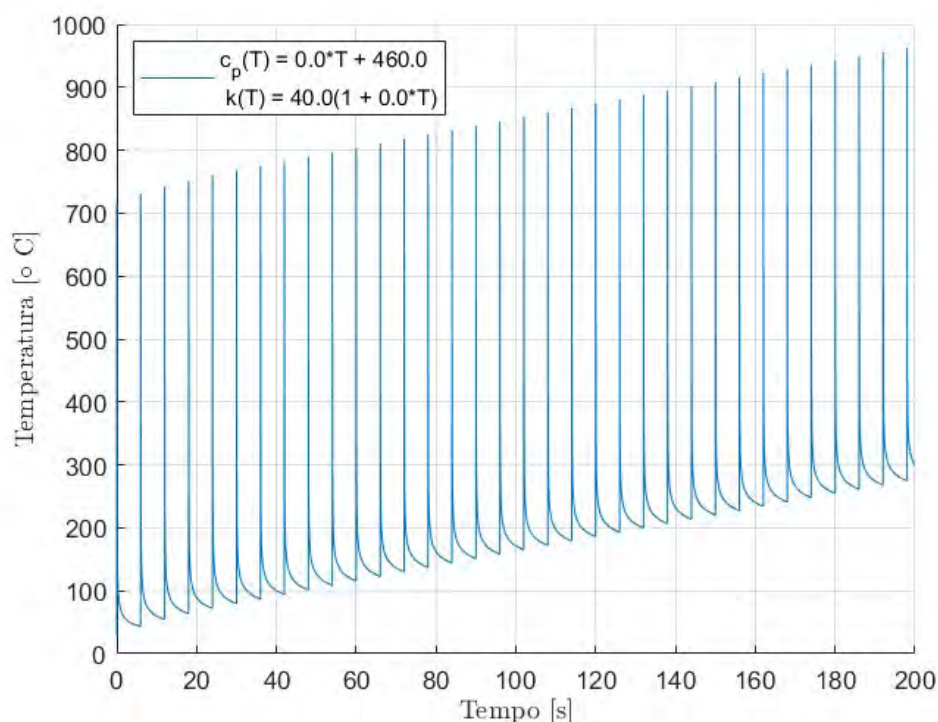


Figura 17 – Rajada de disparos para $c_p = 460$ e $k = 40$

Como os valores dos picos de temperatura de (SALAZAR, 2011) foram retirados dos gráficos apresentados pelo autor com a utilização de um programa de obtenção de pontos através de imagens, os desvios encontrados podem ser derivados deste passo. Todavia, como o afastamento entra as duas soluções encontra-se abaixo de 5%, a metodologia numérica utilizada apresenta uma precisão satisfatória.

5.4.2 Variação da Condutividade Térmica com a Temperatura

Uma vez validado o método numérico, o próximo passo é a introdução das equações de condução térmica com a condutividade térmica do material do tubo do obuseiro variando com a temperatura, conforme o sistema de equações apresentado em 5.10.

Conforme a Figura 18 exibe, a temperatura da superfície interna do tubo é menor do que aquela encontrada anteriormente, para a condição de propriedades termofísicas constantes. Consequentemente, o número de disparos que podem ser executados até a superfície interna do tubo do obuseiro atingir os 200°C , dentro do intervalo de 6 segundos entre disparos, é de 22 tiros.

Através de uma rápida comparação com a Figura 17, nota-se que os picos de temperatura para a situação de condutividade térmica variável são mais elevados do que no cenário em que esta propriedade é constante. A Tabela 6 ilustra de maneira mais clara esta diferença.

Tabela 5 – Comparação entre a simulação de vários disparos e os resultados de (SALAZAR, 2011)

$k(T) = 40$ $c_p(T) = 460$	Dados (SALAZAR, 2011)	Diferença	Desvio Percentual
731,45	715,92	15,53	2,17%
742,56	726,89	15,67	2,16%
751,67	737,69	13,98	1,89%
759,79	746,33	13,46	1,80%
767,43	752,27	15,16	2,02%
774,83	758,16	16,67	2,20%
782,11	767,00	15,11	1,97%
789,32	773,63	15,69	2,03%
796,49	782,47	14,02	1,79%
803,63	786,65	16,98	2,16%
810,74	795,18	15,57	1,96%
817,92	801,07	16,86	2,10%
825,00	809,44	15,56	1,92%
832,06	815,95	16,11	1,97%
839,09	822,31	16,79	2,04%
846,12	828,51	17,61	2,13%
853,12	837,34	15,78	1,88%
860,10	843,39	16,72	1,98%
867,07	851,76	15,31	1,80%
874,02	856,10	17,92	2,09%
880,95	862,45	18,50	2,14%
887,86	870,67	17,19	1,97%
894,76	877,02	17,73	2,02%
901,64	885,55	16,09	1,82%
908,50	889,89	18,61	2,09%
915,34	896,09	19,25	2,15%
922,17	904,77	17,39	1,92%
928,97	910,66	18,31	2,01%
935,77	919,34	16,43	1,79%

Embora a mudança na condutividade térmica altere os valores dos picos de temperatura, a temperatura da superfície interna do tubo durante o regime permanente (6 s) permanece praticamente invariável, resultando em um mesmo número de disparos com segurança. Este fenômeno acontece devido ao comportamento isolante que a parede interna do tubo adquire, conforme a condutividade térmica decai, com o aumento de temperatura, o que faz com que somente este ponto tenha maior concentração de calor, mas no restante do espaço a distribuição de temperatura se mantém semelhante ao caso de condutividade térmica constante, o que induz ao mesmo número de disparos para as situações.

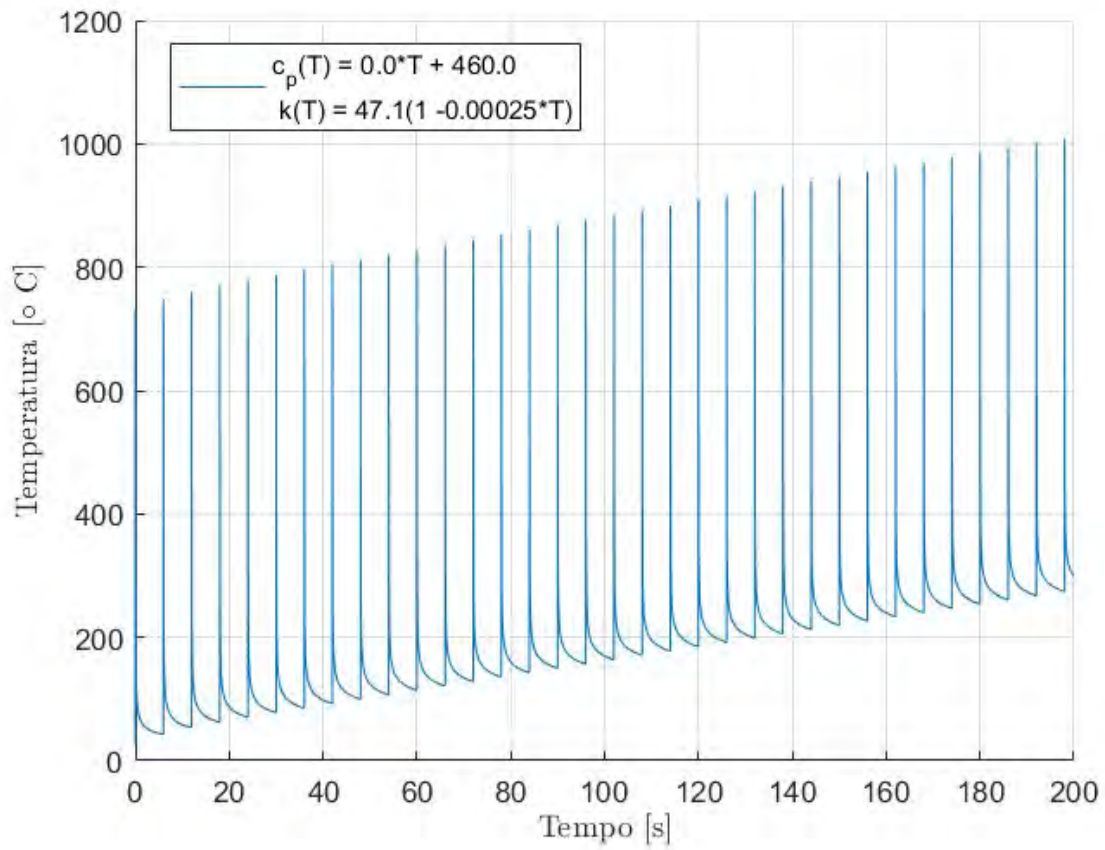


Figura 18 – Rajada de disparos para $c_p = 460$ e $k(T) = 47,149(1 - 0,00025T)$

5.4.3 Variação do Calor Específico com a Temperatura

Ao introduzir a variação do calor específico do material, já foi apresentado que os picos de temperatura são reduzidos em cerca de $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, conforme a Figura 16. Logo, este resultado pode apresentar comportamentos diferentes na situação de uma rajada de disparos, quando comparado com os cenários em que esta propriedade termofísica se mantém constante.

Como forma de verificar o comportamento do material com as diferentes combinações de condutividade térmica e calor específico, assim como feito anteriormente para um único disparo, realizou-se a simulação de uma rajada de disparos, seguindo a cadência de 10 disparos por minuto. A Figura 19 ilustra os resultados encontrados todas as 4 situações.

Uma melhor visualização da diferença entre cada uma das considerações sobre as características do material do tubo são apresentadas na Figura 20, indicando a influência tanto nos picos de temperatura, quanto nos intervalo de tempo entre cada disparo.

Tabela 6 – Comparação entre picos de temperatura entre condutividade térmica variável e constante

$k(T) = 47,15(1 - 0,00025T)$ $c_p(T) = 460$	$k(T) = 40$ $c_p(T) = 460$
730,84	715,08
748,33	731,45
760,22	742,56
770,09	751,67
779,00	759,79
787,48	767,43
795,75	774,83
803,92	782,11
812,03	789,32
820,11	796,49
828,17	803,63
836,20	810,74
844,37	817,92
852,37	825,00
860,35	832,06
868,32	839,09
876,27	846,12
884,21	853,12
892,13	860,10
900,04	867,07
907,92	874,02
915,80	880,95
923,65	887,86
931,49	894,76
939,31	901,64
947,12	908,50
954,92	915,34
962,69	922,17
970,45	928,97
978,20	935,77
985,93	942,54
993,64	949,30
1001,34	956,03
1009,02	962,76

Através do gráfico acima, pode-se notar que, com a implementação da variação do calor específico com a temperatura, o valor encontrado para a temperatura na superfície interna do tubo dentro do intervalo de 6 segundos é menor para os casos em que esta propriedade é considerada constante.

Conforme visto anteriormente, a variação da condutividade térmica do material não interfere significativamente na temperatura da superfície interna do tubo e portanto, a

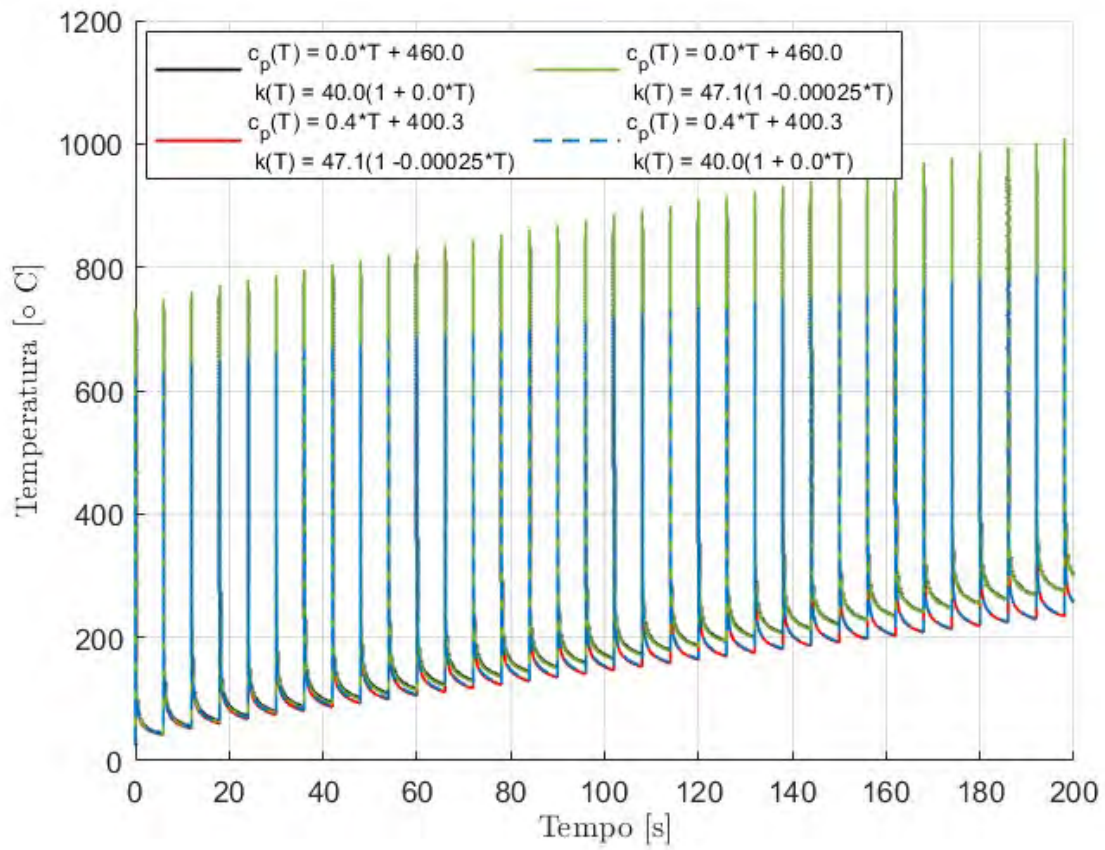
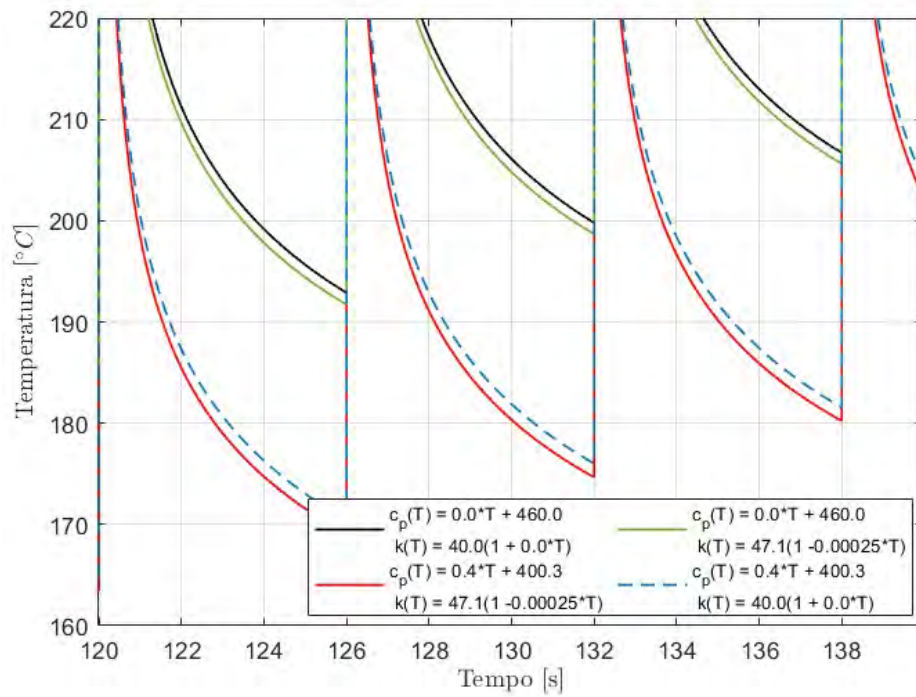


Figura 19 – Rajada de disparos para as 4 possibilidades das propriedades termofísicas do material

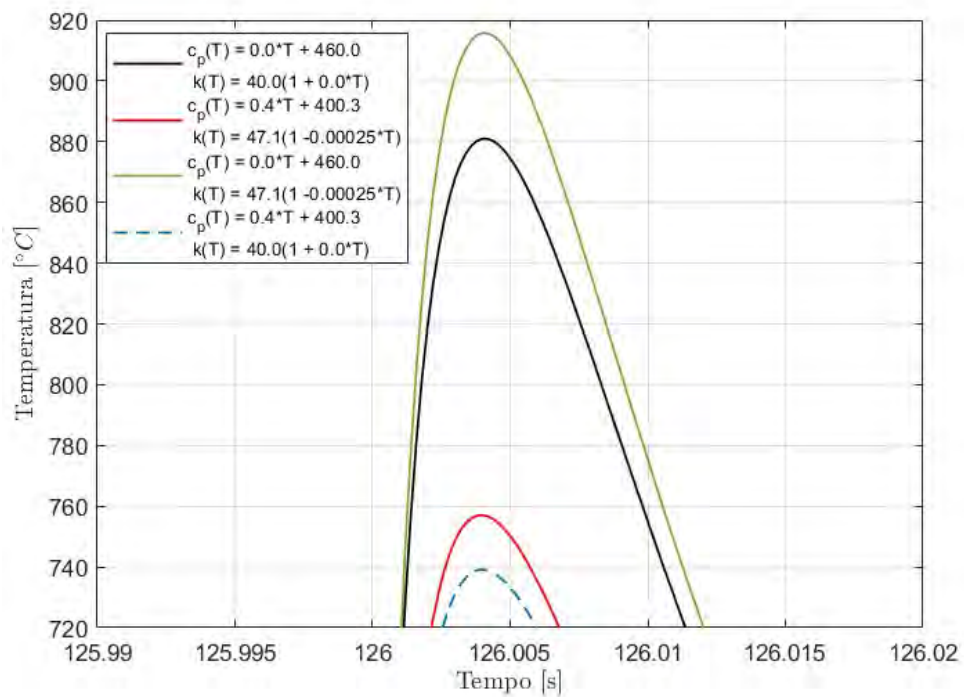
quantidade de disparos que podem ser realizados com a cadência aqui utilizada se mantém o mesmo. Desta forma, a Figura 21 apresenta a comparação entre as situações de calor específico constante e variável, mantendo a condutividade térmica constante.

Mediante uma rápida análise, pode-se perceber que o número de disparos até atingir a temperatura de autoignição do propelente do projétil aumenta de 22 para 26 disparos, o que significa em um acréscimo de 18% no número de tiros que podem ser executados.

Por fim, a Tabela 7 ilustra os picos de temperatura para cada um dos cenários de propriedades termofísicas do material do tubo do armamento.



(a)



(b)

Figura 20 – Influência das propriedades termofísicas nos intervalos entre disparos (a) e nos picos de temperatura (b)

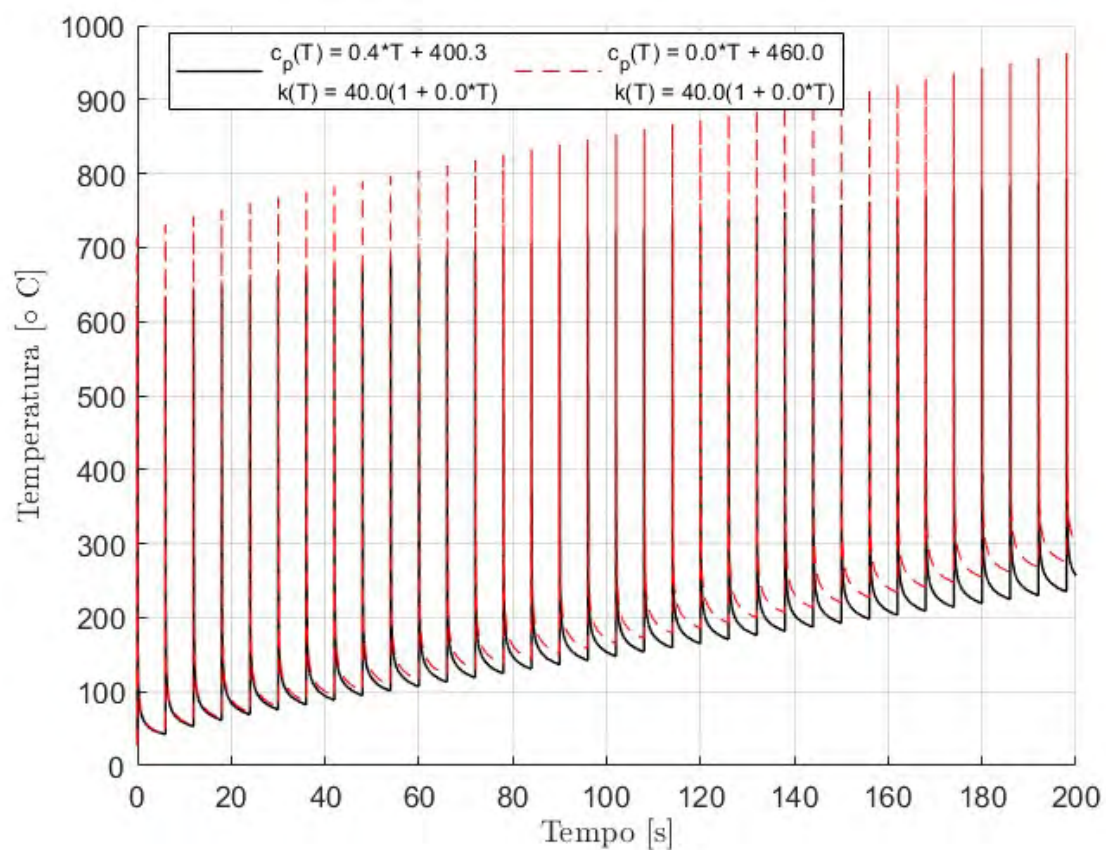


Figura 21 – Comparação entre $c_p(T) = 400.3 + 0.43T$ e $c_p = 460$, mantendo $k = 40$

Tabela 7 – Picos de temperatura para diferentes combinações de $k(T)$ e $c_p(T)$

Tempo	$k(T) = 40$ $c_p(T) = 0,43T + 400,27$	$k(T) = 47,15(1 - 0,00025T)$ $c_p(T) = 460$	$k(T) = 40$ $c_p(T) = 460$	$k(T) = 47,15(1 - 0,00025T)$ $c_p(T) = 0,43T + 400,27$
0	621,69	730,84	715,08	629,68
6	634,18	748,33	731,45	642,77
12	642,42	760,22	742,56	651,36
18	649,29	770,09	751,67	658,62
24	655,31	779,00	759,79	665,03
30	660,87	787,48	767,43	671,02
36	666,17	795,75	774,83	676,77
42	671,32	803,92	782,11	682,39
48	676,38	812,03	789,32	687,93
54	681,37	820,11	796,49	693,41
60	686,32	828,17	803,63	698,85
66	691,24	836,20	810,74	704,25
72	696,43	844,37	817,92	710,03
78	701,28	852,37	825,00	715,37
84	706,11	860,35	832,06	720,68
90	710,90	868,32	839,09	725,96
96	715,67	876,27	846,12	731,21
102	720,42	884,21	853,12	736,43
108	725,14	892,13	860,10	741,63
114	729,83	900,04	867,07	746,79
120	734,50	907,92	874,02	751,94
126	739,15	915,80	880,95	757,05
132	743,77	923,65	887,86	762,14
138	748,36	931,49	894,76	767,20
144	752,94	939,31	901,64	772,24
150	757,49	947,12	908,50	777,25
156	762,02	954,92	915,34	782,24
162	766,52	962,69	922,17	787,20
168	771,01	970,45	928,97	792,14
174	775,47	978,20	935,77	797,06
180	779,91	985,93	942,54	801,95
186	784,33	993,64	949,30	806,82
192	788,72	1001,34	956,03	811,66
198	793,10	1009,02	962,76	816,48

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho realizou o estudo do problema de transferência de calor no interior do tubo de um armamento após a realização de um disparo ou segundo uma cadência de tiros por um determinado intervalo de tempo, com o objetivo de verificar a quantidade de tiros que podem ser executados até que a parede interna do tubo atinja a temperatura de autoignição do projétil.

Os modelos matemáticos apresentados e desenvolvidos ao longo do trabalho se apoiam na implementação do método dos volumes de controle, apresentados por (HAHN; OZISIK, 2012), juntamente com expansões de derivadas parciais através do método explícito, uma vez que esta abordagem numérica apresenta a vantagem de ser mais intuitiva para a sua aplicação.

Como o enfoque deste trabalho é na verificação das considerações de propriedades termofísicas do material do tubo do armamento, foram executadas diferentes simulações e comparações, para aferir o que cada característica afeta no perfil de temperaturas ao longo do domínio do espaço determinado, principalmente na superfície interna.

Após definidas as equações numéricas, estas foram implementadas no software *MATLAB* para realização das simulações de cada problema físico abordado. Todos os códigos feitos e utilizados ao longo do trabalho estão presentes no Anexo A.

Como forma de validar os modelos numéricos, decidiu-se por comparar os resultados simulados com situações que possuam soluções analíticas, uma vez que estas já são bem consolidadas no mundo acadêmico e são de fácil acesso. Desta forma, os problemas de parede plana e cilindro oco foram utilizados como parâmetros de conferência. Os resultados obtidos nestes problemas mostram boa consistência das abordagens matemáticas adotadas, ratificando seus usos no problema fim.

Como último passo de validação, o trabalho de (SALAZAR, 2011) foi utilizado como base de comparação com as simulações do problema final, apenas considerando as propriedades termofísicas constantes. Tanto os resultados para apenas um disparo, quanto para os casos de rajada demonstraram ótima precisão, com diferenças menores que 5%. Ademais, alguns parâmetros empregados ao longo deste trabalho foram retirados diretamente de (SALAZAR, 2011), uma vez que ambos possuem o mesmo objeto de análise.

Findadas as validações, as primeiras simulações foram realizadas para analisar o comportamento da parede interna do tubo do armamento após um único disparo, observando um intervalo de tempo bem pequeno. A Figura 16 representa o resultado das quatro situações aqui avaliadas, considerando o calor específico à pressão constante e a

condutividade térmica variáveis, ou não, com a temperatura.

É possível verificar que os picos de temperatura são reduzidos em $100^{\circ}C$ quando leva-se em consideração a mudança do calor específico, o que corresponde à 10% de diferença, em graus Kelvin. Conforme (SALAZAR, 2011) apresenta, os picos de temperatura são relevantes para os cálculos de desgaste do tubo do armamento, o que também influencia na quantidade de disparos que podem ser realizados. Portanto, segue como uma sugestão de trabalhos futuros, a avaliação da degradação da superfície interna com as propriedades termofísicas do material variando com a temperatura, conforme aqui abordadas.

Ainda observando a Figura 16, pode-se perceber que as temperaturas após o disparo, aquelas dentro do intervalo de 6 segundos, são menores para os casos de calor específico variável com a temperatura e, através de tal variação, é possível verificar que há um aumento no número de disparos que podem ser realizados até atingir a temperatura de autoignição do projétil.

A Tabela 8 apresenta a quantidade de tiros que cada consideração sobre as propriedades do material proporcionam. Através dela, verifica-se que assumir as características do material como constantes com a temperatura resulta em uma quantidade menor de disparos, quando comparado com o caso de tais atributos sendo variáveis. Esta mudança representa um aumento de 18% e pode fazer a diferença dentro no contexto de combate.

Tabela 8 – Quantidade de disparos para cada consideração sobre as características do material

$k(T) = 40$ $c_p(T) = 0,43T + 400,27$	$k(T) = 47,15(1 - 0,00025T)$ $c_p(T) = 460$	$k(T) = 40$ $c_p(T) = 460$	$k(T) = 47,15(1 - 0,00025T)$ $c_p(T) = 0,43T + 400,27$
26	22	22	26

Como sugestão de trabalhos futuros, sugere-se o estudo sobre mais materiais que são usados para fabricação do tubo de armamentos, bem como o levantamento dos valores da Equação 2.1, para simular munições diferentes e condições adversas de uso.

Por fim, sugere-se que seja feita uma abordagem às equações diferenciais parciais do problema de transferência de calor no tubo do armamento utilizando a transformada de Kirchhoff e compare com os valores apresentados neste trabalho. Esta transformada é amplamente utilizada para linearizar equações diferenciais e, portanto, pode ser empregada na situação abordada neste projeto.

REFERÊNCIAS

- ABDULKAREEM, M. A. Analytical solution of transient heat conduction through a hollow cylindrical thermal insulation material of a temperature dependant thermal conductivity. *University of Baghdad Engineering Journal*, 2013. Nov. de 2013. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/304380889_Analytical_Solution_of_Transient_Heat_Conduction_through_a_Hollow_Cylindrical_Thermal_Insulation_Material_of_a_Temperature_Dependant_Thermal_Conductivity>.
- APOSTOL, T. M. *Calculus*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967. 666 p.
- GERBER, N.; BUNDY, M. *Effect of Variable Thermal Properties on Gun Tube Heating*. U.S.A, 1992. 49 p.
- HAHN, D. W.; OZISIK, M. N. *Heat Conduction*. 3. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2012. 718 p.
- HILL, R. D.; CONNER, J. M. Transient heat transfer model of machine gun barrels. *Materials and Manufacturing Processes*, v. 27, 2012. 12 jul. de 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10426914.2011.648694>>.
- INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2003. 689 p.
- ISIK, H.; GOKTAS, F. Cook-off analysis of a propellant in a 7.62 mm barrel by experimental and numerical methods. *Applied Thermal Engineering*, v. 112, 2017. 5 fev. de 2017. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1359431116324620>>.
- MISHRA, A.; HAMEED, A.; LAWTON, B. A novel scheme for computing gun barrel temperature history and its experimental validation. *Pressure Vessel Technology*, v. 132, 2010. 13 out. de 2010. Disponível em: <<https://asmedigitalcollection.asme.org/pressurevesseltech/article-abstract/132/6/061202/436379/A-Novel-Scheme-for-Computing-Gun-Barrel?redirectedFrom=fulltext>>.
- MSIAC. *Accidents 2011*. 2011. Disponível em: <<https://www.msiac.nato.int/news/accidents-2011>>.
- SALAZAR, M. D. B. *Determinação de Perfis Térmicos em Tubos de Armas*. 112 p. Mestrado em Engenharia Mecânica — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2011. 20 dez. de 2011. Disponível em: <http://www.ime.eb.mil.br/arquivos/teses/se4/mec2011/DISSERT_BELTRAN.pdf>.
- ÖZISIK, M. N.; ORLANDE, H. R.; COLAÇO, M. J.; COTTA, R. M. *Finite Difference Methods in Heat Transfer*. 2. ed. New York: CRC Press, 2017. 578 p.

ANEXO A – CÓDIGOS EM *MATLAB*

A.1 Código para Simulação do Problema da Parede Plana

```

1  clc, clear, close all
2
3  Temperatura_Inicial = 300;
4  Temperatura_Esquerda = 600;
5  Temperatura_Direita = 300;
6
7  Densidade = 7833;
8  Calor_Esp = 460;
9
10 k_0 = 47.149;
11 beta = -0.00025;
12
13 Quant_Nos = 6e2;
14 Comprimento = 1e-1;
15 Delta_x = Comprimento/Quant_Nos;
16
17 Delta_t = 1e-4;
18 Tempo = 60;
19 Quant_Tempo = Tempo/Delta_t;
20
21 Temperatura(1:Quant_Tempo,1:Quant_Nos) = ...
    ones(Quant_Tempo,Quant_Nos)*Temperatura_Inicial;
22 Conduct_Termica(1:Quant_Tempo,1:Quant_Nos) = ...
    calcula_k(Temperatura(1:Quant_Tempo,1:Quant_Nos),k_0,beta);
23
24 vetor_tempo = zeros(1,Quant_Tempo);
25 vetor_posicao = linspace(Delta_x/2,Comprimento-Delta_x/2,Quant_Nos);
26
27 C_1 = k_0*((1 + beta*Temperatura_Direita)^2 - (1 + ...
    beta*Temperatura_Esquerda)^2)/(2*beta*Comprimento);
28 C_2 = (1 + beta*Temperatura_Esquerda)^2;
29
30 temperatura_permanente = (sqrt(2*C_1*beta/k_0.*vetor_posicao + C_2) ...
    - 1)./beta;
31
32 for i = 2:Quant_Tempo
33     for j = 1:Quant_Nos
34         if j == 1
35             Conduct_Esquerda = calcula_k(Temperatura(i-1,j),k_0,beta);

```

```

36         [Condut_mais_12,Condut_menos_12] = ...
           calcula_k_meios(Condut_Esquerda,Condut_Termica(i-1,j),
37         Condut_Termica(i-1,j+1));
38
39         Temperatura(i,j) = ...
           Delta_t*(Condut_mais_12*Temperatura(i-1,j+1) - ...
           Temperatura(i-1,j)*(Condut_mais_12 + ...
           2*Condut_menos_12) + ...
           2*Condut_menos_12*Temperatura_Esquerda)/
40         (Densidade*Calor_Esp*Delta_x^2) + Temperatura(i-1,j);
41         Condut_Termica(i,j) = calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
42     elseif j == Quant_Nos
43         Condut_Direita = calcula_k(Temperatura(i-1,j),k_0,beta);
44         [Condut_mais_12,Condut_menos_12] = ...
           calcula_k_meios(Condut_Termica(i-1,j-1),
45         Condut_Termica(i-1,j),Condut_Direita);
46
47         Temperatura(i,j) = ...
           Delta_t*(2*Condut_mais_12*Temperatura_Direita - ...
           (2*Condut_mais_12 + ...
           Condut_menos_12)*Temperatura(i-1,j) + ...
           Condut_menos_12*Temperatura(i-1,j-1))/
48         (Densidade*Calor_Esp*Delta_x^2) + Temperatura(i-1,j);
49         Condut_Termica(i,j) = calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
50     else
51         [Condut_mais_12,Condut_menos_12] = ...
           calcula_k_meios(Condut_Termica(i-1,j-1),
52         Condut_Termica(i-1,j),Condut_Termica(i-1,j+1));
53
54         Temperatura(i,j) = ...
           Delta_t*(Condut_mais_12*Temperatura(i-1,j+1) - ...
           Temperatura(i-1,j)*(Condut_mais_12 + Condut_menos_12) ...
           + Condut_menos_12*Temperatura(i-1,j-1))/
55         (Densidade*Calor_Esp*Delta_x^2) + Temperatura(i-1,j);
56         Condut_Termica(i,j) = calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
57     end
58 end
59 vetor_tempo(i) = vetor_tempo(i-1) + Delta_t;
60 erro(i - 1) = abs(Temperatura(i - 1,1) - ...
           temperatura_permanente(1,1));
61 end
62
63 erro(Quant_Tempo) = 0;
64 %%
65 figure(1)
66 hold on
67 plot(vetor_tempo, Temperatura(:,1) - 273, 'k')

```

```
68 yline(temperatura_permanente(1,1) - 273, 'r')
69 % plot(vetor_tempo, erro, '--b')
70 legend('Simulado', 'Regime ...
        Permanente', 'Erro', 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best')
71 % title('Temperatura na Parede da Esquerda', 'Interpreter', 'latex')
72 xlabel('Tempo [s]', 'Interpreter', 'latex')
73 ylabel('Temperatura [ $\circ$ C]', 'Interpreter', 'latex')
74 grid on
75
76 figure(2)
77 hold on
78 plot(vetor_posicao, Temperatura(end, :) - 273, 'k')
79 plot(vetor_posicao, temperatura_permanente(1, :) - 273, '--r')
80 plot(vetor_posicao, abs(Temperatura(end, :) - ...
        temperatura_permanente(1, :)), 'b')
81 legend('Simulado', 'Regime ...
        Permanente', 'Erro', 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best')
82 % title(sprintf('Temperatura da Parede para t = %.1f ...
        s', vetor_tempo(end)+Delta_t), 'Interpreter', 'latex')
83 xlabel('Posicao [m]', 'Interpreter', 'latex')
84 ylabel('Temperatura [ $\circ$ C]', 'Interpreter', 'latex')
85 grid on
86
87 figure(3)
88 plot(vetor_posicao, 100.*abs(Temperatura(end, :) - ...
        temperatura_permanente(1, :))./temperatura_permanente(1, :), 'b')
89 legend('Erro', 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best')
90 xlabel('Posicao [m]', 'Interpreter', 'latex')
91 ylabel('Temperatura [ $\circ$ C]', 'Interpreter', 'latex')
92 grid on
93
94 %%
95
96 tempos = [0 10 20 30 40 50 60];
97
98 for i=1:length(tempos)-1
99     indices(i) = find(vetor_tempo >= tempos(i), 1);
100     temperaturas_comparacao(i) = Temperatura(indices(i), 1);
101 end
102
103 indices(7) = 600000;
104 temperaturas_comparacao(7) = Temperatura(end, 1);
105
106 tabela_resultados = table([tempos' temperaturas_comparacao' ...
        temperatura_permanente(1,1).*ones(7,1)]) %comparacao das ...
        temperaturas na parede esquerda
```

```
107 writetable(tabela_resultados, 'Comparacao de temperaturas para x = ...  
    0.xlsx');
```

A.2 Código para Simulação do Problema do Cilindro Oco

```
1 clc, clear  
2  
3 Temperatura_Inicial = 300;  
4 Temperatura_Esquerda = 600;  
5 Temperatura_Direita = 300;  
6  
7 Densidade = 7833;  
8 Calor_Esp = 460;  
9  
10 k_0 = 47.149;  
11 beta = -0.000246029;  
12  
13 Quant_Nos = 4e1;  
14 Raio_Interno = 77.5e-3;  
15 Raio_Externo = 107.5e-3;  
16 Delta_r = (Raio_Externo - Raio_Interno)/Quant_Nos;  
17  
18 Delta_t = 1e-2;  
19 Tempo = 60;  
20 Quant_Tempo = Tempo/Delta_t;  
21  
22 Temperatura(1,1:Quant_Nos) = ones(1,Quant_Nos)*Temperatura_Inicial;  
23 Conduct_Termica(1,1:Quant_Nos) = ...  
    calcula_k(Temperatura(1,1:Quant_Nos),k_0,beta);  
24  
25 vetor_tempo = zeros(1,Quant_Tempo);  
26 Raio = linspace(Raio_Interno + Delta_r/2,Raio_Externo - ...  
    Delta_r/2,Quant_Nos);  
27  
28 k = 47.149;  
29 b = -0.000246029;  
30 a = Raio_Interno;  
31 c = Raio_Externo;  
32 m = Temperatura_Esquerda;  
33 n = Temperatura_Direita;  
34  
35 temperatura_permanente = (sqrt((log(a)*(b*n + 1)^2 + (b*m + ...  
    1)^2*(-log(c)) + b.*(m - n).*log(Raio).* (b.*(m + n) + ...  
    2))./(log(a) - log(c))) - 1)./b;
```

```

36
37 for i = 2:Quant_Tempo
38     for j = 1:Quant_Nos
39         if j == 1
40             Condu_t_Esquerda = calcula_k(Temperatura_Esquerda,k_0,beta);
41             Raio_esquerdo = Raio_Interno;
42
43             [Condu_t_mais_12,Condu_t_menos_12] = ...
                calcula_k_meios(Condu_t_Esquerda,Condu_t_Termica(i-1,j),
44             Condu_t_Termica(i-1,j+1));
45             [Raio_mais_12,raio_menos_12] = ...
                calcula_r_meios(Raio_esquerdo,Raio(j),Raio(j+1));
46             Raio_menos_12 = Raio_Interno;
47
48             Temperatura(i,j) = Delta_t*(Condu_t_mais_12*Raio_mais_12*
49             Temperatura(i-1,j+1) - (Condu_t_mais_12*Raio_mais_12 + ...
                2*Condu_t_menos_12*Raio_menos_12)*Temperatura(i-1,j) + ...
                2*Condu_t_menos_12*Raio_menos_12*Temperatura_Esquerda)/
50             (Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2*Raio(j)) + ...
                Temperatura(i-1,j);
51             Condu_t_Termica(i,j) = calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
52         elseif j == Quant_Nos
53             Condu_t_Direita = calcula_k(Temperatura_Direita,k_0,beta);
54             Raio_direito = Raio_Externo;
55
56             [Condu_t_mais_12,Condu_t_menos_12] = ...
                calcula_k_meios(Condu_t_Termica(i-1,j-1),
57             Condu_t_Termica(i-1,j),Condu_t_Direita);
58             [raio_mais_12,raio_menos_12] = ...
                calcula_r_meios(Raio(j-1),Raio(j),Raio_direito);
59             Raio_mais_12 = Raio_Externo;
60
61             Temperatura(i,j) = Delta_t*(2*Condu_t_mais_12*Raio_mais_12*
62             Temperatura_Direita - (2*Condu_t_mais_12*Raio_mais_12 + ...
                Condu_t_menos_12*Raio_menos_12)*Temperatura(i-1,j) + ...
                Condu_t_menos_12*Raio_menos_12*Temperatura(i-1,j-1))/
63             (Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2*Raio(j)) + ...
                Temperatura(i-1,j);
64             Condu_t_Termica(i,j) = calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
65         else
66             [Condu_t_mais_12,Condu_t_menos_12] = ...
                calcula_k_meios(Condu_t_Termica(i-1,j-1),
67             Condu_t_Termica(i-1,j),Condu_t_Termica(i-1,j+1));
68             [Raio_mais_12,Raio_menos_12] = ...
                calcula_r_meios(Raio(j-1),Raio(j),Raio(j+1));
69
70             Temperatura(i,j) = Delta_t*(Condu_t_mais_12*Raio_mais_12*

```

```

71     Temperatura(i-1,j+1) - ...
        Temperatura(i-1,j)*(Condut_mais_12*Raio_mais_12 + ...
        Condut_menos_12*Raio_menos_12) + ...
        Condut_menos_12*Raio_menos_12*Temperatura(i-1,j-1))/
72     (Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2*Raio(j)) + ...
        Temperatura(i-1,j);
73     Condut_Termica(i,j) = calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
74     end
75 end
76 vetor_tempo(i) = vetor_tempo(i-1) + Delta_t;
77 erro(i - 1) = abs(Temperatura(i - 1,1) - ...
        temperatura_permanente(1,1));
78 end
79
80 erro(Quant_Tempo) = 0;
81 %%
82 figure(1)
83 hold on
84 plot(vetor_tempo, Temperatura(:,1) - 273, 'k')
85 yline(temperatura_permanente(1,1) - 273, 'r')
86 legend('Simulado', 'Regime ...
        Permanente', 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best')
87 xlabel('Tempo [s]', 'Interpreter', 'latex')
88 ylabel('Temperatura [ $\circ$ C]', 'Interpreter', 'latex')
89 grid on
90
91 figure(2)
92 hold on
93 plot(Raio, Temperatura(end,:), 'k')
94 plot(Raio, temperatura_permanente(1,:), 'r')
95 legend('Simulado', 'Regime ...
        Permanente', 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best')
96 xlabel('Posicao [m]', 'Interpreter', 'latex')
97 ylabel('Temperatura [ $\circ$ C]', 'Interpreter', 'latex')
98 grid on
99
100 figure(3)
101 plot(Raio, abs(Temperatura(end,:) - temperatura_permanente(1:)), 'b')
102 legend('Erro', 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'best')
103 xlabel('Posicao [m]', 'Interpreter', 'latex')
104 ylabel('Temperatura [ $\circ$ C]', 'Interpreter', 'latex')
105 grid on
106
107 %%
108
109 tempos = [0 10 20 30 40 50 60];
110

```

```
111 for i=1:length(tempo)-1
112     indices(i) = find(vetor_tempo >= tempo(i),1);
113     temperaturas_comparacao(i) = Temperatura(indices(i),1);
114 end
115
116 indices(7) = 600000;
117 temperaturas_comparacao(7) = Temperatura(end,1);
118
119 tabela_resultados = table([tempo' temperaturas_comparacao' ...
    temperatura_permanente(1,1).*ones(7,1)]); %comparacao das ...
    temperaturas na parede esquerda
120 % writetable(tabela_resultados,'Comparacao de temperaturas para x = ...
    0 no cilindro oco.xlsx');
```

A.3 Código para Simular Diferentes Quantidades de Nós

```
1 clc, clear
2
3 Temperatura_Inicial = 300;
4 Temperatura_Ambiente_Externa = 300;
5
6 Densidade = 7833;
7
8 k_0 = 40;
9 beta = 0;
10 a = 0.4294;
11 b = 400.27;
12
13 Coef_Convec_Externo = 40;
14
15 Quant_Nos = [4e1 8e1 1e2 3e2 5e2];
16 Raio_Interno = 77.5e-3;
17 Raio_Externo = 107.5e-3;
18
19 Delta_t = 1e-4;
20 Tempo = 0.02;
21 Quant_Tempo = Tempo/Delta_t;
22
23 Temperatura_1_2 = ones(1,Quant_Tempo)*Temperatura_Inicial;
24 Temperatura_m_mais_1_2 = ones(1,Quant_Tempo)*Temperatura_Inicial;
25
26 vetor_tempo = zeros(1,Quant_Tempo);
27 Calor_Interno = zeros(1,Quant_Tempo);
28
```



```

62         sprintf('Erro para %d', Quant_Nos(k))
63         return
64     end
65 elseif j == Quant_Nos(k)
66     Condu_t_m_menos_1_2 = ...
67         2*Condu_t_Termica(i-1, j)*Condu_t_Termica(i-1, j-1) /
68         (Condu_t_Termica(i-1, j) + Condu_t_Termica(i-1, j-1));
69     Condu_t_m_mais_1_2 = ...
70         Condu_t_m_menos_1_2 / (2*Condu_t_m_menos_1_2 /
71         Condu_t_Termica(i-1, j) - 1);
72     Raio_direito = Raio_Externo;
73     [-1, Raio_menos_12] = ...
74         calcula_r_meios(Raio(j-1), Raio(j), Raio_direito);
75     Raio_mais_12 = Raio_Externo;
76     Temperatura_m_mais_1_2(i) = ...
77         (Coef_Convec_Externo*Temperatura_Ambiente_Externa*
78         Delta_r + 2*Condu_t_m_mais_1_2*Temperatura(i-1, j)) /
79         (Coef_Convec_Externo*Delta_r + 2*Condu_t_m_mais_1_2);
80     Calor_Esp = calcula_cp(a, b, Temperatura(i-1, j));
81     Temperatura(i, j) = ...
82         Delta_t*(2*Condu_t_m_mais_1_2*Raio_mais_12*
83         Temperatura_m_mais_1_2(i) - ...
84         (2*Condu_t_m_mais_1_2*Raio_mais_12 + ...
85         Condu_t_m_menos_1_2*Raio_menos_12)*
86         Temperatura(i-1, j) + Condu_t_m_menos_1_2*Raio_menos_12*
87         Temperatura(i-1, j-1)) /
88         (Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2*Raio(j)) + ...
89         Temperatura(i-1, j);
90     Condu_t_Termica(i, j) = ...
91         calcula_k(Temperatura(i, j), k_0, beta);
92     Estabilidade = ...
93         4*Delta_t / (Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2);
94     beta_m = 1 + (1 + ...
95         1 / (2*Quant_Nos) * Delta_r * Coef_Convec_Externo /
96         Condu_t_Termica(1, j));
97     if Estabilidade > 1 / (2*beta_m) || Estabilidade < 0
98         disp('Problema de Estabilidade')
99         sprintf('Erro para %d', Quant_Nos(k))
100        return
101    end
102 else

```

```

98         [Condut_mais_12,Condut_menos_12] = ...
           calcula_k_meios(Condut_Termica(i-1,j-1),
99         Condut_Termica(i-1,j),Condut_Termica(i-1,j+1));
100        [Raio_mais_12,Raio_menos_12] = ...
           calcula_r_meios(Raio(j-1),Raio(j),Raio(j+1));
101
102        Calor_Esp = calcula_cp(a,b, Temperatura(i-1,j));
103
104        Temperatura(i,j) = Delta_t*(Condut_mais_12*Raio_mais_12*
105        Temperatura(i-1,j+1) - ...
           Temperatura(i-1,j)*(Condut_mais_12*Raio_mais_12 + ...
           Condut_menos_12*Raio_menos_12) + ...
           Condut_menos_12*Raio_menos_12*Temperatura(i-1,j-1))/
106        (Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2*Raio(j)) + ...
           Temperatura(i-1,j);
107        Condut_Termica(i,j) = ...
           calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
108
109        Estabilidade = ...
           40*Delta_t/(Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2);
110        beta_m = 1 + (1 + ...
           1/(2*Quant_Nos)*Delta_r*Coef_Convec_Externo/
111        Condut_Termica(1,j));
112
113        if Estabilidade > 1/(2*beta_m) || Estabilidade < 0
114            disp('Problema de Estabilidade')
115            sprintf('Erro para %d',Quant_Nos(k))
116            return
117        end
118    end
119 end
120     vetor_tempo(i) = vetor_tempo(i-1) + Delta_t;
121 end
122
123     legenda{k} = strcat(sprintf('m = %i',Quant_Nos(k)));
124
125     figure(1)
126     hold on
127     plot(vetor_tempo,Temperatura_1_2 - 273)
128     xlabel('Tempo [s]','Interpreter','latex')
129     ylabel('Temperatura [ $\circ$ C]','Interpreter','latex')
130     grid on
131 end
132 lgd = legend(legenda,'Interpreter','latex');
133 title(lgd,'Quantidade de Nos','Interpreter','latex')
134
135 Calor_Interno(Quant_Tempo) = 0;

```

A.4 Código para um Disparo e Comparação com os Dados Retirados de (SALAZAR, 2011)

```
1 clc, clear
2
3 Temperatura_Inicial = 300;
4 Temperatura_Ambiente_Externa = 300;
5
6 Densidade = 7833;
7 Calor_Esp = 460;
8
9 k_0 = 40;
10 beta = 0;
11 % k_0 = 47.149;
12 % beta = -0.00025;
13
14 Coef_Convec_Externo = 40;
15
16 Quant_Nos = 3e2;
17 Raio_Interno = 77.5e-3;
18 Raio_Externo = 107.5e-3;
19
20 Delta_t = 2e-4;
21 Tempo = 0.02;
22 Quant_Tempo = Tempo/Delta_t;
23
24
25 Temperatura_1_2 = ones(1,Quant_Tempo)*Temperatura_Inicial;
26 Temperatura_m_mais_1_2 = ones(1,Quant_Tempo)*Temperatura_Inicial;
27
28 vetor_tempo = zeros(1,Quant_Tempo);
29 Calor_Interno = zeros(1,Quant_Tempo);
30
31 Delta_r = (Raio_Externo - Raio_Interno)/Quant_Nos;
32 Temperatura(1:Quant_Tempo,1:Quant_Nos) = ...
    ones(Quant_Tempo,Quant_Nos)*Temperatura_Inicial;
33 Conduct_Termica(1:Quant_Tempo,1:Quant_Nos) = ...
    calcula_k(Temperatura(1:Quant_Tempo,1:Quant_Nos),k_0,beta);
34 Raio = linspace(Raio_Interno + Delta_r/2,Raio_Externo - ...
    Delta_r/2,Quant_Nos);
35
36 Estabilidade = 40*Delta_t/(Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2);
37 beta_m = 1 + (1 + 1/(2*Quant_Nos)*Delta_r*Coef_Convec_Externo/
38 Conduct_Termica(1,j));
39
```

```

40 if Estabilidade > 1/(2*beta_m) || Estabilidade < 0
41     disp('Problema de Estabilidade')
42     return
43 end
44
45 for i = 2:Quant_Tempo
46     for j = 1:Quant_Nos
47         if j == 1
48             Condut_3_2 = ...
49                 2*Condut_Termica(i-1,j)*Condut_Termica(i-1,j+1)/
50                 (Condut_Termica(i-1,j) + Condut_Termica(i-1,j+1));
51             Condut_1_2 = ...
52                 Condut_3_2/(2*Condut_3_2/Condut_Termica(i-1,j) - 1);
53             Raio_esquerdo = Raio_Interno;
54
55             [Raio_mais_12,-] = ...
56                 calcula_r_meios(Raio_esquerdo,Raio(j),Raio(j+1));
57             Raio_menos_12 = Raio_Interno;
58
59             Calor_Interno(i-1) = ...
60                 calcula_calor_interno(vetor_tempo(i-1));
61             Temperatura_1_2(i) = Temperatura(i-1,j) + ...
62                 Calor_Interno(i-1)*Delta_r/(2*Condut_1_2);
63
64             Temperatura(i,j) = ...
65                 Delta_t*(Condut_3_2*Raio_mais_12*Temperatura(i-1,j+1) ...
66                     - Condut_3_2*Raio_mais_12*Temperatura(i-1,j) + ...
67                     Delta_r*Raio_menos_12*Calor_Interno(i-1))/
68                 (Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2*Raio(j)) + ...
69                 Temperatura(i-1,j);
70             Condut_Termica(i,j) = calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
71         elseif j == Quant_Nos
72             Condut_m_menos_1_2 = ...
73                 2*Condut_Termica(i-1,j)*Condut_Termica(i-1,j-1)/
74                 (Condut_Termica(i-1,j) + Condut_Termica(i-1,j-1));
75             Condut_m_mais_1_2 = ...
76                 Condut_m_menos_1_2/(2*Condut_m_menos_1_2/
77                 Condut_Termica(i-1,j) - 1);
78             Raio_direito = Raio_Externo;
79
80             [-,Raio_menos_12] = ...
81                 calcula_r_meios(Raio(j-1),Raio(j),Raio_direito);
82             Raio_mais_12 = Raio_Externo;
83
84             Temperatura_m_mais_1_2(i) = ...
85                 (Coef_Convec_Externo*Temperatura_Ambiente_Externa*
86                 Delta_r + 2*Condut_m_mais_1_2*Temperatura(i-1,j))/

```

```

74         (Coef_Convec_Externo*Delta_r + 2*Condut_m_mais_1_2);
75
76         Temperatura(i,j) = ...
           Delta_t*(2*Condut_m_mais_1_2*Raio_mais_12*
77         Temperatura_m_mais_1_2(i) - ...
           (2*Condut_m_mais_1_2*Raio_mais_12 + ...
           Condut_m_menos_1_2*Raio_menos_12)*Temperatura(i-1,j) ...
           + Condut_m_menos_1_2*Raio_menos_12*Temperatura(i-1,j-1))/
78         (Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2*Raio(j)) + ...
           Temperatura(i-1,j);
79         Condut_Termica(i,j) = calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
80     else
81         [Condut_mais_12,Condut_menos_12] = ...
           calcula_k_meios(Condut_Termica(i-1,j-1),
82         Condut_Termica(i-1,j),Condut_Termica(i-1,j+1));
83         [Raio_mais_12,Raio_menos_12] = ...
           calcula_r_meios(Raio(j-1),Raio(j),Raio(j+1));
84
85         Temperatura(i,j) = Delta_t*(Condut_mais_12*Raio_mais_12*
86         Temperatura(i-1,j+1) - ...
           Temperatura(i-1,j)*(Condut_mais_12*Raio_mais_12 + ...
           Condut_menos_12*Raio_menos_12) + ...
           Condut_menos_12*Raio_menos_12*Temperatura(i-1,j-1))/
87         (Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2*Raio(j)) + ...
           Temperatura(i-1,j);
88         Condut_Termica(i,j) = calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
89     end
90 end
91     vetor_tempo(i) = vetor_tempo(i-1) + Delta_t;
92 end
93
94     legenda = strcat(sprintf('m = %i',Quant_Nos));
95
96     figure(5)
97     hold on
98     plot(vetor_tempo,Temperatura_1_2 - 273)
99     xlabel('Tempo [s]','Interpreter','latex')
100    ylabel('Temperatura [°C]','Interpreter','latex')
101    grid on
102    lgd = legend(legenda,'Interpreter','latex');
103    title(lgd,'Quantidade de Nos','Interpreter','latex')
104
105    Calor_Interno(Quant_Tempo) = 0;
106
107    %%
108
109    figure(3)

```

```
110 plot([Raio_Interno Raio Raio_Externo].*1e3,[Temperatura_1_2(end) ...  
      Temperatura(end,:) Temperatura_m_mais_1_2(end)], 'k')  
111 title('Temperatura no Tubo para t = 10s')  
112 xlabel('Posicao [mm]')  
113 ylabel('Temperatura [K]')  
114 grid on  
115  
116 Data001 = importdata('Dados_Beltran.mat');  
117 figure(4)  
118 hold on  
119 plot(vetor_tempo, Temperatura_1_2 - 273, 'r')  
120 plot(Data001(:,1), Data001(:,2), '--sk', 'MarkerFaceColor', 'k')  
121 set(gca, 'xtick', [0 0.005 0.01 0.015 0.02])  
122 legend('Simulado', 'Resultados de BELTRAN', 'Interpreter', 'latex')  
123 % title('Temperatura na Superficie Interna', 'Interpreter', 'latex')  
124 xlabel('Tempo [s]', 'Interpreter', 'latex')  
125 ylabel('Temperatura [K]', 'Interpreter', 'latex')  
126 grid on
```

A.5 Código para Rajada de Disparos, Variando as Propriedades Termofísicas do Material

```
1 clc, clear, close all  
2  
3 saiu = 0;  
4  
5 Temperatura_Inicial = 300;  
6 Temperatura_Ambiente_Externa = 300;  
7  
8 Densidade = 7833;  
9  
10 a_b = {[0 460] [0.4294 400.27]};  
11 a = a_b{2}(1);  
12 b = a_b{2}(2);  
13  
14 k_0_beta = {[40 0] [47.149 -0.00025]};  
15 k_0 = k_0_beta{1}(1);  
16 beta = k_0_beta{1}(2);  
17  
18 Quant_Tiros = 50;  
19 Tempo_Entre_Tiros = 6;  
20 m = 0;  
21  
22 Coef_Convec_Externo = 40;
```

```
23
24 Quant_Nos = 3e2;
25 Raio_Interno = 77.5e-3;
26 Raio_Externo = 107.5e-3;
27
28 Delta_t = 2e-4;
29 Tempo = 200;
30 Quant_Tempo = Tempo/Delta_t;
31
32 Temperatura_1_2 = ones(1,Quant_Tempo)*Temperatura_Inicial;
33 Temperatura_m_mais_1_2 = ones(1,Quant_Tempo)*Temperatura_Inicial;
34
35 vetor_tempo = zeros(1,Quant_Tempo);
36 Calor_Interno = zeros(1,Quant_Tempo);
37
38 Delta_r = (Raio_Externo - Raio_Interno)/Quant_Nos;
39 Temperatura(1:Quant_Tempo,1:Quant_Nos) = ...
    ones(Quant_Tempo,Quant_Nos)*Temperatura_Inicial;
40 Conduct_Termica(1:Quant_Tempo,1:Quant_Nos) = ...
    calcula_k(Temperatura(1:Quant_Tempo,1:Quant_Nos),k_0,beta);
41 Raio = linspace(Raio_Interno + Delta_r/2,Raio_Externo - ...
    Delta_r/2,Quant_Nos);
42
43 for i = 2:Quant_Tempo
44     if abs(vetor_tempo(i-1) - Tempo_Entre_Tiros*m) < 1e-6
45         m = m + 1;
46     end
47     if m > Quant_Tiros
48         m = Quant_Tiros;
49     end
50     for j = 1:Quant_Nos
51         if j == 1
52             Conduct_3_2 = ...
                2*Conduct_Termica(i-1,j)*Conduct_Termica(i-1,j+1)/
53             (Conduct_Termica(i-1,j) + Conduct_Termica(i-1,j+1));
54             Conduct_1_2 = ...
                Conduct_3_2/(2*Conduct_3_2/Conduct_Termica(i-1,j) - 1);
55             Raio_esquerdo = Raio_Interno;
56
57             [Raio_mais_12,~] = ...
                calcula_r_meios(Raio_esquerdo,Raio(j),Raio(j+1));
58             Raio_menos_12 = Raio_Interno;
59
60             Tempo_Especial = vetor_tempo(i-1) - Tempo_Entre_Tiros*(m ...
                - 1);
61             Calor_Interno(i-1) = calcula_calor_interno(Tempo_Especial);
62
```



```

63     Temperatura_1_2(i) = Temperatura(i-1,j) + ...
        Calor_Interno(i-1)*Delta_r/(2*Condut_1_2);
64
65     Calor_Esp = calcula_cp(a,b, Temperatura(i-1,j));
66
67     Temperatura(i,j) = ...
        Delta_t*(Condut_3_2*Raio_mais_12*Temperatura(i-1,j+1) ...
        - Condut_3_2*Raio_mais_12*Temperatura(i-1,j) + ...
        Delta_r*Raio_menos_12*Calor_Interno(i-1))/
68     (Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2*Raio(j)) + ...
        Temperatura(i-1,j);
69     Condut_Termica(i,j) = calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
70
71     Estabilidade = ...
        Condut_Termica(i,j)*Delta_t/(Densidade*Calor_Esp*
72     Delta_r^2);
73     beta_m = 1 + (1 + ...
        1/(2*Quant_Nos)*Delta_r*Coef_Convec_Externo/
74     Condut_Termica(1,j));
75
76     if Estabilidade > 1/(2*beta_m) || Estabilidade < 0
77         disp('Problema de Estabilidade')
78         Condut_Termica(i,j)
79         saiu = 1;
80         break
81     end
82     elseif j == Quant_Nos
83         Condut_m_menos_1_2 = ...
            2*Condut_Termica(i-1,j)*Condut_Termica(i-1,j-1)/
84         (Condut_Termica(i-1,j) + Condut_Termica(i-1,j-1));
85         Condut_m_mais_1_2 = ...
            Condut_m_menos_1_2/(2*Condut_m_menos_1_2/
86         Condut_Termica(i-1,j) - 1);
87         Raio_direito = Raio_Externo;
88
89         [raio_menos_12,Raio_menos_12] = ...
            calcula_r_meios(Raio(j-1),Raio(j),Raio_direito);
90         Raio_mais_12 = Raio_Externo;
91
92         Calor_Esp = calcula_cp(a,b, Temperatura(i-1,j));
93
94         Temperatura_m_mais_1_2(i) = ...
            (Coef_Convec_Externo*Temperatura_Ambiente_Externa*
95         Delta_r + 2*Condut_m_mais_1_2*Temperatura(i-1,j))/
96         (Coef_Convec_Externo*Delta_r + 2*Condut_m_mais_1_2);
97

```

```

98     Temperatura(i,j) = ...
        Delta_t*(-Raio_mais_12*Delta_r*Coef_Convec_Externo*
99     Temperatura_m_mais_1_2(i) - ...
        Condut_m_menos_1_2*Raio_menos_12*Temperatura(i-1,j) + ...
        Condut_m_menos_1_2*Raio_menos_12*Temperatura(i-1,j-1) ...
        + Raio_mais_12*Delta_r*Coef_Convec_Externo*
100     Temperatura_Ambiente_Externa)/(Densidade*Calor_Esp*
101     Delta_r^2*Raio(j)) + Temperatura(i-1,j);
102     Condut_Termica(i,j) = calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
103
104     Estabilidade = ...
        Condut_Termica(i,j)*Delta_t/(Densidade*Calor_Esp*
105     Delta_r^2);
106     beta_m = 1 + (1 + ...
        1/(2*Quant_Nos)*Delta_r*Coef_Convec_Externo/
107     Condut_Termica(1,j));
108
109     if Estabilidade > 1/(2*beta_m) || Estabilidade < 0
110         disp('Problema de Estabilidade')
111         Condut_Termica(i,j)
112         saiu = 1;
113         break
114     end
115     else
116         [Condut_mais_12,Condut_menos_12] = ...
            calcula_k_meios(Condut_Termica(i-1,j-1),
117         Condut_Termica(i-1,j),Condut_Termica(i-1,j+1));
118         [Raio_mais_12,Raio_menos_12] = ...
            calcula_r_meios(Raio(j-1),Raio(j),Raio(j+1));
119
120     Calor_Esp = calcula_cp(a,b,Temperatura(i-1,j));
121
122     Temperatura(i,j) = Delta_t*(Condut_mais_12*Raio_mais_12*
123     Temperatura(i-1,j+1) - ...
        Temperatura(i-1,j)*(Condut_mais_12*Raio_mais_12 + ...
        Condut_menos_12*Raio_menos_12) + ...
        Condut_menos_12*Raio_menos_12*Temperatura(i-1,j-1))/
124     (Densidade*Calor_Esp*Delta_r^2*Raio(j)) + ...
        Temperatura(i-1,j);
125     Condut_Termica(i,j) = calcula_k(Temperatura(i,j),k_0,beta);
126
127     Estabilidade = ...
        Condut_Termica(i,j)*Delta_t/(Densidade*Calor_Esp*
128     Delta_r^2);
129     beta_m = 1 + (1 + ...
        1/(2*Quant_Nos)*Delta_r*Coef_Convec_Externo/
130     Condut_Termica(1,j));

```

```
131
132         if Estabilidade > 1/(2*beta_m) || Estabilidade < 0
133             disp('Problema de Estabilidade')
134             Condut_Termica(i,j)
135             saiu = 1;
136             break
137         end
138     end
139 end
140 if saiu == 1
141     break
142 end
143 vetor_tempo(i) = vetor_tempo(i-1) + Delta_t;
144 end
145
146 hold on
147 plot(vetor_tempo, Temperatura_1_2 - 273)
148 xlabel('Tempo [s]', 'Interpreter', 'latex')
149 ylabel('Temperatura [ $\circ$ C]', 'Interpreter', 'latex')
150 grid on
151
152 Calor_Interno(Quant_Tempo) = 0;
```