

**MINISTÉRIO DA DEFESA  
EXÉRCITO BRASILEIRO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**YURI FRANKLIN MACHADO DE ABREU**

**ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE VEÍCULOS  
POR MEIO DE REPRESENTAÇÃO MODAL EM GRAFOS DE  
LIGAÇÃO**

**Rio de Janeiro**

**2012**

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**YURI FRANKLIN MACHADO DE ABREU**

**ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE VEÍCULOS POR MEIO  
DE REPRESENTAÇÃO MODAL EM GRAFOS DE LIGAÇÃO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Fernando Ribeiro da Silva – D.Sc.

Co-orientador: Ricardo Teixeira da Costa Neto – D.Sc.

Rio de Janeiro

2012

c2012

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro RJ

CEP: 22290270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e do orientador.

A162 Abreu, Yuri Franklin Machado de

Análise Dinâmica de Estruturas de Veículos por meio de representação Modal em Grafos de Ligação / Yuri Franklin Machado de Abreu. - Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2012.

79 p.: il.

Dissertação (mestrado) - Instituto Militar de Engenharia – Rio de Janeiro, 2012.

1. Engenharia Mecânica – Teses e Dissertações. 2. Grafos de Ligações, Sistemas Dinâmicos, Modelagem e Simulação. I. Título. II Instituto Militar de Engenharia.

CDD – 629.046

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**YURI FRANKLIN MACHADO DE ABREU**

**ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE VEÍCULOS POR MEIO  
DE REPRESENTAÇÃO MODAL EM GRAFOS DE LIGAÇÃO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Fernando Ribeiro da Silva – D.Sc.

Co-orientador: Ricardo Teixeira da Costa Neto – D.Sc.

Aprovada em 07 de fevereiro de 2012 pela seguinte Banca Examinadora:

---

Prof. Fernando Ribeiro da Silva - D.Sc. do IME - Presidente

---

Prof. Arnaldo Ferreira – Ph.D. do IME.

---

Prof. Ricardo Teixeira da Costa Neto - D.Sc. do IME.

---

Prof. Francisco José da Cunha Pires Soeiro - Ph.D. da UERJ.

Rio de Janeiro

2012

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, que pela sua graça me deu vida, saúde, inteligência e força para superar todos os obstáculos encontrados, não só nesta, mas em todas as fases de minha vida.

De forma especial, ao Professor Fernando Ribeiro da Silva, por ter me apoiado e incentivado de uma forma imprescindível na minha formação e em diversos momentos difíceis, tendo paciência e compreensão.

Ao grande amigo e Professor Benedito Luiz Barbosa de Andrade em memória, por ter me ajudado e oferecido a oportunidade de cursar o Mestrado em Engenharia Mecânica no Instituto Militar de Engenharia.

A minha esposa Patrícia Oliveira de Paula Abreu por ter me apoiado em todos os momentos difíceis desta grande empreitada.

A minha mãe Maria das Graças Machado em memória, grande e fiel torcedora.

A minha tia Aparecida Menna Barreto em memória, por ter me acolhido em sua residência cuidando de mim como aos seus próprios filhos.

A todos os professores do Departamento de Engenharia, por terem compartilhado algo tão valioso durante a realização deste curso, e a todos os outros funcionários por terem me acolhido.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram e me ajudaram para mais esta conquista, muito obrigado.

## SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES .....	7
LISTA DE TABELAS .....	9
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS.....	10
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>15</b>
1.1 Objetivo .....	15
1.2 Posicionamento.....	15
1.3 Revisão Bibliográfica.....	17
<b>2 MODELO REPRESENTATIVO DE ESTRUTURA VEICULAR ELÁSTICA PLANA UTILIZANDO A TÉCNICA DOS GRAFOS DE LIGAÇÃO .....</b>	<b>19</b>
2.1 Introdução .....	19
2.2 Modelo Modal Representativo de uma Estrutura Veicular Elástica Plana por Solução Analítica.....	20
2.3 Modelo de uma Estrutura Veicular Elástica pelo Método dos Elementos Finitos .....	25
2.4 Modelo de uma Estrutura Veicular Elástica utilizando o Método da Análise Modal ..	33
<b>3 MODELOS REPRESENTATIVOS DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS TRIDIMENSIONAIS UTILIZANDO O MÉTODO DA ANÁLISE MODAL E A TÉCNICA DOS GRAFOS LIGAÇÃO .....</b>	<b>42</b>
3.1 Introdução .....	42
3.2 Modelo de uma Estrutura Tridimensional Elástica Simples .....	42
3.3 Modelo de Estrutura Veicular Elástica .....	53
3.3.1 Modelo Físico do Chassi .....	54
3.3.2 Modelo Físico da Suspensão .....	59
3.3.3 Acoplamento dos subsistemas através da técnica do Grafo de Multiligação .....	61
3.3.4 Simulação.....	63
<b>4 CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....</b>	<b>70</b>
4.1 Conclusões .....	70

4.2	Sugestões.....	71
<b>5</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>73</b>
<b>6</b>	<b>APÊNDICE.....</b>	<b>75</b>
6.1	APÊNDICE 1: Modelo de Estrutura Plana Elástica pelo Método da Análise Modal e a Técnica do Grafo Desenvolvido em Script no MATLAB.....	76
6.2	APÊNDICE 2: Modelo do Computador e ODE utilizada nas simulações.....	79

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Viga de Bernoulli-Euler com subsistemas mecânicos .....	20
FIG.2.2	Modelo de sistema distribuído interagindo com subsistemas mecânicos.....	22
FIG.2.3	Modelo pelo método de Newton implementado.....	23
FIG.2.4	Modelo pela técnica dos Grafos de Ligação implementado .....	24
FIG.2.5	Deslocamento vertical do centro de massa de ½ veículo .....	25
FIG.2.6	Elemento de viga plana.....	26
FIG.2.7	Estrutura discretizada com subsistemas mecânicos.....	28
FIG.2.8	Grafo Multiligação representativo do modelo de ½ veículo .....	29
FIG.2.9	Modelo pelo método de Newton implementado para ½ veículo .....	30
FIG.2.10	Modelo pela técnica dos Grafos de Ligação implementado para ½ veículo .....	30
FIG.2.11	Obstáculo para excitação de base (Dimensões em milímetros).....	31
FIG.2.12	Movimento de “bounce” para ½ veículo .....	32
FIG.2.13	Movimento de “pitch” para ½ veículo.....	32
FIG.2.14	Força transmitida ao solo .....	33
FIG.2.15	Grafo Multiligação representativo de ½ veículo através da Análise Modal.....	35
FIG.2.16	Modelo de chassi pela Análise Modal em ambiente SIMULINK.....	36
FIG.2.17	Modos de vibração de ½ veículo .....	37
FIG.2.18	Movimento de “bounce” com e sem utilização da Análise Modal.....	38
FIG.2.19	Movimento de “pitch” com e sem utilização da Análise Modal .....	39
FIG.2.20	Força transmitida ao solo com e sem utilização da Análise Modal.....	39
FIG.2.21	Tensão normal do nó 4 (centro da estrutura) com utilização de dois modos.....	40
FIG.2.22	Tensão normal do nó 4 (centro da estrutura) com utilização de treze modos .....	40
FIG.3.1	Anotação para elemento tridimensional .....	43
FIG.3.2	Modelo simples representativo de veículo completo.....	45
FIG.3.3	Subsistema de suspensão em ambiente SIMULINK .....	46
FIG.3.4	Sistema global em ambiente SIMULINK.....	46
FIG.3.5	Primeiro modo de vibração do chassi (Roll) .....	47
FIG.3.6	Segundo modo de vibração do chassi (Pitch) .....	47
FIG.3.7	Terceiro modo de vibração do chassi (Bounce).....	48
FIG.3.8	Quarto modo de vibração do chassi (Primeiro modo de torção) .....	48



FIG.3.9	Movimento vertical do GDL 4 (Bounce).....	49
FIG.3.10	Movimento angular do GDL 6 (Pitch).....	50
FIG.3.11	Movimento angular do GDL 11 (Roll) .....	50
FIG.3.12	Força transmitida ao solo pela suspensão dianteira .....	51
FIG.3.13	Força transmitida ao solo pela suspensão traseira .....	51
FIG.3.14	Tensão normal do nó 2 com utilização de quinze modos .....	52
FIG.3.15	Modelo físico do veículo completo .....	54
FIG.3.16	Chassi com numeração e dimensão dos elementos .....	55
FIG.3.17	Chassi com numeração de nós e tipos de seções transversais .....	56
FIG.3.18	Modelos físicos das suspensões dianteiras e traseiras .....	59
FIG.3.19	Modelo físico dos eixos rígidos do veículo (Dimensões em milímetros).....	60
FIG.3.20	Acoplamento dos subsistemas ao chassi.....	61
FIG.3.21	Grafo representativo do modelo de ônibus adotado .....	62
FIG.3.22	Subsistema de chassi em ambiente SIMULINK.....	63
FIG.3.23	Deslocamento vertical do assento do motorista (Bounce).....	64
FIG.3.24	Deslocamento angular do assento do motorista (Pitch).....	65
FIG.3.25	Deslocamento angular do assento do motorista (Roll) .....	65
FIG.3.26	Força transmitida ao solo pelas suspensões dianteiras .....	66
FIG.3.27	Força transmitida ao solo pelas suspensões .....	66
FIG.3.28	Torção do chassi .....	67
FIG.3.29	Tensão normal do nó 14 (Ancoragem do feixe de molas traseiro LE) .....	68
FIG.6.1	Gráfico com resultado em Script e SIMULINK .....	77
FIG.6.2	Gráfico com resultado em Script com e sem utilização da análise modal.....	77
FIG.6.3	Tela de configuração de parâmetros do SIMULINK.....	79

## LISTA DE TABELAS

TAB.2.1	Parâmetros para o modelo por solução analítica de ½ veículo .....	24
TAB.2.2	Parâmetros para o modelo discretizado de ½ veículo .....	31
TAB.2.3	Valores de tensões geradas pelo modelo de ½ veículo .....	41
TAB.3.1	Parâmetros para o modelo com estrutura tridimensional .....	49
TAB.3.2	Valores de tensões geradas pelo modelo de estrutura tridimensional .....	53
TAB.3.3	Dimensões e propriedades geométricas das seções do chassi.....	57
TAB.3.4	Propriedades físicas do material.....	58
TAB.3.5	Valores das massas consideradas no modelo .....	58
TAB.3.6	Parâmetros dos subsistemas das suspensões e pneus .....	61
TAB.3.7	Valores de tensões geradas pelo modelo de estrutura de chassi completo.....	69
TAB.6.1	Planilha com resultados em Script com e sem utilização da Análise Modal .....	78

## LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

### ABREVIATURAS

- MEF - Método dos Elementos Finitos  
GDL - Grau(s) de Liberdade  
CG - Centro de Gravidade  
CM - Centro de Massa  
ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas

### SÍMBOLOS

- A - Área da secção reta  
 $b_F$  - Amortecimento suspensão dianteira  
 $b_s$  - Amortecimento suspensão  
 $b_R$  - Amortecimento suspensão traseira  
 $b_u$  - Amortecimento pneu  
[B] - Matriz de amortecimento  
[ $\bar{B}$ ] - Matriz de amortecimento modal  
C - Capacitor  
C - Campo Capacitivo  
e - Esforço  
E - Módulo de Elasticidade  
f - Fluxo  
 $F_{1,2}$  - Esforços externos  
[ $\bar{F}$ ] - Matriz de forças generalizadas  
 $F_{iF}$  - Forças suspensão dianteira  
 $F_{iR}$  - Forças suspensão traseira  
I - Inércia  
I - Campos inerciais  
J - Momento de inércia  
[K] - Matriz de rigidez  
[ $\bar{K}$ ] - Matriz de rigidez modal

$k_F$	- Rigidez suspensão dianteira
$k_{ij}$	- Matriz de energia potencial elástica
$k_n$	- Rigidez modal
$k_s$	- Rigidez suspensão
$k_R$	- Rigidez suspensão traseira
$k_u$	- Rigidez pneu
$L$	- Comprimento de viga
$m$	- Massa
$m_{ij}$	- Matriz de massa consistente
$m_n$	- Massa modal
$[M]$	- Matriz de massa
$MT$	- Matriz de transformação
$p$	- Quantidade de movimento da inércia
$q$	- Deformação / deslocamento dos elementos flexíveis
$Q$	- Forças generalizadas
$R$	- Resistência
$\mathbf{R}$	- Campos resistivos
$S_e$	- Fonte de esforço
$S_f$	- Fonte de fluxo
$T$	- Energia cinética do sistema
$[T]$	- Matriz de transformação
$TF$	- Transformadores
$\mathbf{TF}$	- Transformadores multiportas
$u$	- Deslocamento aproximado
$U$	- Vetor variáveis de entrada
$U_{iF}$	- Variáveis de entrada dianteira
$U_{iR}$	- Variáveis de entrada traseira
$V$	- Energia potencial elástica
$X$	- Vetor das variáveis de estado
$Y$	- Vetor das variáveis de saída
$Y_n$	- Autofunções
$w$	- Deslocamento transversal em função da posição e do tempo
$\alpha$	- Coeficiente de amortecimento proporcional

- $\beta$  - Coeficiente de amortecimento proporcional
- $\rho$  - Massa específica
- $\psi$  - Funções de interpolação
- $\theta_D$  - Ângulo da travessa dianteira com a horizontal
- $\theta_T$  - Ângulo da travessa traseira com a horizontal
- $\zeta$  - Fração de amortecimento
- $\varepsilon$  - Deformação

## RESUMO

Neste trabalho aplicam-se os procedimentos da técnica dos Grafos de Ligação e do Método da Análise Modal, por representação clássica e modal, na modelagem da dinâmica vertical de veículos automotores leves e pesados, com estruturas de chassi flexíveis planas e tridimensionais.

Modelos por soluções analíticas e discretizados pelo Método dos Elementos Finitos são apresentados explorando a característica modular da técnica dos Grafos, que permite interagir subsistemas distintos, facilitando a implementação computacional pelo programa MATLAB/SIMULINK.

Estes modelos são simulados sob os efeitos de excitações de base, dadas a partir de fluxos prescritos por funções em degrau e por uma transformação geométrica, obtendo-se resultados gráficos para análises do comportamento dinâmico da estrutura e ainda se avaliando o número de modos necessários a sua representação, demonstrando e validando os procedimentos propostos.

## ABSTRACT

In this work we apply the Technical Bond Graphs and the Method of Modal Analysis by classical and modal representation procedures in modeling the vertical dynamics of heavy and light automotive vehicles, with flat flexible and three-dimensional chassi structures.

Models are presented through analytical solutions and discretized by the Finite Element Method exploring the modular characteristic of graphs technique which allows different subsystems to interact, facilitating the computational implementation by MATLAB / SIMULINK.

These models are simulated on the effects of excitations through references given from flows prescribed by functions on step and by a geometric transformation, obtaining graphic results to analyze the dynamic behavior of the structure and even evaluating the number of ways necessary for its representation, demonstrating and validating the proposed procedures.

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 OBJETIVO

O principal objetivo deste trabalho é explorar a utilização da técnica generalizada dos Grafos de Ligação na modelagem da dinâmica vertical de veículos automotores com chassis flexíveis. Utilizam-se os procedimentos desta técnica no desenvolvimento de modelos de estruturas veiculares elásticas, por representação modal, modeladas por justaposição modal e clássica, sujeitas a excitação de base. Os modelos desenvolvidos em computador, caracterizando o comportamento dinâmico de um veículo, têm como objetivo validar os procedimentos utilizados, através de análises dos resultados obtidos por simulação.

## 1.2 POSICIONAMENTO

A modelagem da dinâmica de veículos terrestre vem sendo de grande interesse de diversas áreas da engenharia desde quando surgiram os primeiros automóveis no século XIX. A necessidade de melhorar itens como a segurança, o conforto e o desempenho ao longo do tempo é o que impulsiona o desenvolvimento de modelos matemáticos cada vez mais complexos, objetivando uma descrição mais detalhada do veículo e de seus subsistemas.

O processo de modelagem normalmente é feito em função do tipo de análise que se quer realizar e hipóteses simplificadoras, considerando o comportamento do veículo submetido a ambientes diversos e reações de carga. De maneira geral, os modelos que consideram a interação entre mais de um destes comportamentos são mais complexos que aqueles que os tratam separadamente.

Na dinâmica vertical se estuda o comportamento do veículo e seus ocupantes quando eles são submetidos a excitações que podem ser externas (pavimento) ou internas (roda, motor, transmissão). Comumente em inglês é chamado de “ride”. A utilização de modelos que consideram a estrutura do veículo como corpos rígidos são normalmente empregados para estes casos, devido sua versatilidade. Porém a hipótese de que a estrutura é rígida nem sempre é adequada, principalmente para os veículos pesados em que a flexibilidade se torna relevante, em função das deformações apreciáveis a que ficam sujeitas suas estruturas.



A modelagem de estruturas veiculares elásticas ganhou um grande impulso com o desenvolvimento e difusão de computadores com maior capacidade de armazenamento e velocidade de processamento e a viabilidade da utilização de ferramentas computacionais e métodos numéricos mais elaborados. O Método dos Elementos Finitos, particularmente, tem se mostrado uma ferramenta eficaz na modelagem de meios contínuos, porém sua principal dificuldade se encontra na complexidade matemática do acoplamento dinâmico com outros subsistemas.

A técnica dos Grafos de Ligação (“Bond Graphs”) surge, portanto, como uma alternativa na modelagem de veículos flexíveis, devido ao seu procedimento generalizado e através da sua característica modular, para facilitar o acoplamento entre subsistemas contínuos e discretos e implementação computacional pelo software MATLAB/SIMULINK que apresenta facilidades de cálculo e representação em módulos.

A primeira abordagem utilizada para modelar o problema de estruturas flexíveis utilizando a técnica dos Grafos de Ligação foi através da análise modal, apresentada por KARNOPP *et al.* (1990). Nesta análise parte-se da solução da parte homogênea da equação diferencial parcial de governo do sistema estrutural, e considerando as condições de contorno, determinam-se suas autofunções. Constrói-se então o grafo de ligação representativo dos modos normais da estrutura, que representa as equações modais desacopladas do sistema estrutural. A utilização desta metodologia da análise modal, no entanto, apresenta uma desvantagem, que é o conhecimento das autofunções do problema. A obtenção analítica de suas autofunções se torna difícil, devido principalmente, às condições de contorno do problema, o que torna seu emprego limitado.

A outra abordagem ao problema de estruturas flexíveis representada por análise modal utilizando a técnica dos Grafos de Ligação, que será utilizada neste trabalho, foi desenvolvida por Da SILVA (1994). Nela o modelo dinâmico da estrutura, alia as vantagens do Método dos Elementos Finitos à versatilidade e característica modular da técnica dos Grafos de Ligação, não sofrendo as mesmas limitações do modelo contínuo. A utilização do Grafo de Multiligação beneficia a representação pela técnica dos Grafos de Ligação para facilitar o acoplamento dinâmico entre subsistemas.

Desta forma, a motivação deste trabalho está no emprego do procedimento da técnica dos Grafos de Ligação, explorando sua característica modular que permite a sua representação por blocos, interagindo diferentes subsistemas, contínuos ou discretizados, além de redução de

ordem dos modelos, onde através de metodologias existentes, uma estrutura pode ser representada por apenas alguns graus de liberdade, selecionados a partir de algum critério.

### 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

JAZAR (2008) apresenta conhecimentos fundamentais utilizados no desenvolvimento de programas de computador, para análise do comportamento de modelos dinâmicos veiculares rígidos planos, baseados em conceitos da dinâmica de Newton e Euler para as equações de movimento.

Segundo KARNOPP (1990), na representação de um sistema dinâmico distribuído, o problema deve ser reformulado sempre que as condições de contorno mudem. Porém na decisão de se representar um chassi como uma viga, não há definições de condições de contorno e sim uma adição de elementos físicos, tais como componentes de suspensão, motores, etc., introduzindo a técnica do Grafo de Ligação onde são utilizados os resultados oriundos da análise de modos e frequências naturais referidos a equação diferencial parcial de governo do problema.

BESSA (2000) adota o Método dos Elementos Finitos como procedimento numérico para o cálculo de uma solução aproximada do problema de uma estrutura de viga destacando-o como uma poderosa ferramenta na representação de estruturas complexas caracterizado por reduzir um sistema contínuo de infinitas variáveis a um modelo com um número finito de graus de liberdade.

Segundo Da SILVA (1994) que propõe um procedimento para representação de estruturas o Método dos Elementos Finitos é perfeitamente aplicável a técnica do Grafo de Multiligação. Deste modo, devido à característica modular da técnica dos Grafos de Ligação, pode-se acoplar qualquer subsistema à estrutura, obtendo um grafo do modelo dinâmico global representado por blocos diretamente relacionados.

Da ROCHA (1998) apresenta um procedimento da análise estrutural dinâmica através da técnica dos Grafos de Ligação na modelagem de veículos pesados com estrutura flexíveis, discretizada pelo Método dos Elementos Finitos acoplando subsistemas de parâmetros concentrados (passageiros, motor e suspensão) com o subsistema de parâmetros distribuídos (chassi).

Segundo CRAIG (1981) a superposição de modos consiste em obter as coordenadas físicas de um sistema através da transformação das coordenadas generalizadas de seu desacoplamento, onde se utiliza matrizes transformadas diagonais congruentes, tendo como primeiro passo a determinação dos modos naturais.

Pelo método de análise modal para múltiplos graus de liberdade segundo BATHE, K. J. & E. L. WILSON (1976), através de auto vetores é possível obter matrizes de massa e rigidez diagonais reduzidas, sendo que o número de modos a serem utilizados dependerá da efetividade da solução que se deseja para problemas de dinâmica de estruturas, portanto, vantajoso para se diminuir o custo computacional.

Parte-se, portanto, dos modelos propostos por estes autores para realizar o desenvolvimento de procedimentos de modelagem de um sistema de meio veículo e um veículo completo representado por uma estrutura flexível de chassi acoplada a subsistemas de massa, mola e amortecedor pela técnica dos Grafos de Ligação implementados computacionalmente através de scripts e diagramas de blocos do MATLAB/SIMULINK demonstrando sua característica modular e ainda utilizando a vantagem do método da análise modal.

## **2. MODELO REPRESENTATIVO DE ESTRUTURA VEICULAR ELÁSTICA PLANA UTILIZANDO A TÉCNICA DOS GRAFOS DE LIGAÇÃO**

### **2.1 INTRODUÇÃO**

A modelagem do comportamento dinâmico de veículos é uma área em constante crescimento e, por consequência, a utilização de modelos que venham a representar o modelo real vem sendo um grande desafio aos engenheiros na busca de melhorar itens como segurança, conforto e desempenho dos veículos, otimizando projetos no que diz respeito a tempo e custos.

Neste capítulo utilizou-se a técnica dos Grafos de Ligação, que tem se mostrado bastante eficiente devido sua generalização e característica modular, permitindo a modelagem de subsistemas isolados para uma posterior representação do sistema como um todo, na modelagem de meio veículo primeiramente através de soluções analíticas para uma viga e, posteriormente, uma representação um modelo discretizado pelo Método dos Elementos Finitos, com a utilização dos chamados Grafos de Multiligação que manipula grandezas vetoriais e matriciais.

Esta representação de meio veículo, “Half car”, embora não completa, é muito utilizada para estudos do comportamento da dinâmica vertical de veículos, quando eles são submetidos a excitações geralmente independentes, sendo possível observar grandezas como o deslocamento vertical (“bounce”), rotações na direção “y” (“pitch”) e deslocamentos relativos entre rodas e suspensões, deformações de molas, tensões induzidas no chassi, esforços sobre o pavimento.

Além disso, para o modelo discretizado, emprega-se procedimentos para transformações de matrizes, obtidas a partir da justaposição modal e critérios de seleção de modos, que permitem uma representação adequada do modelo, através dos procedimentos dos Grafos de Multiligação, em um processo de redução de ordem das matrizes características da estrutura.

## 2.2 MODELO MODAL REPRESENTATIVO DE UMA ESTRUTURA VEICULAR ELÁSTICA PLANA POR SOLUÇÃO ANALÍTICA

Para o modelo representado por uma estrutura elástica de meio veículo (“Half Car”) utiliza-se uma análise dinâmica empregada em estruturas de viga por alguns autores como KARNOPP *et al.* (1990), que apresentaram soluções analíticas para a equação diferencial parcial de governo de uma viga de Bernoulli-Euler submetida, neste caso, a esforços externos resultantes de subsistemas dinâmicos acoplados, conforme mostrado na FIG. 2.1.

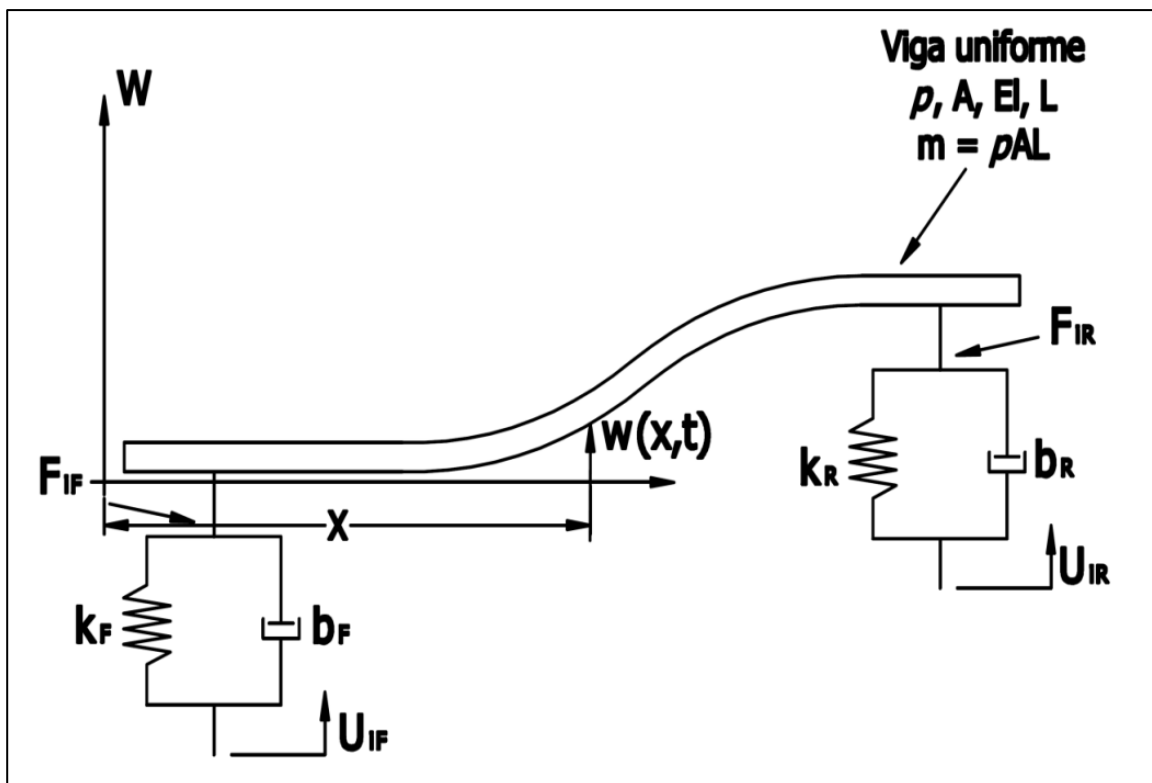


FIG. 2.1 Viga de Bernoulli-Euler com subsistemas mecânicos.

A equação pode ser expressa, em termos do seu deslocamento transversal  $w(x,t)$  da posição  $x$  no tempo  $t$ , por:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho_v A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F_1 + F_2 \quad \text{EQ. 2.1}$$

Onde  $E$ ,  $I$ ,  $\rho_v$  e  $A$  são respectivamente, o módulo de elasticidade, o momento de inércia, a massa específica e a área da seção reta da viga e  $F_1$  e  $F_2$  são os esforços externos.

Considerando, como na FIG. 2.1, com forças externas aplicadas em  $x=0$  e  $x=L$  as condições de contorno em que a força cortante e o momento são nulos, podem ser expressas em função do deslocamento transversal  $w(x,t)$  como:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0 \quad \text{EQ. 2.2}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L, t) = 0 \quad \text{EQ. 2.3}$$

Assim para estas condições de contorno, obtêm-se, na bibliografia disponível (KARNOPP *et al.*, 1990) as autofunções ( $Y_n$ ) e as frequências naturais ( $\omega_n$ ) referentes à solução da EQ. 2.1 sem a aplicação dos esforços externos.

$$Y_n(x) = (\cos k_n L - \cos k_n x)(\sin k_n x - \sinh k_n x) - (\sin k_n L - \sinh k_n L)(\cos k_n x - \cosh k_n x) \quad \text{EQ. 2.4}$$

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{\rho A} \frac{(k_n L)^4}{L^4} \quad \text{EQ. 2.5}$$

Onde os valores para  $k_n L$  podem ser obtidos por representação gráfica através da equação característica, expressa por:

$$\cosh k_n L \cos k_n L = 1 \quad \text{EQ. 2.6}$$

O Grafo de Ligação indicado para este sistema é apresentado na FIG. 2.2, baseado no modelo proposto por KARNOPP *et al.* (1990), com componentes de suspensão nas extremidades e com um oscilador atravessando sua extensão. Isto é devido à característica modular da técnica que facilita o acoplamento da estrutura a qualquer subsistema mecânico.

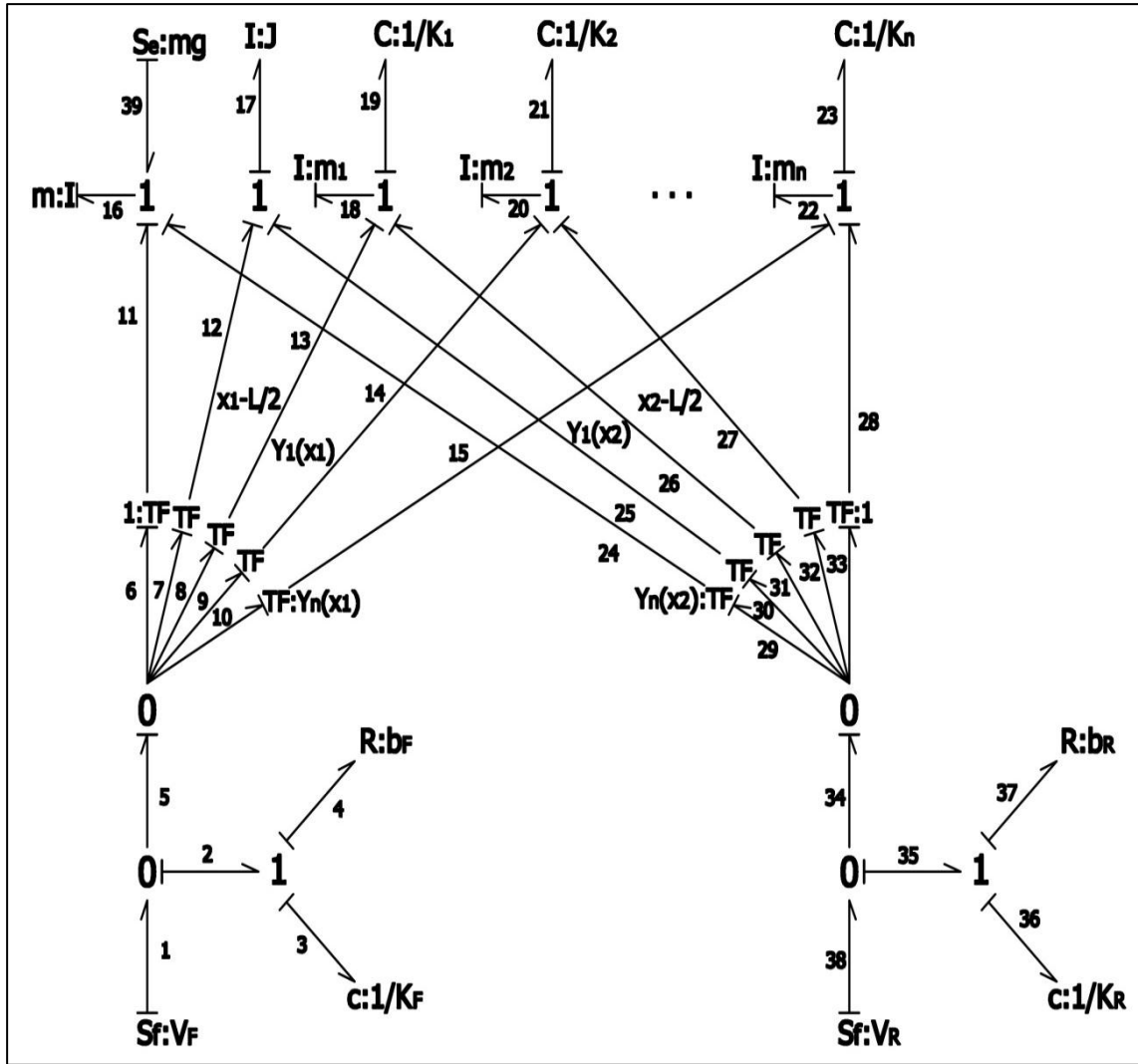


FIG. 2.2 Modelo de sistema distribuído interagindo com subsistemas mecânicos.

Para este Grafo na FIG. 2.2 os modos de corpo rígido, que estarão presentes sempre que os limites de força livre são assumidos, aparecem apenas como elementos de inércia, sem rigidez modal associada. O primeiro parâmetro de inércia é a massa ( $m$ ) da estrutura e o segundo é o momento de inércia ( $J$ ). Os elementos transformadores ( $TF$ ) ligados aos modos de corpo rígido aplicam as forças e momentos a estes elementos. O resto da estrutura é representado como uma barra onde a massa modal e rigidez modal são dadas por:

$$m_n = \frac{\rho AL}{2} \quad \text{EQ. 2.7}$$

$$k_n = m_n \omega_n^2 \quad \text{EQ. 2.8}$$

A partir da ilustração da FIG. 2.2 utilizam-se os procedimentos da técnica dos Grafos de Ligação para obtenção direta do modelo de estado linear expresso por:

$$\dot{X} = AX + BU \quad \text{EQ. 2.9}$$

$$Y = CX + DU \quad \text{EQ. 2.10}$$

Onde  $X$  é o vetor de variáveis de estado,  $U$  é o vetor de variáveis de entrada, e  $Y$  é o vetor de variáveis de saída e  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são as matrizes com os coeficientes representativos das propriedades físicas do sistema e dos transformadores que representam as contribuições de cada modo na solução do problema.

A partir de um sistema de equações desenvolvido na forma matricial, pode-se obter o comportamento da estrutura tendo com referência um ponto previamente definido do CM.

Na FIG. 2.3 apresenta-se um modelo para uma análise de coerência de resultados proposto na bibliografia JAZAR (2008) que utiliza o método de Newton-Euler para as equações diretas de movimento de meio veículo implementado em MATLAB/SIMULINK assim como na FIG. 2.4 o modelo desenvolvido pela técnica dos Grafos de Ligação através de um bloco de espaço-estado, acoplados a um sistema simples de mola e amortecedor.

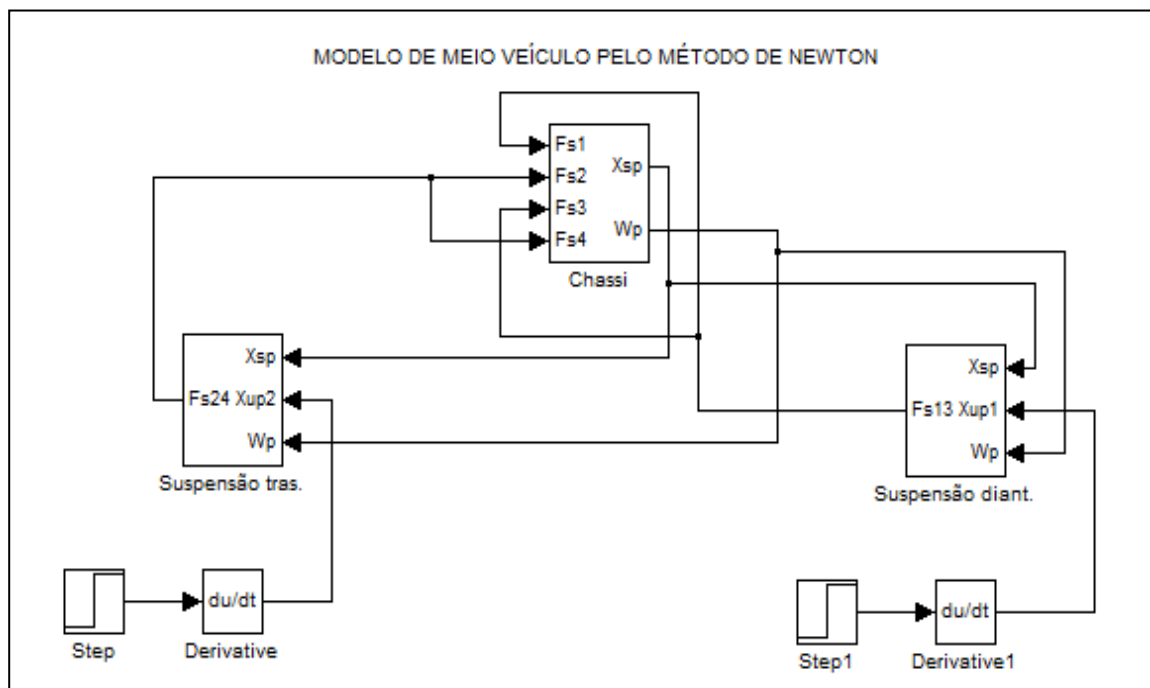


FIG. 2.3 Modelo pelo método de Newton implementado.



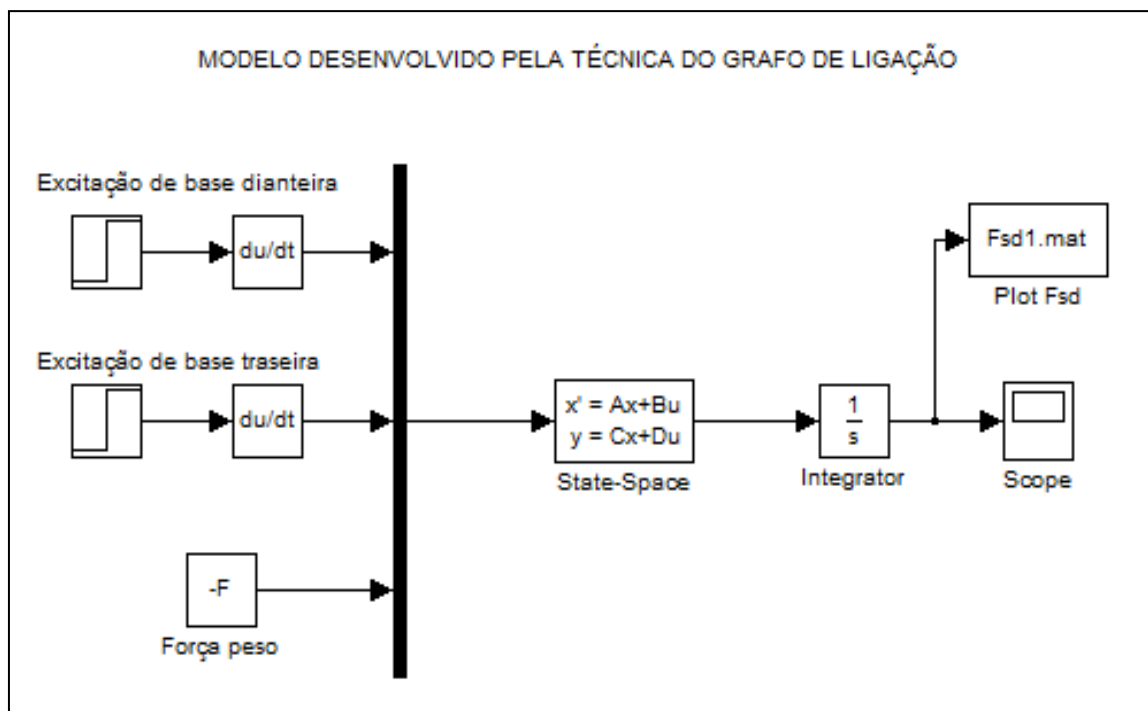


FIG. 2.4 Modelo pela técnica dos Grafos de Ligação implementado.

A FIG. 2.5 apresenta o deslocamento vertical do centro de massa dos modelos, para um chassi com uma distância do eixo dianteiro ao CM de 45%, conforme os parâmetros da TAB. 2.1, utilizados nos exemplos de JAZAR (2008).

TAB. 2.1 Parâmetros para o modelo por solução analítica de 1/2 veículo.

PARÂMETROS	VALOR (unid.)
Distância entre eixos	2,58 m
Massa do chassi	500 kg
Momento de Inércia (J)	870 kg.m <sup>2</sup>
Constante de rigidez da suspensão	13.000 N/m
Constante de amortecimento da suspensão	980 Ns/m

Pode-se observar comparando os resultados obtidos uma expressiva aproximação dos modelos desenvolvidos, mas não com precisão, principalmente quando os mesmos são expostos a excitações de base dada por uma função degrau que simula o veículo passando por um obstáculo (meio-fio) a uma velocidade de 10 km/h, apresentando pequenos picos no início do período oscilatório, devido ao deslocamento estar associado a deformações da estrutura dadas pela análise modal do modelo gerado pela técnica do Grafo de Ligação.

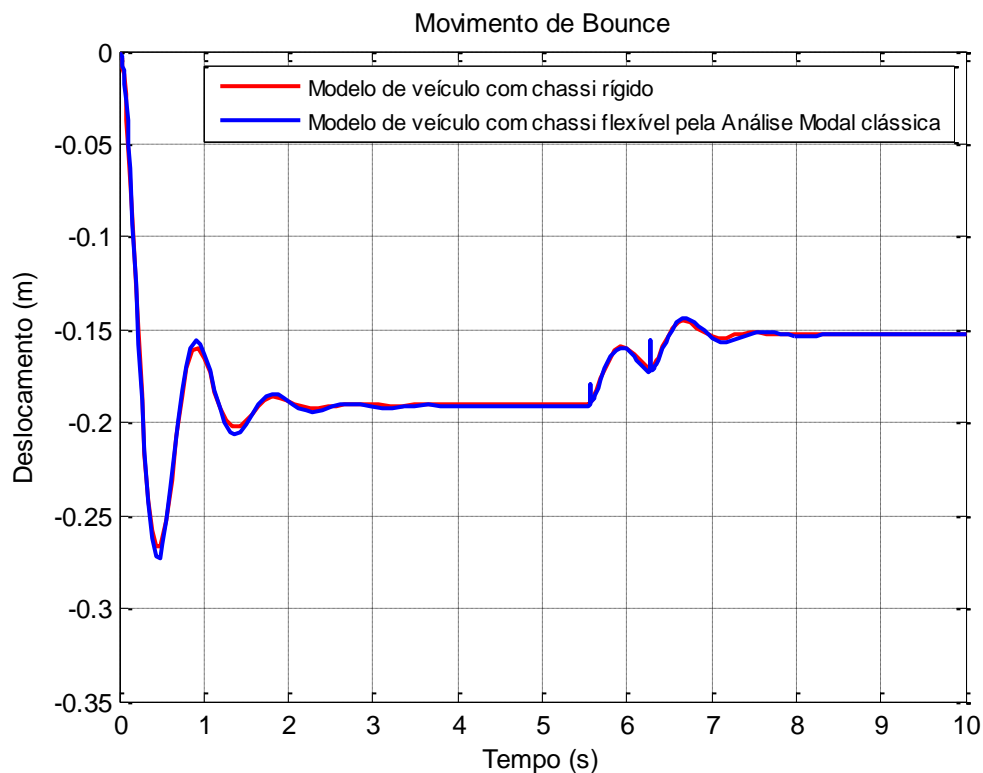


FIG. 2.5 Deslocamento vertical do centro de massa de  $\frac{1}{2}$  veículo.

Outros modelos podem ser facilmente obtidos pela técnica do Grafo de Ligação. Porém a utilização deste modelo limita-se aos casos em que se conheça a solução homogênea da equação de governo do subsistema estrutural.

Nesta fase do trabalho, portanto, se demonstra o procedimento comparando resultados obtidos pelo método de Newton-Euler e pelas variáveis de estado com a intenção de se validar um modelo de estrutura veicular elástica representada pelos três primeiros modos de vibração, além dos de corpo rígido utilizando a técnica do Grafo de Ligação, oferecendo uma base para desenvolvimento e análise a outros modelos.

### 2.3 MODELO DE UMA ESTRUTURA VEICULAR ELÁSTICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos empregado neste trabalho possibilita transformar problemas contínuos (de infinitos graus de liberdade) de estrutura em problemas discretos (finitos graus de liberdade), com parâmetros concentrados através da EQ. 2.11 proposta por

Lagrange que é bastante utilizada em sistemas contínuos de estruturas devido a facilidade do equacionamento, possibilitando obter-se as mesmas matrizes determinadas pelo MEF por meio de um método variacional. A determinação da Energia Potencial em termos das coordenadas generalizadas do sistema levará a obtenção da matriz de rigidez, enquanto que a Energia Cinética levará a obtenção da matriz de massa consistente.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{EQ. 2.11}$$

O elemento de viga plana mostrado na FIG. 2.6 possui deslocamentos transversais e rotações no plano da viga, onde a matriz de massa  $m_{ij}$  é calculada da mesma forma que o elemento de barra dada pela EQ. 2.12 e a matriz de rigidez  $k_{ij}$  é determinada a partir de desenvolvimento análogo ao da barra, porém utilizando-se a energia potencial elástica de uma viga que é expressa pela EQ. 2.13.

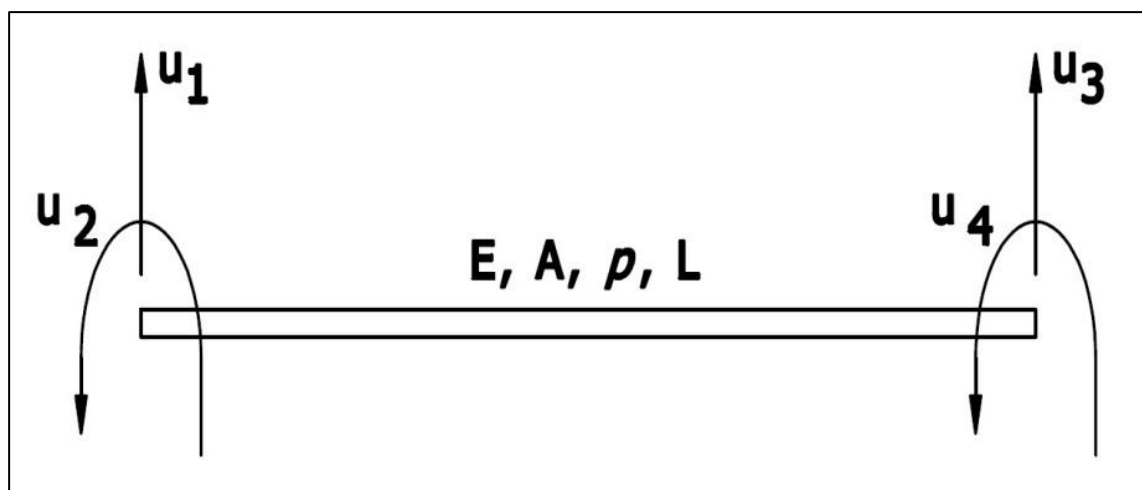


FIG. 2.6 Elemento de viga plana.

A energia cinética da viga e a deformação elástica associada aos deslocamentos  $u(x,t)$ , são expressas por:

$$T = \frac{1}{2} \int_L \rho A \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \quad \text{EQ. 2.12}$$

$$V = \frac{1}{2} \int_L EI \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad \text{EQ. 2.13}$$

Considerando o campo de deslocamento aproximado  $u(x,t)$  que é representado pelo somatório de produtos de funções em posição ( $x$ ) e no tempo ( $t$ ), temos:

$$u(x,t) \cong \sum_{i=1}^n \psi_i(x)u_i(t) \quad \text{EQ. 2.14}$$

Substituindo a EQ. 2.14 em EQ. 2.12 e EQ. 2.13, obtêm-se expressões que permitem determinar-se um elemento  $m_{ij}$  correspondente a matriz de massa consistente e um elemento  $k_{ij}$  correspondente a forma discretizada da energia potencial elástica.

$$m_{ij} = \int_L \rho A \psi_i \psi_j dx \quad \text{EQ. 2.15}$$

$$k_{ij} = \int_L EI \frac{\partial \psi_i^2}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_j^2}{\partial x^2} dx \quad \text{EQ. 2.16}$$

Assim para um elemento com quatro graus de liberdade considerando as condições de contorno de um elemento de viga, obtêm-se as funções  $\psi$  de terceira ordem do elemento:

$$\psi_1(x) = 1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3$$

$$\psi_2(x) = x - 2L(x/L)^2 + L(x/L)^3$$

$$\psi_3(x) = 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3$$

$$\psi_4(x) = -L(x/L)^2 + L(x/L)^3$$

EQ. 2.17

Substituindo-se esses polinômios nas EQ. 2.15 e EQ. 2.16 obtêm-se as matrizes de rigidez e massa relacionadas a este elemento.

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad m = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 2.18}$$

A matriz de amortecimento do modelo estrutural adotada é proposta por Rayleigh e pode ser obtida através de uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, conhecida como amortecimento proporcional. Neste caso as constantes de amortecimento  $\alpha$  e  $\beta$ , considerados para a estrutura são de 1% para obtenção de melhor resposta nas simulações (FERREIRA, 2006).

$$[B] = \alpha[M] + \beta[K] \quad \text{EQ. 2.19}$$

Assim, conhecendo-se as matrizes de massa  $M$ , rigidez  $K$  e amortecimento  $B$  de um subsistema estrutural, pode-se representá-lo, com relativa facilidade, através da técnica dos Grafos de Ligação. Este procedimento facilita a obtenção de um modelo matemático que represente a estrutura de chassi com outros subsistemas, mostrado na FIG. 2.7.

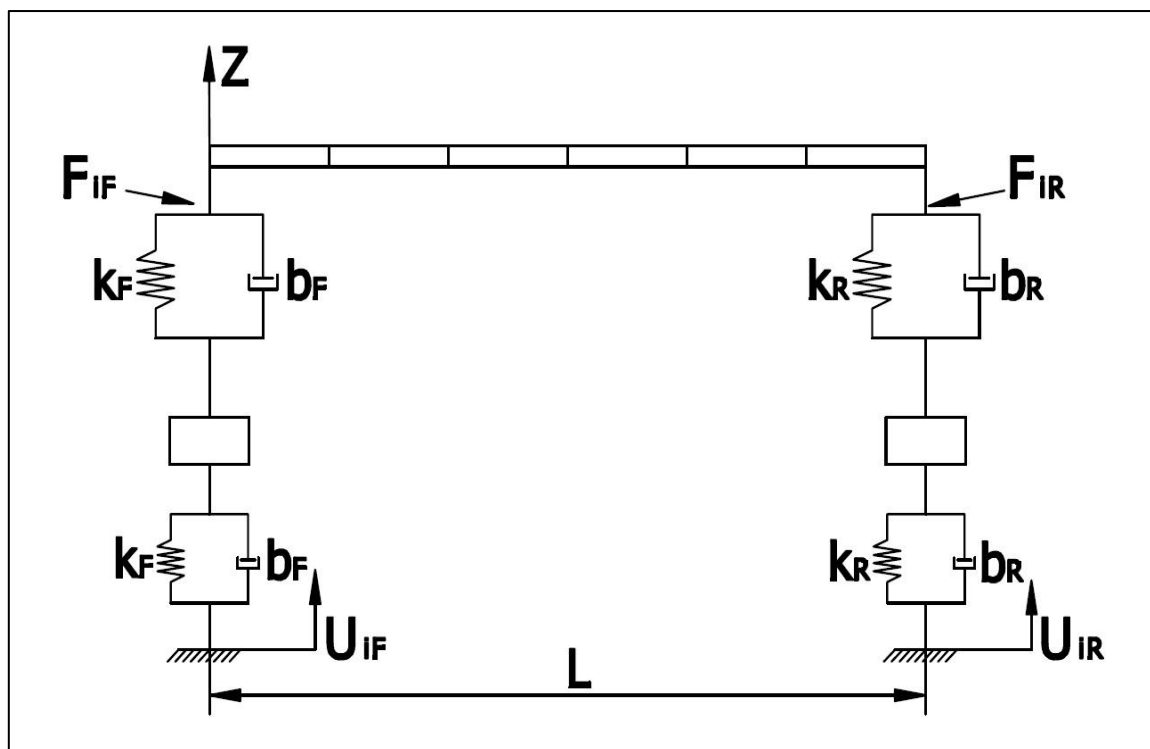


FIG. 2.7 Estrutura discretizada com subsistemas mecânicos.

Com o procedimento proposto por Da SILVA (1994) correlacionam-se as matrizes características da estrutura obtidas pelo Método dos Elementos Finitos com os campos inerciais ( $I$ ), capacitivos ( $C$ ) e resistivos ( $R$ ) da técnica dos Grafos de Ligação. O Grafo de Multiligação representativo do sistema de meio veículo é mostrado na FIG. 2.8.

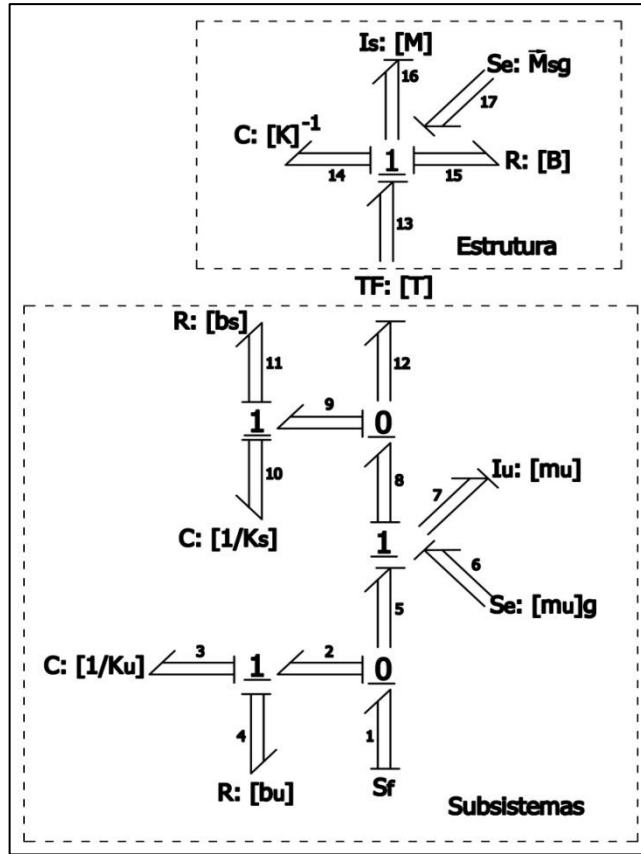


FIG. 2.8 Grafo Multiligação representativo do modelo de 1/2 veículo.

A característica modular da técnica dos Grafos de Ligação e o conceito de campos multiportas  $I$ ,  $R$  e  $C$ , permitem um modelo compacto para a estrutura de chassi, separando-a dos demais subsistemas mecânicos que representam componentes da suspensão, na forma matricial como se verifica através das equações EQ. 2.9 e EQ. 2.10.

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{16} \\ \dot{q}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[B][M]^{-1} & -[K] \\ [M]^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{16} \\ q_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [T] & [I] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{17} \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 2.20}$$

$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T][M]^{-1} & 0 \\ [M]^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{16} \\ q_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{17} \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 2.21}$$

Onde  $p_{16}$  e  $q_{14}$  são a quantidade de movimento e as deformações (deslocamentos) dos graus de liberdade internos do chassi que interagem com os subsistemas externos,  $e_{12}$  e  $e_{17}$  são os esforços no acoplamento entre as suspensões e o chassi e os esforços (pesos) aplicados ao chassi, e  $f_{12}$  e  $f_{16}$  são respectivamente os fluxos no acoplamento entre as suspensões e chassi e dos graus de liberdade internos do chassi.

Conforme já mencionado, o desenvolvimento computacional através do MATLAB/SIMULINK, mostrado na FIG. 2.10 permite que o modelo de  $\frac{1}{2}$  veículo com subsistemas de suspensões com quatro graus de liberdade, seja representado por blocos, onde a estrutura flexível é representada pelas equações EQ. 2.20 e EQ. 2.21 através do bloco de espaço-estado que se acopla aos demais subsistemas facilmente.

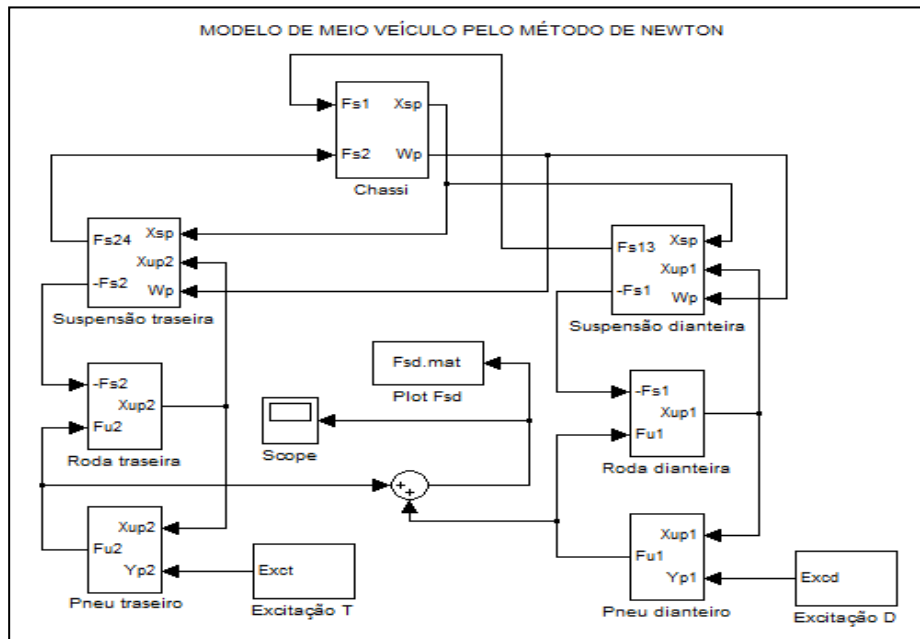


FIG. 2.9 Modelo pelo método de Newton implementado para  $\frac{1}{2}$  veículo.

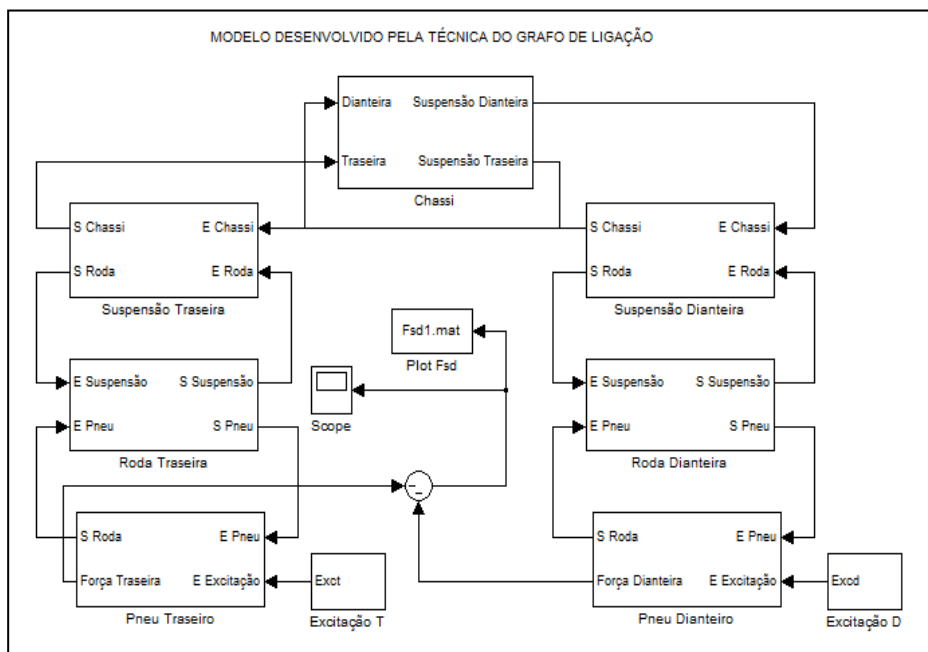


FIG. 2.10 Modelo pela técnica dos Grafos de Ligação implementado para  $\frac{1}{2}$  veículo.

A excitação de base para este caso é dada a partir de fluxos prescritos fornecidos ao modelo pela fonte vetorial  $Sf$  no grafo da FIG. 2.8 por uma transformação da forma geométrica de um trapézio, implementado por somatório de sinais em degrau no MATLAB/SIMULINK. O obstáculo tem sua forma conforme demonstrado na FIG. 2.11, no qual o veículo passa a uma velocidade de 10 km/h, após 20 m de pista, tendo um período de estabilidade antes e após a excitação, totalizando um tempo de quinze segundos de simulação.

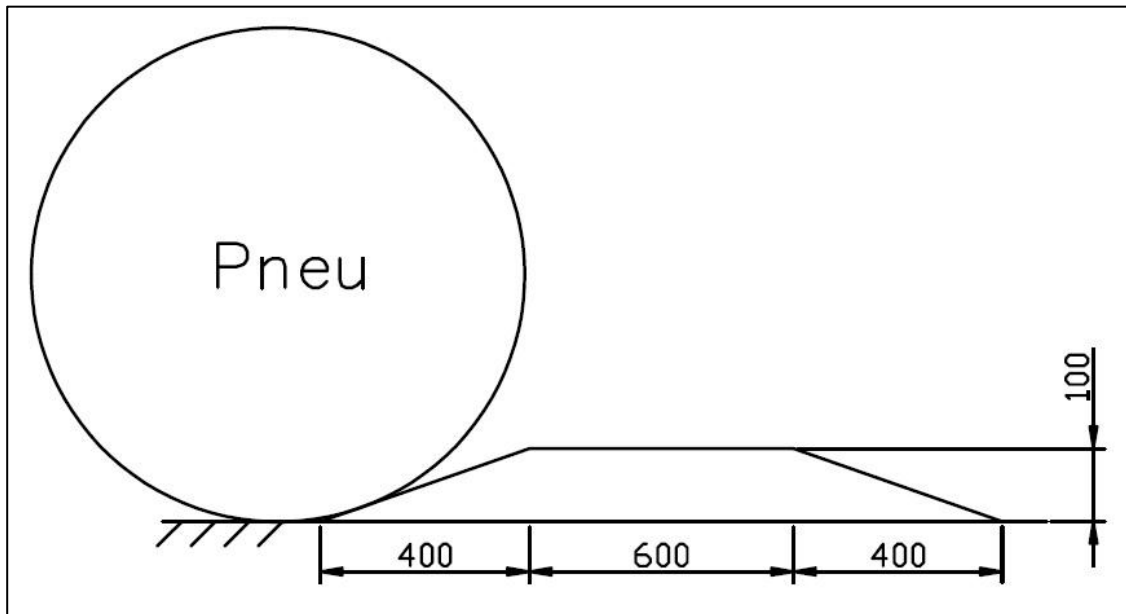


FIG. 2.11 – Obstáculo para excitação de base (Dimensões em milímetros).

As figuras FIG. 2.12, FIG. 2.13 e FIG. 2.14 apresentam os deslocamentos de “bounce” e “pitch” do centro de massa e força transmitida ao solo pelo modelo, para um chassi com uma distância do eixo dianteiro ao CM de 50%, acoplado a subsistemas de massa, mola e amortecedor conforme os parâmetros apresentados na TAB. 2.2.

TAB. 2.2 Parâmetros para o modelo discretizado de ½ veículo.

PARÂMETROS	VALOR (unid.)
Distância entre eixos	2,58 m
Massa do chassi	500 kg
Massa das rodas	35 kg
Constante de rigidez da suspensão	13.000 N/m
Constante de amortecimento da suspensão	980 Ns/m
Constante de rigidez do pneu	160.000 N/m
Constante de amortecimento do pneu	100 N/m



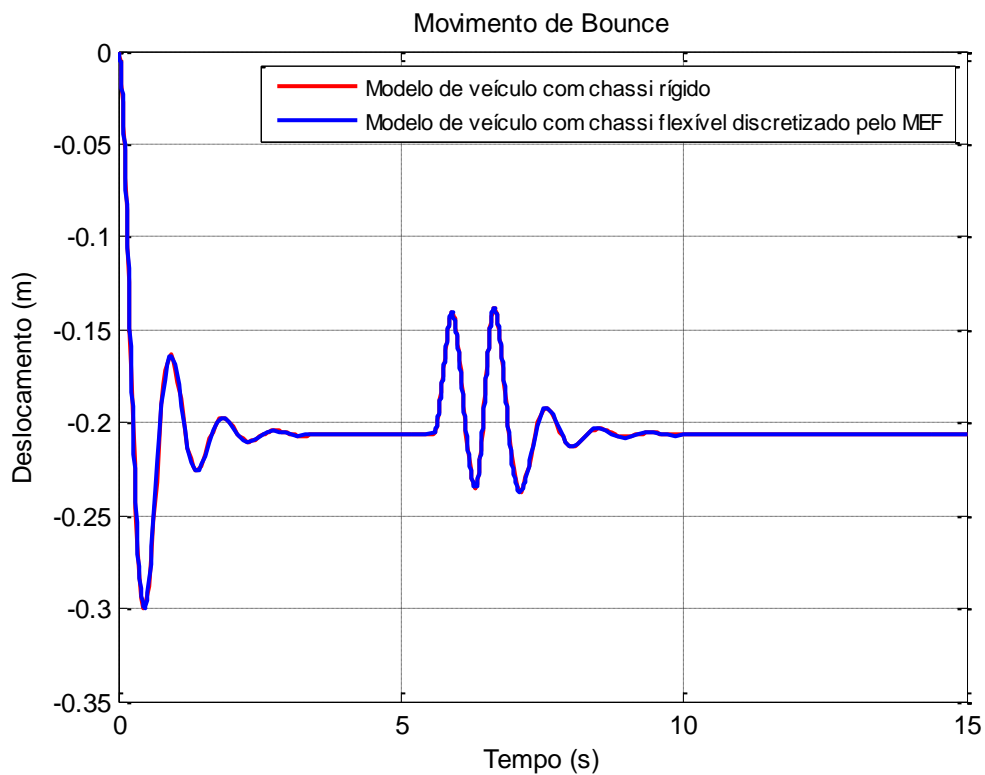


FIG. 2.12 Movimento de “bounce” para ½ veículo.

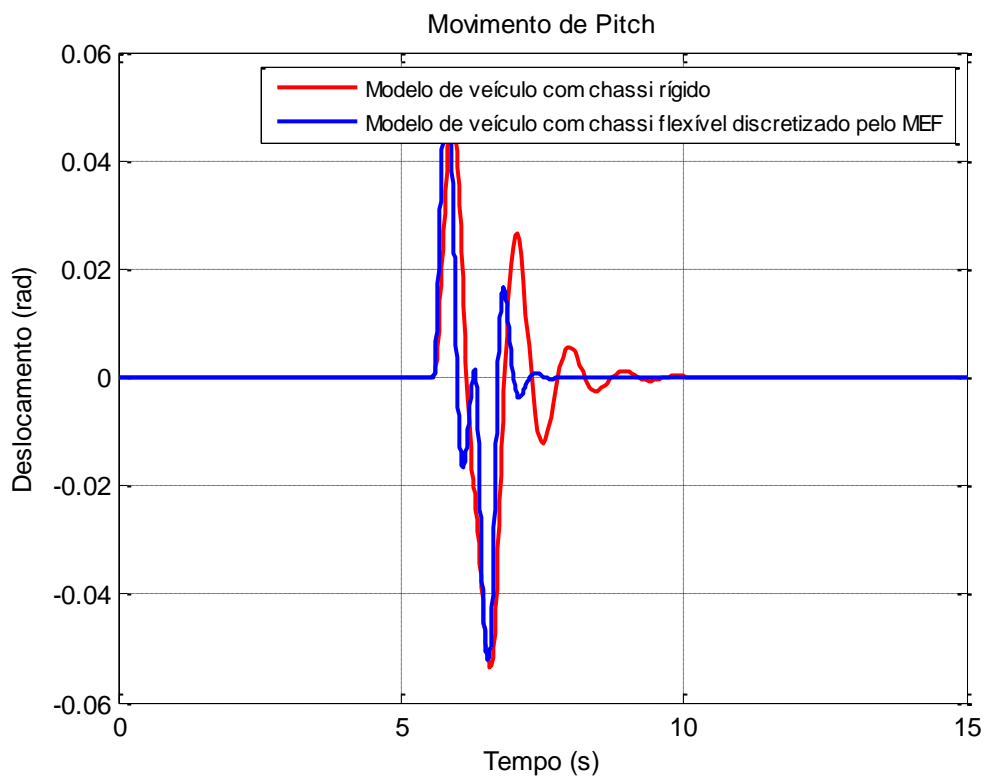


FIG. 2.13 Movimento de “pitch” para ½ veículo.

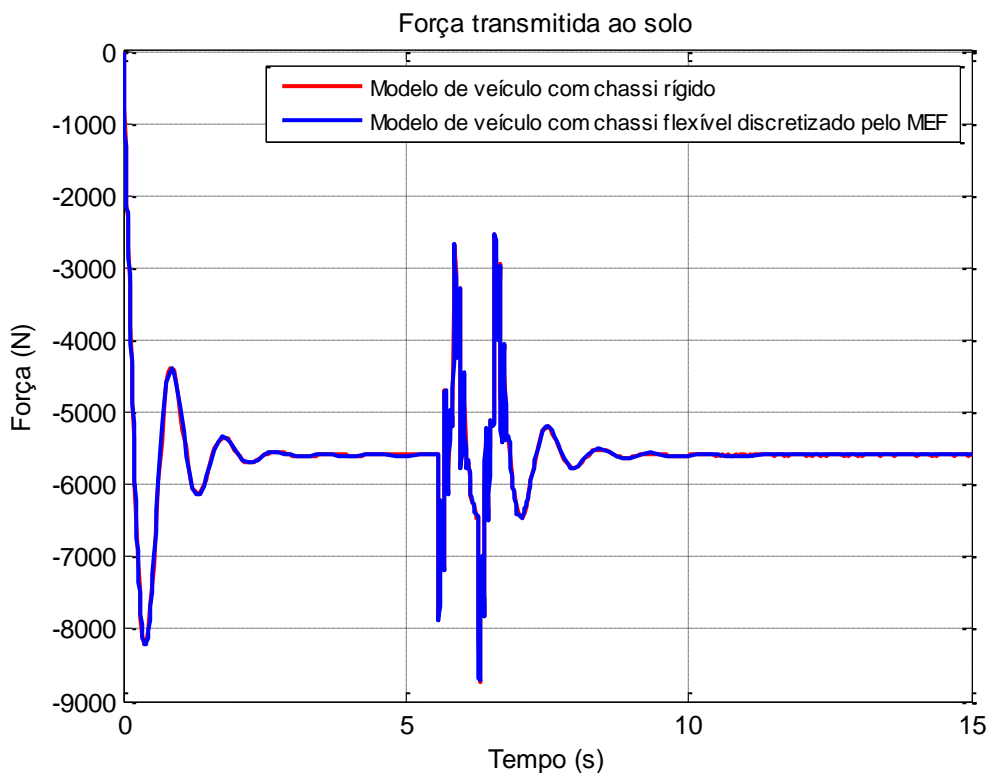


FIG. 2.14 Força transmitida ao solo.

Pode-se observar, comparando os resultados obtidos, uma expressiva aproximação dos modelos desenvolvidos no movimento de “Bounce” e para a força transmitida ao solo que representam uma dinâmica típica de um veículo que passa com as rodas dianteiras e posteriormente com as traseiras por um obstáculo, porém para o movimento de “Pitch”, mostrado na FIG. 2.13 é possível notar que o deslocamento angular referente ao modelo apresentado pelo Grafo de Ligação, também apresenta uma deformação do chassi associada, visto que sua estrutura neste modelo é flexível.

## 2.4 MODELO DE UMA ESTRUTURA VEICULAR ELÁSTICA UTILIZANDO O MÉTODO DA ANÁLISE MODAL

Modelos estruturais podem ter de dez a milhares de graus de liberdade, e análises da dinâmica destas estruturas, geralmente envolvem a determinação de algumas, ou todas, frequências naturais (autovalores) e modos naturais (auto vetores) que satisfaçam a equação EQ. 2.22.

$$(k - \omega^2 M)\Phi = 0 \quad \text{EQ. 2.22}$$

Após este passo pode-se obter as matrizes de massa, rigidez, amortecimento e forças generalizadas da estrutura que são matrizes diagonais determinadas pelas transformações congruentes.

$$\bar{M} = \Phi^T M \Phi \quad \text{EQ. 2.23}$$

$$\bar{K} = \Phi^T K \Phi \quad \text{EQ. 2.24}$$

$$\bar{B} = \Phi^T B \Phi \quad \text{EQ. 2.25}$$

$$\bar{F} = \Phi^T F \quad \text{EQ. 2.26}$$

O procedimento da superposição modal mostrado na EQ. 2.27 permite a transformação das coordenadas generalizadas em físicas que são de interesse para este modelo, tendo a vantagem das matrizes modal no custo computacional quando implementado em MATLAB.

$$u(t) = \Phi \eta(t) = \sum_{r=1}^N \Phi_r \eta_r(t) \quad \text{EQ. 2.27}$$

No entanto o procedimento de superposição de modos pode incluir todos ou uma seleção dos modos do sistema, sendo de grande valia em sistemas que apresentam grande número de graus de liberdade, onde deverá se examinar a possibilidade de truncamento, e os principais fatores do problema devem ser considerados na decisão do número de modos a serem incluídos para se obter resultados desejáveis.

Além disso, considerando as soluções da superposição de modos para um sistema com amortecimento viscoso, tem-se a oportunidade da utilização de mais uma forma clássica de amortecimento, o amortecimento modal como opção para o trabalho através da EQ. 2.28, que é definida a partir da matriz de massa modal  $[\bar{M}]$ , e as frequências naturais  $\omega$ , que segundo CRAIG (1981) tem um importante papel para determinar propriedades dinâmicas de uma estrutura.

$$[\bar{B}] = 2\xi[\bar{M}][\omega] \quad \text{EQ. 2.28}$$

E determina-se a matriz de amortecimento isolando  $B$  conforme a EQ. 2.29.

$$[B] = \Phi^{-T} [\bar{B}] \Phi^{-1} \quad \text{EQ. 2.29}$$

A partir dos modelos mais simples é possível se chegar a modelos mais complexos através análises de modos de sistemas com múltiplos graus de liberdade. Portanto de forma similar a FIG. 2.8 o grafo multiligação representativo do sistema de  $\frac{1}{2}$  veículo, é mostrado na FIG. 2.15.

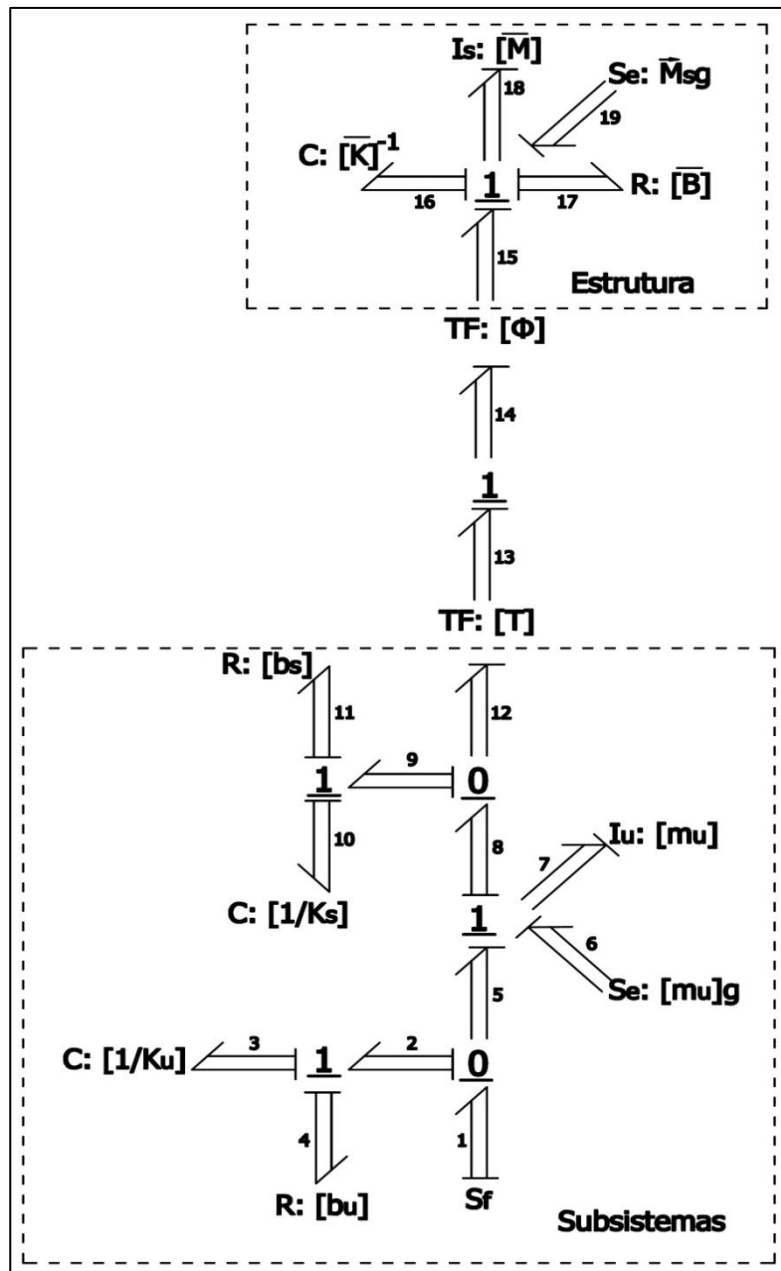


FIG. 2.15 Grafo Multiligação representativo de  $\frac{1}{2}$  veículo através da Análise Modal.

Dessa forma, utilizando as matrizes reduzidas de acordo com o número de modos selecionados dados por  $[\Phi]$ , através das equações para se obter as matrizes diagonais, pode-se facilmente obter o equacionamento de modelo de estado pela técnica dos Grafos de Ligação, para estrutura de chassi conforme as equações EQ. 2.31 e EQ. 2.32. Os subsistemas de suspensão, embora não demonstrados, podem ser equacionados separadamente, aproveitando a característica modular dos Grafos.

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{18} \\ \dot{q}_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\bar{B}][\bar{M}]^{-1} & -[\bar{K}] \\ [\bar{M}]^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{16} \\ q_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\Phi][T] & [I] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{19} \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 2.31}$$

$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T]'[\Phi][\bar{M}]^{-1} & 0 \\ [\bar{M}]^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{16} \\ q_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{19} \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 2.32}$$

O desenvolvimento em MATLAB/SIMULINK já utilizado serve para uma comparação de coerência de resultado para o novo modelo que utiliza as matrizes acima, além da equação EQ. 2.27. O modelo nesta fase possui as mesmas características vistas anteriormente, incluindo a excitação de base. A FIG. 2.16 mostra o chassi do modelo no ambiente SIMULINK, onde se observa as entradas e saídas deste subsistema.

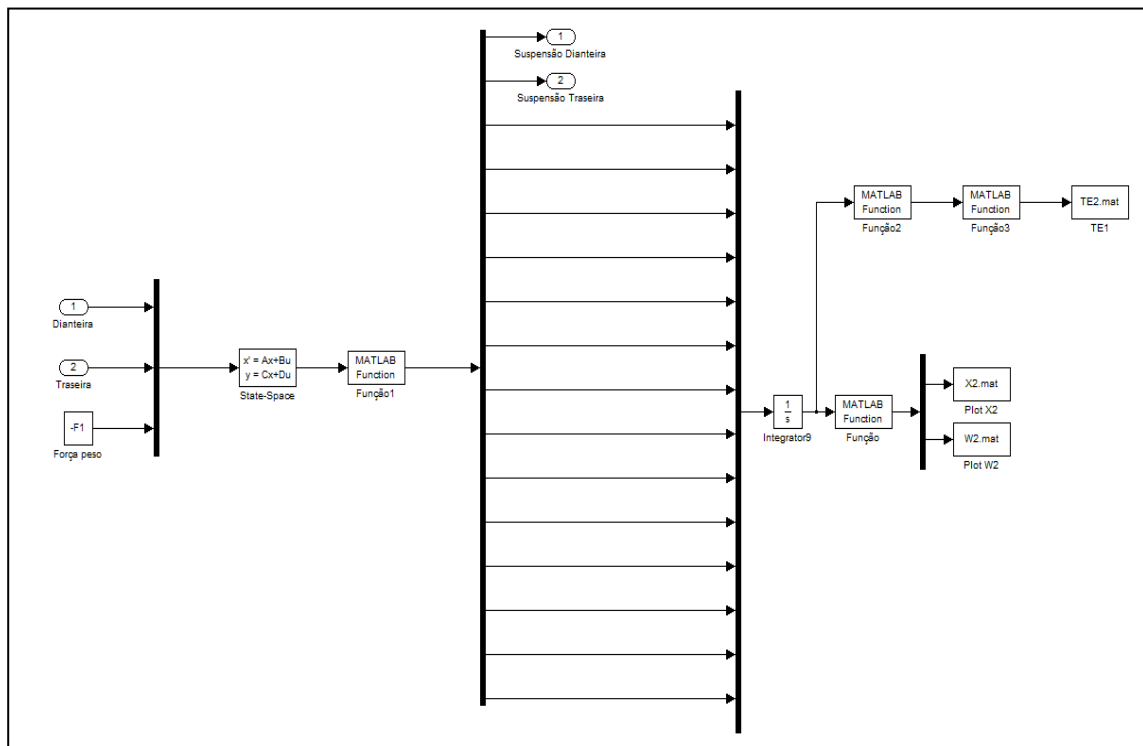


FIG. 2.16 Modelo de chassi pela Análise Modal em ambiente SIMULINK.

O critério adotado neste trabalho para a seleção de modos a serem utilizados, parte de análises dos autovalores e auto vetores obtidas pela função EIG do programa MATLAB (MATHWORKS, 2008) através das matrizes de rigidez e massa da estrutura de chassi do veículo. Na FIG. 2.17 é possível se observar os quatro primeiros modos de vibração da estrutura plana onde se tem dois modos de corpo rígido e dois modos de flexão, o que facilita a escolha do número de modos representativos deste sistema.

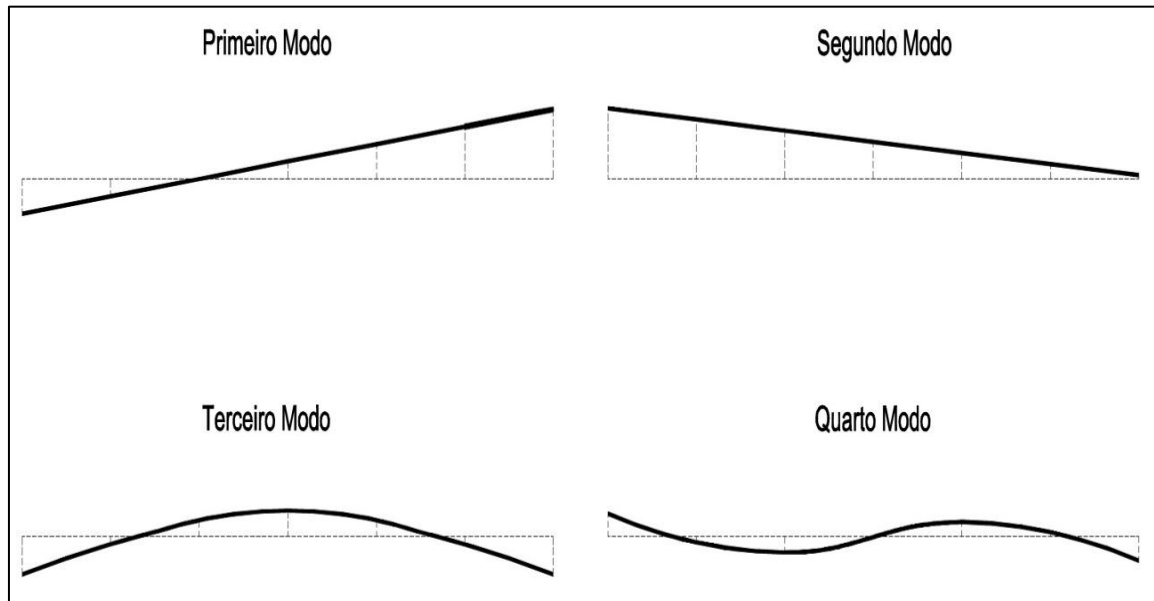


FIG. 2.17 Modos de vibração de ½ veículo.

Para os procedimentos dos Grafos, em que se pode extrair como sinais de saída os esforços e fluxos, a partir do programa adotado obtêm-se outros dados relevantes ao trabalho, como as tensões, onde as deformações estão relacionadas a um somatório da derivada segunda das funções de interpolação definida como inverso do raio de curvatura, onde  $x$  é o ponto do elemento em análise, neste caso nos nós e  $u$  os graus de liberdade referentes à translação e flexão do elemento multiplicada pela distância entre a linha neutra até o ponto da superfície da viga.

$$\frac{1}{\rho} \cong \sum \psi_i''(x)u_i(t) \quad \text{EQ. 2.33}$$

$$\varepsilon \cong \frac{1}{\rho}c \quad \text{EQ. 2.34}$$

A partir das EQ. 2.33 e EQ. 2.34, as análises de tensões sobre a estrutura podem ser obtidas através da Lei de Hooke que pode ser expressa pela EQ. 2.35 vista em POPOV *et al.* (1978) que apresenta soluções de tensão máxima para problemas estáticos que também são utilizadas para verificação de coerência dos resultados obtidos.

$$\sigma = \varepsilon E \quad \text{EQ. 2.35}$$

Na simulação realizada com o modelo de ½ veículo, tanto com a utilização de todos quanto com a seleção de modos que, neste caso, foram dois, que representam os modos de corpo rígido em um total de quatorze, obteve-se resultados de algumas grandezas do comportamento dinâmico, a um custo computacional mais baixo, mantendo as características mecânicas do modelo anterior adotando também o amortecimento proporcional com constantes de proporcionalidade de 1%, com uma carga pontual sobre o grau de liberdade referente à translação do CM, o que facilitou o cálculo para tensão do modelo estático para uma análise do gráfico gerado de coerência de resultados.

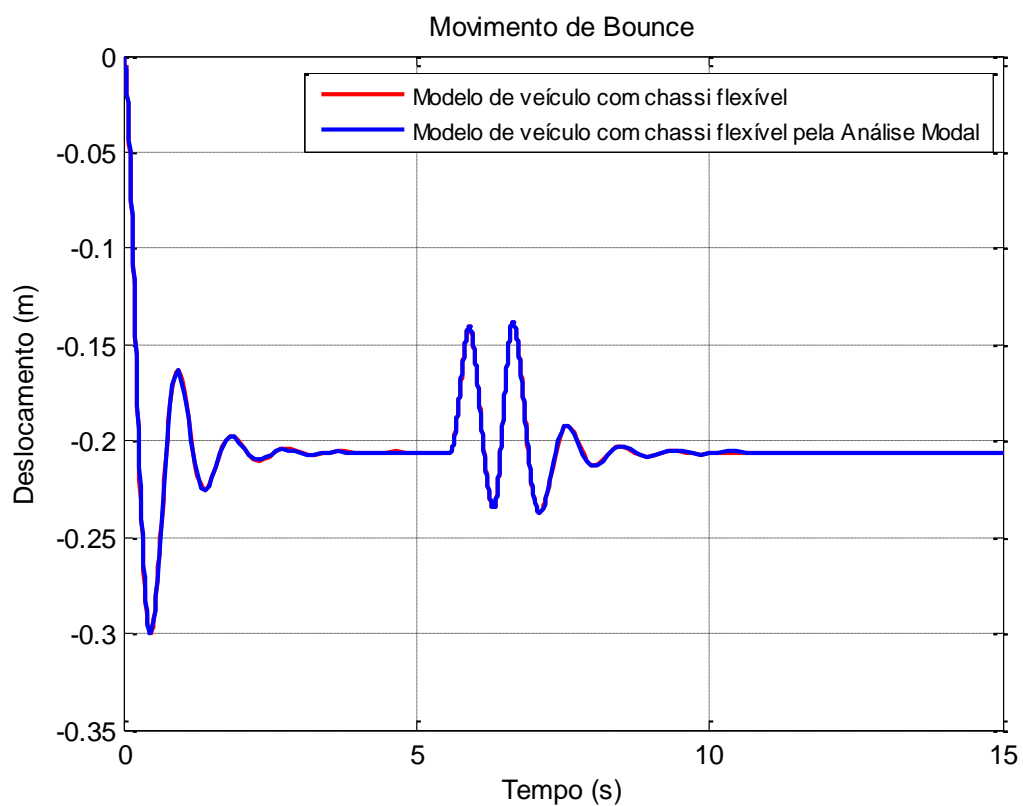


FIG. 2.18 Movimento de “bounce” com e sem utilização da Análise Modal.

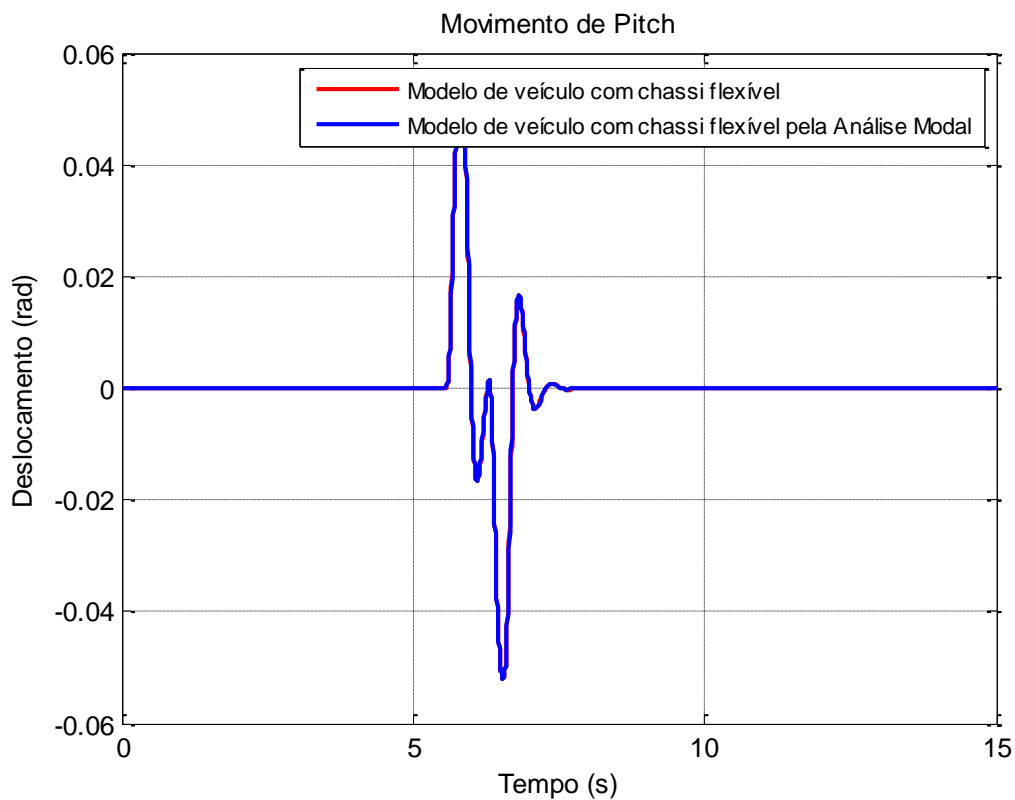


FIG. 2.19 Movimento de “pitch” com e sem utilização da Análise Modal.

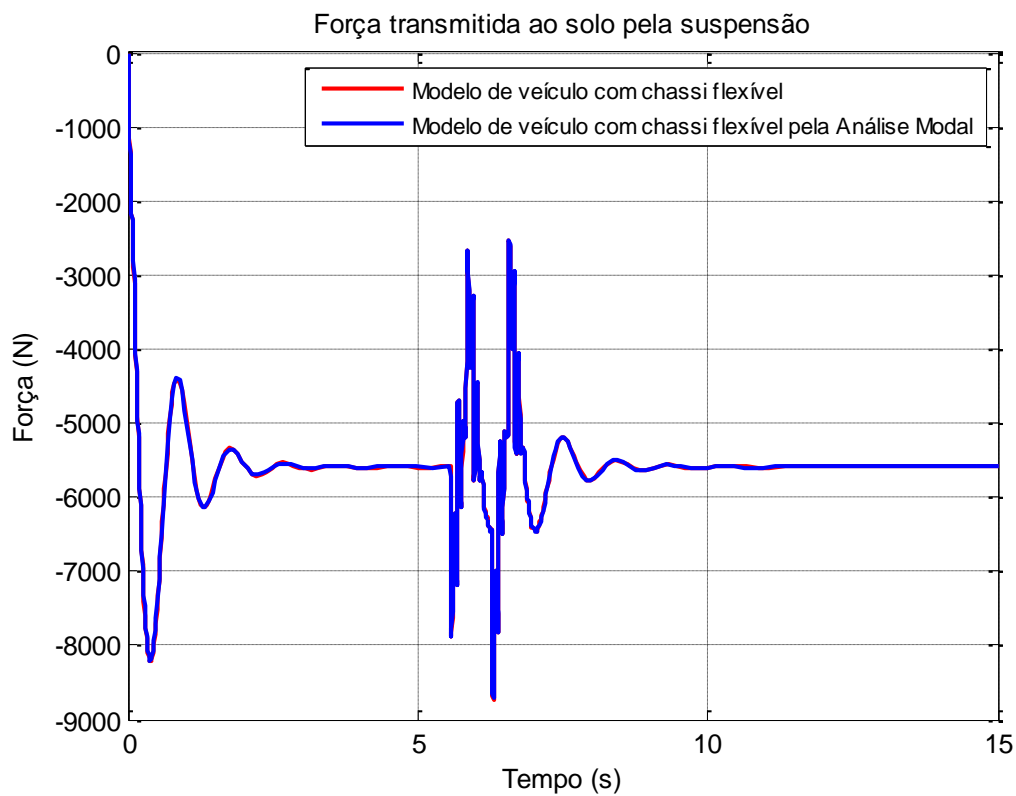


FIG. 2.20 Força transmitida ao solo com e sem utilização da Análise Modal.



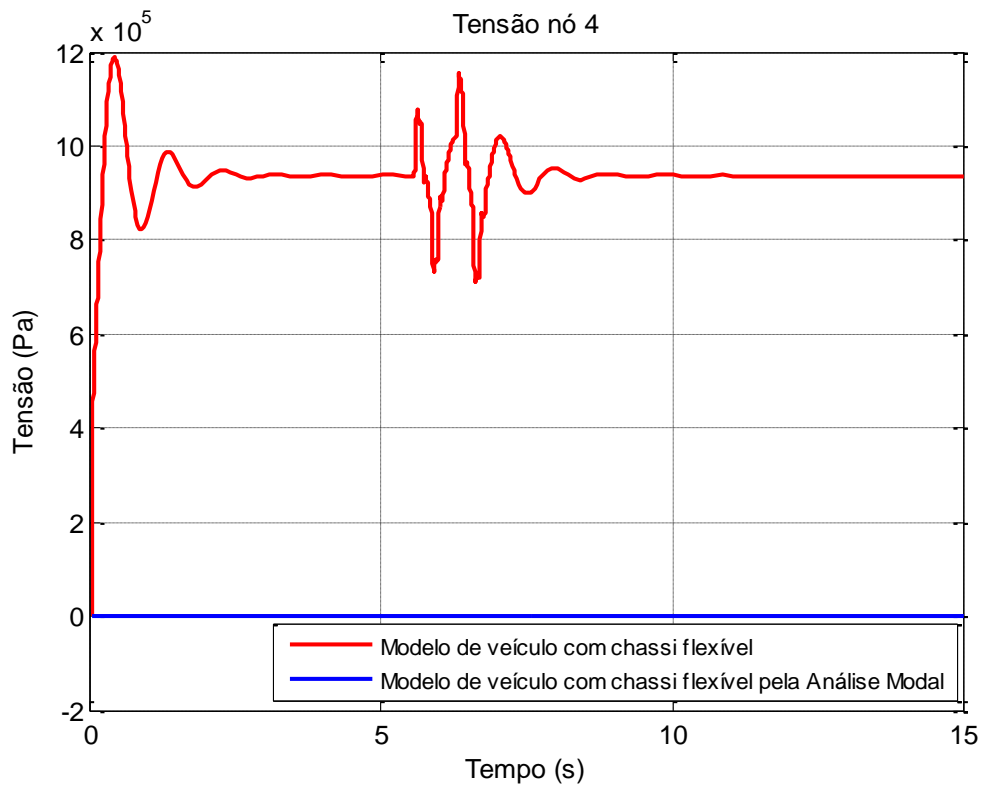


FIG. 2.21 Tensão normal do nó 4 (centro da estrutura) com utilização de dois modos.

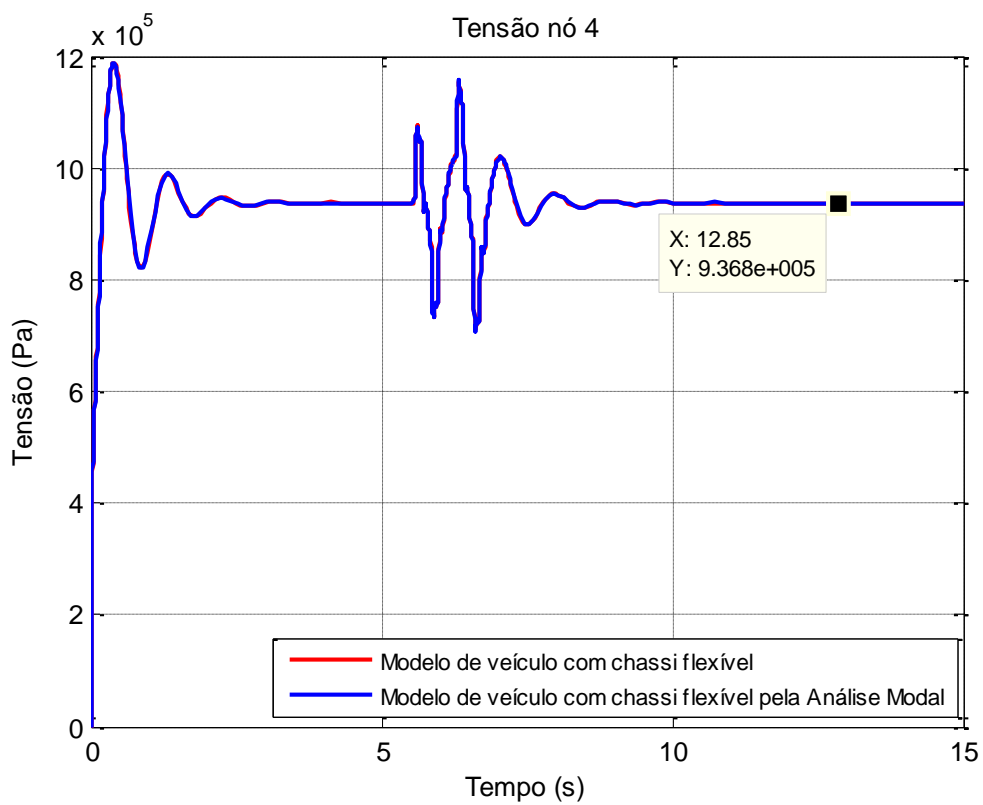


FIG. 2.22 Tensão normal do nó 4 (centro da estrutura) com utilização de treze modos.

Pode se observar que os resultados obtidos para o modelo de  $\frac{1}{2}$  veículo têm uma excelente aproximação, podendo representar perfeitamente os deslocamentos e forças transmitidas. Porém, para o resultado de tensão a utilização de dois modos, se torna irrelevante, justificável pela não deformação da estrutura quando utilizados modos de corpo rígido, melhorando sua representação a partir da utilização de um maior número de modos, evidenciados após a estabilização por comparação com o valor calculado. A TAB. 2.3 mostra o erro em percentual encontrado para cada número de modos empregados.

TAB. 2.3 Valores de tensões geradas pelo modelo  $\frac{1}{2}$  veículo.

QUANTIDADE DE MODOS UTILIZADOS	SEM SELEÇÃO (10e5) Pa	COM SELEÇÃO (10e5) Pa	ERRO PERCENTUAL (%)
3	9,367	8,869	5,32
4	9,367	8,869	5,32
5	9,367	8,565	8,56
6	9,367	8,564	8,57
7	9,367	9,339	0,30
8	9,367	9,339	0,30
9	9,367	9,267	1,07
10	9,367	9,264	1,10
11	9,367	9,382	0,16
12	9,367	9,382	0,16
13	9,367	9,367	0
14	9,367	9,367	0

### **3. MODELOS REPRESENTATIVOS DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS TRIDIMENSIONAIS UTILIZANDO O MÉTODO DA ANÁLISE MODAL E A TÉCNICA DOS GRAFOS DE LIGAÇÃO.**

#### **3.1 INTRODUÇÃO**

A partir dos modelos vistos, pode-se finalmente desenvolver modelos mais complexos. Neste trabalho, se chega a dois modelos tridimensionais que representam de uma melhor forma uma estrutura veicular completa conhecida como “Full car”, oferecendo a possibilidade de análises mais realísticas do comportamento dinâmico, tendo a inclusão da rolagem do veículo em torno do eixo longitudinal  $x$ , além da oportunidade de análises não somente de flexão, mas também de torção da estrutura.

O primeiro modelo abordado é simples, sem características específicas para um veículo, com poucos graus de liberdade, e suspensões independentes acopladas a quatro graus de liberdade de translação. E outro com as características gerais de um veículo pesado completo para aplicação de transporte urbano com motor dianteiro, sendo possível a análise de uma representação dos efeitos da dinâmica vertical onde se considera a flexibilidade da estrutura. Este segundo modelo como o encontrado em Da ROCHA (1998) não pretende reproduzir nenhum modelo em sua íntegra devido a limitações impostas pelo software utilizado. Uma característica, a ser explorada será a utilização dos procedimentos já vistos, o que tornará a obtenção de resultados mais rápida, devido ao grande número de graus de liberdade utilizados para a representação do chassi.

#### **3.2 MODELO DE UMA ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL ELÁSTICA SIMPLES**

O modelo da estrutura foi desenvolvido a partir do Método dos Elementos Finitos para elemento de estrutura tridimensional, onde as matrizes de rigidez e massa podem ser obtidas pelos deslocamentos axiais, de flexão e torção conforme CRAIG (1981). A FIG. 3.1.a mostra o local de referência da estrutura e o deslocamento para um elemento estrutural tridimensional uniforme, enquanto a FIG 3.1.b mostra os deslocamentos de interesse para os modelos propostos.

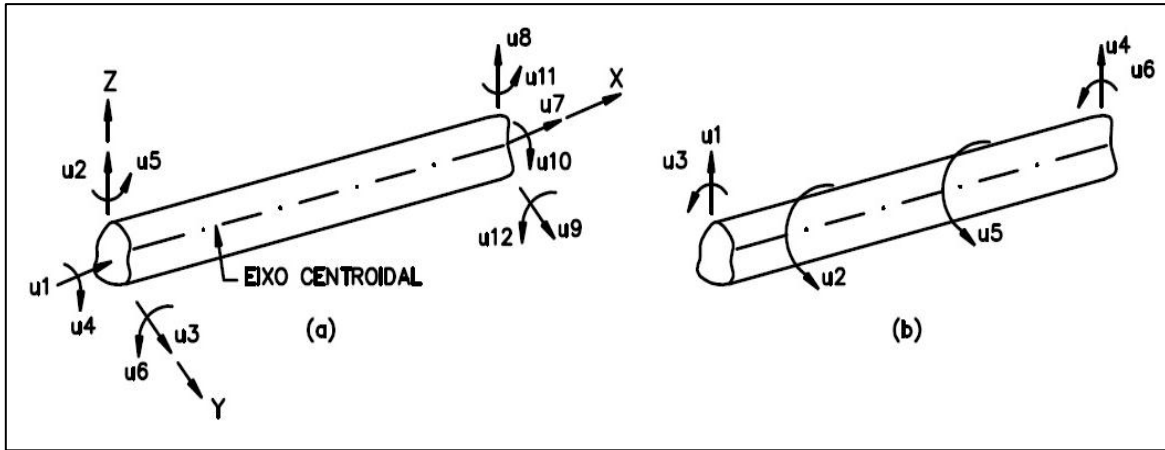


FIG. 3.1 Anotação para elemento tridimensional.

Na FIG. 3.1, X é o eixo ao longo da linha dos centróides das seções transversais e Y e Z são os eixos principais na seção transversal.  $I_y$  e  $I_z$  são momentos de inércia da seção transversal e  $I_p$  é o momento polar da inércia sobre o eixo X.

Os coeficientes de rigidez e massa associados aos Graus de Liberdade  $u_1$  e  $u_7$  são dados pelas EQ. 3.1 e EQ. 3.2.

$$k = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 3.1}$$

$$m = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 3.2}$$

Aqueles associados com GDL  $u_2, u_6, u_8$  e  $u_{12}$  são baseados nas EQ. 3.3 e EQ. 3.4 para flexão no plano XZ, enquanto  $u_9, u_{11}, u_3$  e  $u_5$  são para flexão no plano XY.

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 3.3}$$

$$m = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 3.4}$$

Finalmente, os coeficientes associados com GDL  $u_4$  e  $u_{10}$  são obtidos pelas EQ. 3.5 e EQ. 3.6, onde  $J$  é a constante de torção.

$$k = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 3.5}$$

$$m = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 3.6}$$

A partir destas matrizes chega-se a uma matriz de massa consistente e outra de rigidez, para a representação de um elemento de viga tridimensional, onde temos o acoplamento entre as coordenadas translacionais e rotacionais do elemento, conforme CRAIG (1981). As matrizes mostradas nas EQ. 3.7 e EQ. 3.8 são formadas a partir dos graus de liberdade de interesse.

$$k = \begin{bmatrix} \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{-12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} & \frac{-6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} \\ \frac{-12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_Y}{L^2} & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_Y}{L^2} \\ 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} & \frac{-6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 3.7}$$

$$m = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 22L & 54 & 0 & -13L \\ 0 & \frac{140I_P}{A} & 0 & 0 & \frac{70I_P}{A} & 0 \\ 22L & 0 & 4L^2 & 13L & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 13L & 156 & 0 & -22L \\ 0 & \frac{70I_P}{A} & 0 & 0 & \frac{140I_P}{A} & 0 \\ -13L & 0 & -3L^2 & -22L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 3.8}$$

Os procedimentos utilizados para este modelo são os mesmos já utilizados nos demais modelos, porém seus campos inércias, capacitivos e resistivos, passam a ser formados por elementos com seis graus de liberdade, conforme as EQ. 3.7 e EQ. 3.8 e o rearranjo das mesmas para os elementos transversais que permitem a representação adequada da dinâmica vertical para o modelo de uma estrutura flexível tridimensional, neste caso formado por

quatro vigas, representando um chassi dividido em 8 elementos, onde para cada nó escolhido são considerados os graus de liberdade de translação e também de rotações referentes aos efeitos de flexão e torção, perfazendo um total de 24 graus de liberdade representativos da estrutura, com subsistemas de suspensão independentes e com a força peso distribuída uniformemente.

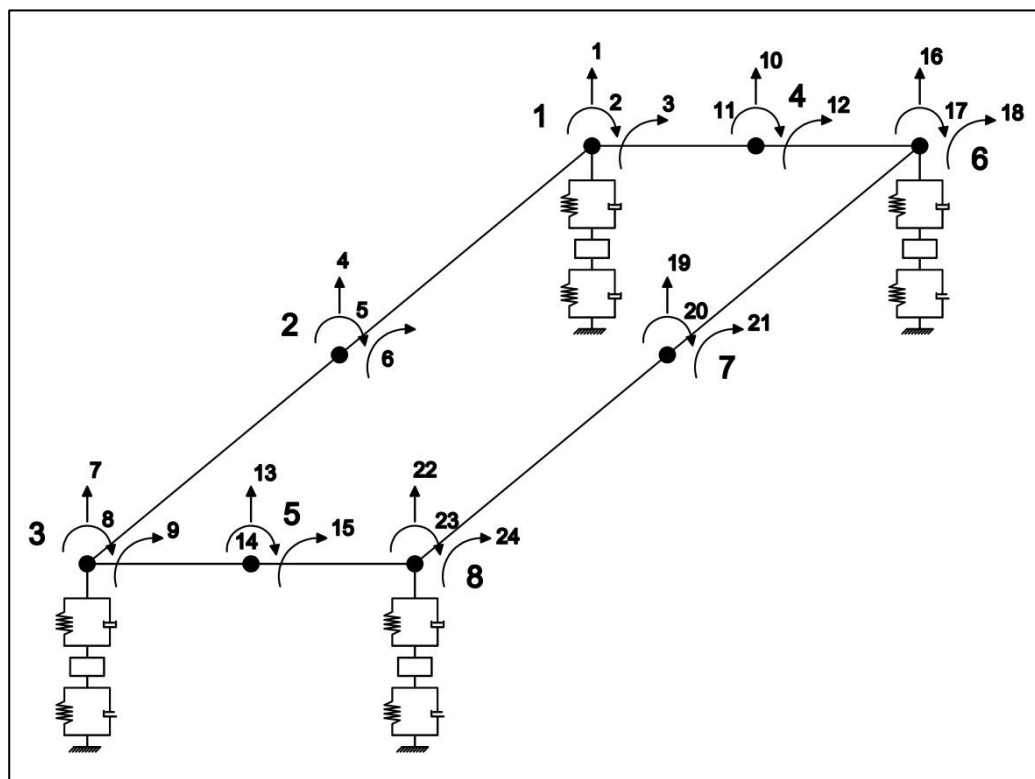


FIG. 3.2 Modelo simples representativo de veículo completo.

Para este caso o programa em MATLAB/SIMULINK foi desenvolvido a partir de divisão dos subsistemas de suspensão onde se gerou equações de espaço de estado conduzidas pela técnica dos Grafos de acordo com a FIG. 2.15, onde graças à característica modular da técnica, fontes podem ser substituídas por Grafos de subsistemas que interagem entre si. A FIG. 3.3 mostra o subsistema de suspensão que pode ser subdivididos em elementos de molas e amortecedores das suspensões, massas das rodas e pneus representados também por efeitos de molas e amortecedores o que proporcionam para este modelo a aplicação de equações bastante simples com a utilização de blocos referentes a esta subdivisão.

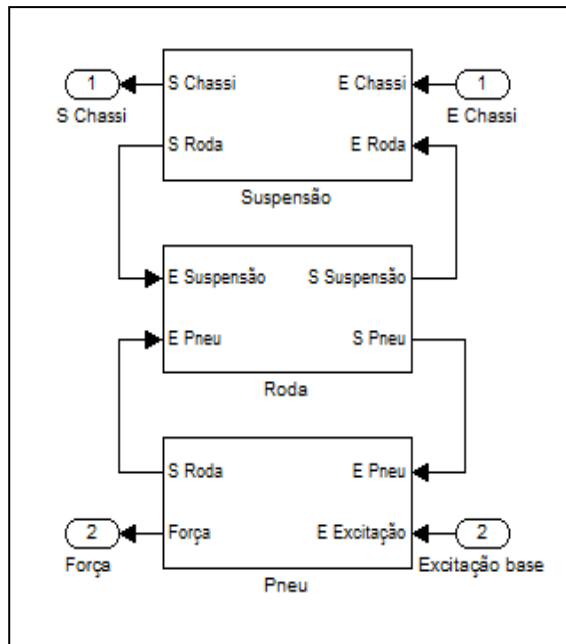


FIG. 3.3 Subsistema de suspensão em ambiente SIMULINK.

Na FIG. 3.4, temos o arranjo do sistema global no programa SIMULINK, onde as suspensões são representadas de forma independentes, o que nos mostra de forma clara a característica modular dos Grafos.

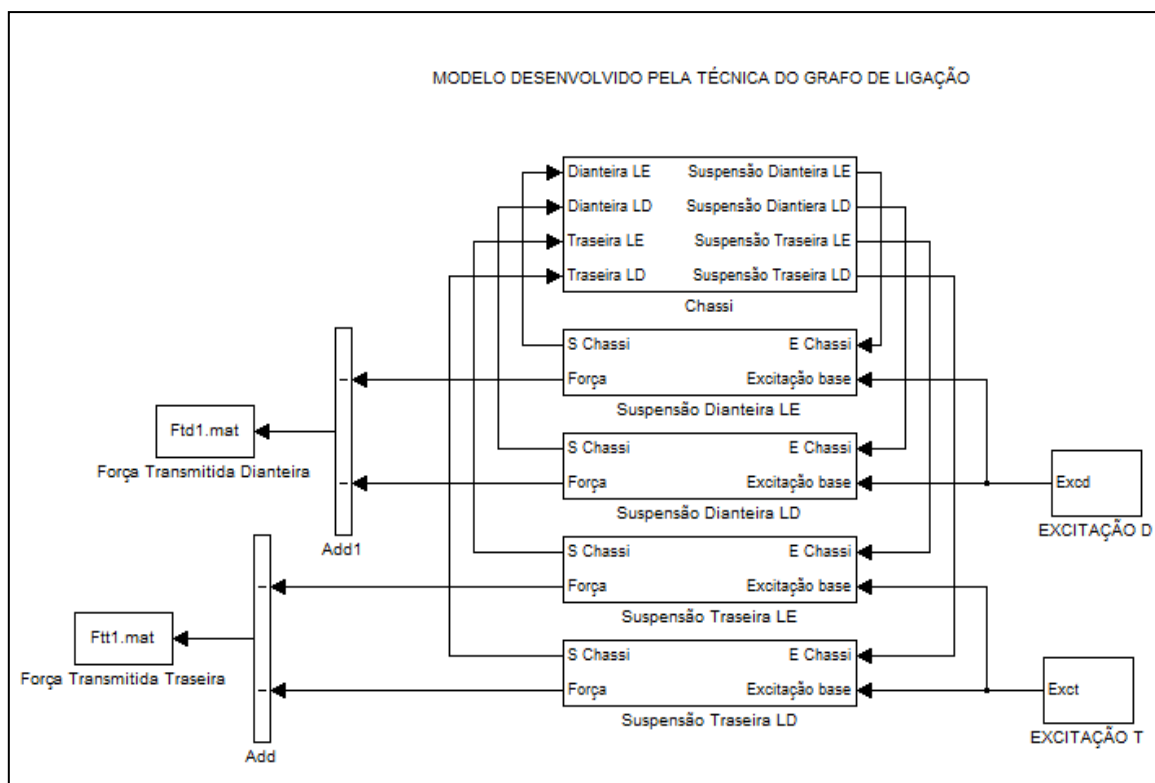


FIG. 3.4 Sistema global em ambiente SIMULINK.

Nas FIG. 3.5, FIG. 3.6, FIG. 3.7 e FIG. 3.8, são representados os quatro primeiros modos de vibração da estrutura de chassi obtidos através de suas matrizes de rigidez e massa, já visto anteriormente para o modelo de meio veículo representado por uma viga plana. Indicando-se somente os graus de liberdade verticais, que neste caso representam melhor a forma do modo de vibração, atribuindo valores unitários de posição no eixo vertical extraídos diretamente dos auto vetores, onde o plano de referência é formado por linhas tracejadas.

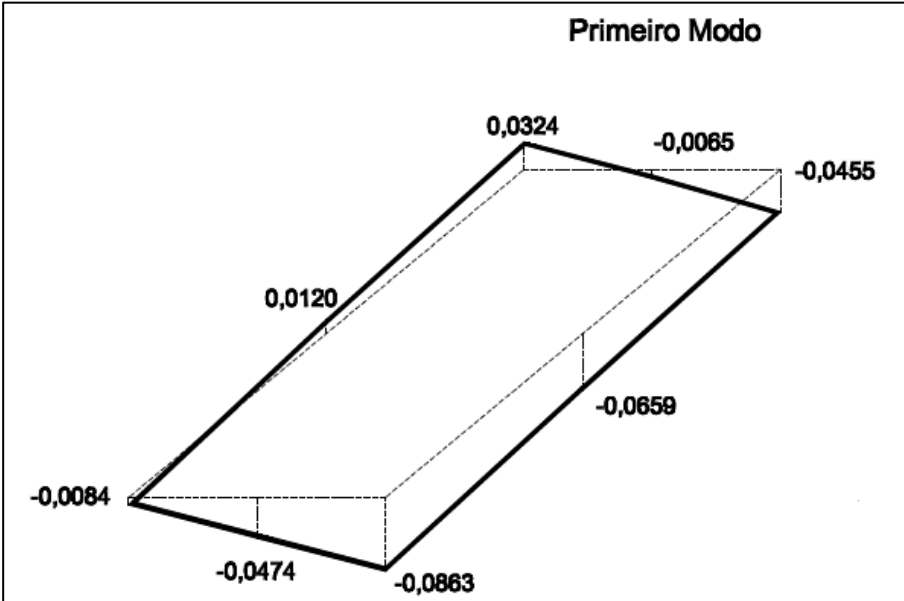


FIG. 3.5 Primeiro modo de vibração do chassi (Roll).

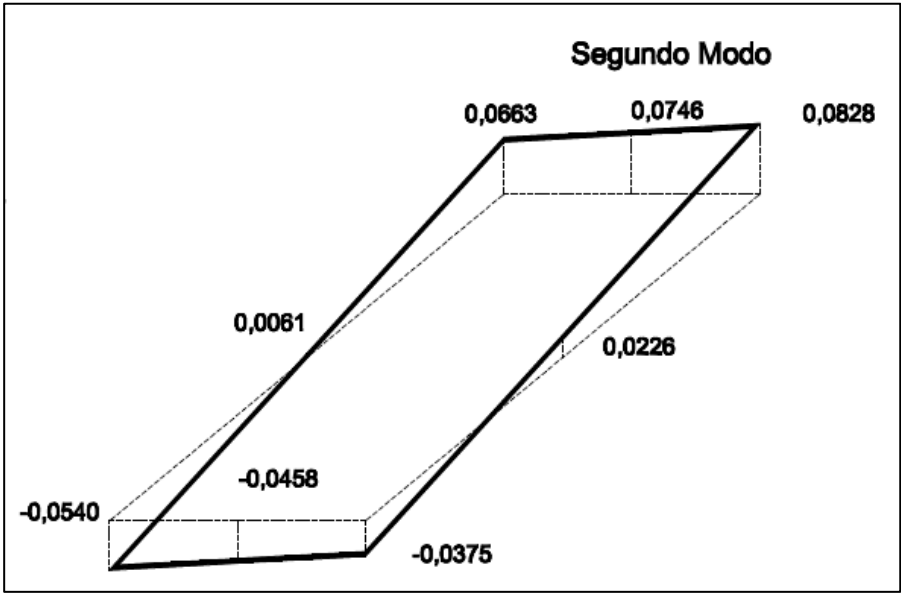


FIG. 3.6 Segundo modo de vibração do chassi (Pitch).



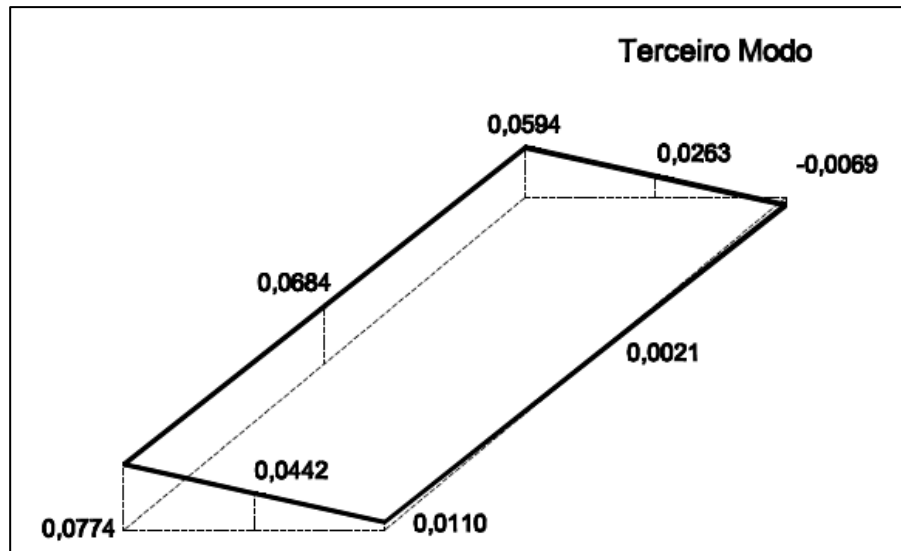


FIG. 3.7 Terceiro modo de vibração do chassi (Bounce).

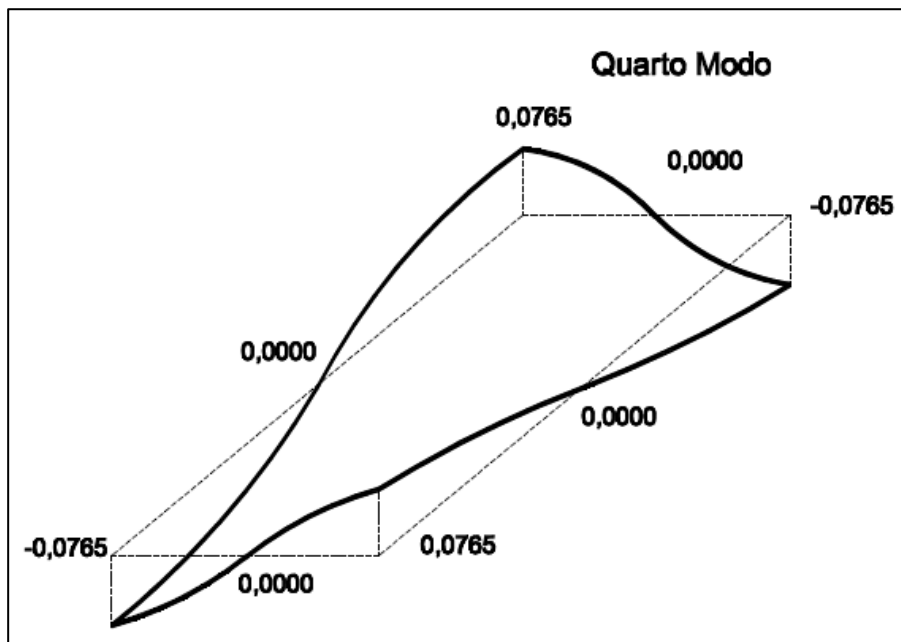


FIG. 3.8 Quarto modo de vibração do chassi (Primeiro modo de torção).

A análise representativa dos modos, o primeiro, segundo e terceiro modo são os movimentos de corpo rígido, enquanto o quarto modo apresenta torções e flexões acentuadas. Parte-se, portanto, do critério de seleção dos modos de corpo rígido representativos da estrutura flexível tridimensional, a exemplo do que foi utilizado para a estrutura plana.

As características deste modelo incluem uma estrutura retangular de 6 m por 3 m formado por vigas na forma geométrica, conforme referências 1 e 2 da TAB. 3.2, com suas respectivas áreas e momentos inerciais e demais parâmetros conforme TAB. 3.1.

TAB. 3.1 Parâmetros para o modelo com estrutura tridimensional.

PARÂMETROS	VALOR (unid.)
Massa do chassi	1.000 kg
Massa das rodas	70 kg
Constante de rigidez da suspensão	20.000 N/m
Constante de amortecimento da suspensão	980 Ns/m
Constante de rigidez do pneu	320.000 N/m
Constante de amortecimento do pneu	200 N/m

A excitação de base para este caso é dada a partir de fluxos prescritos fornecidos conforme o proposto nos modelos anteriores, no qual o veículo passa a uma velocidade de 10 km/h com as rodas dianteiras simultaneamente e posteriormente com as traseiras, após 20 m de pista, tendo um período de estabilidade antes e após a excitação, totalizando um tempo quinze segundos de simulação, considerando um amortecimento modal com uma fração de amortecimento 5% da estrutura, tendo a opção de geração da matriz de amortecimento proporcional.

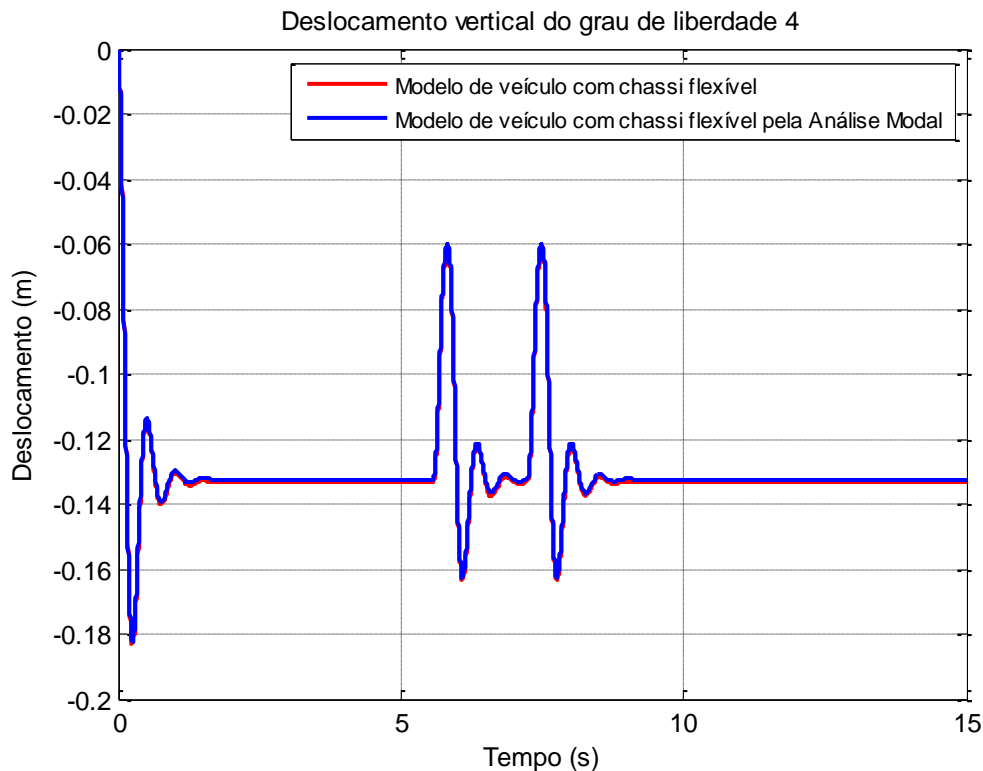


FIG. 3.9 Movimento vertical do GDL 4 (Bounce).

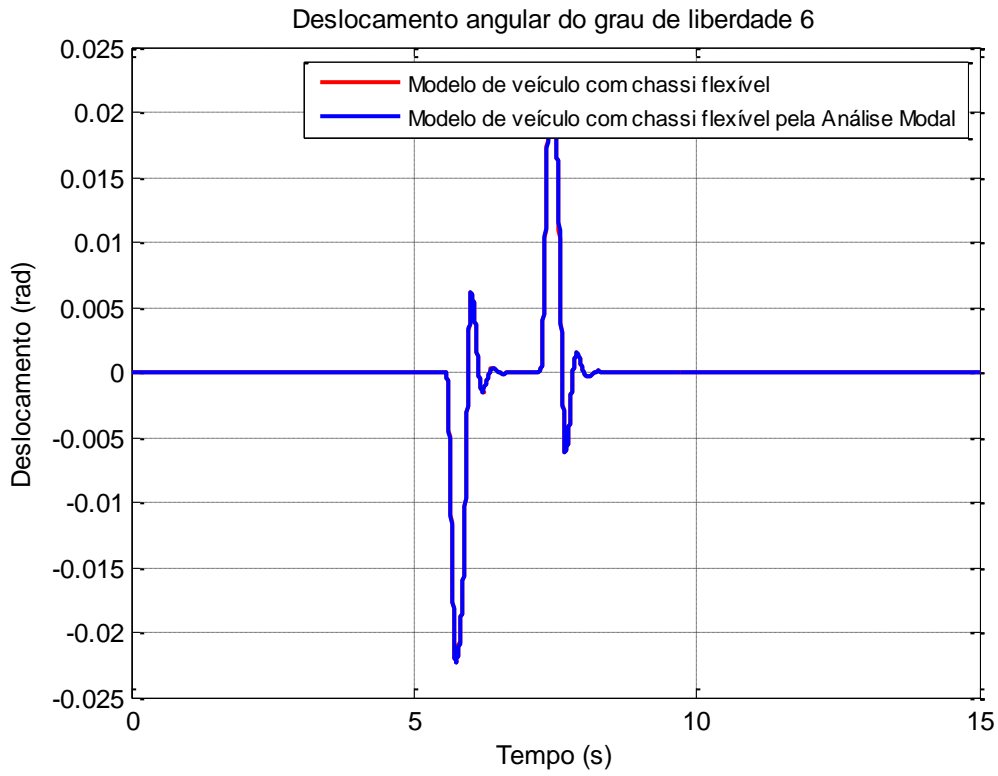


FIG. 3.10 Movimento angular do GDL 6 (Pitch).

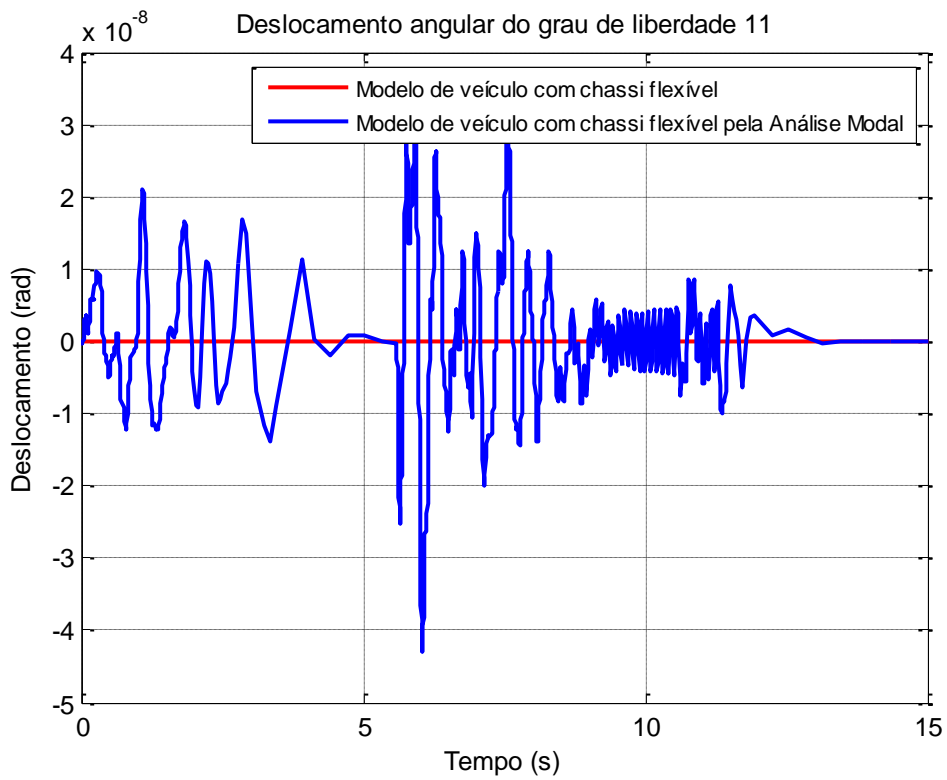


FIG. 3.11 Movimento angular do GDL 11 (Roll).

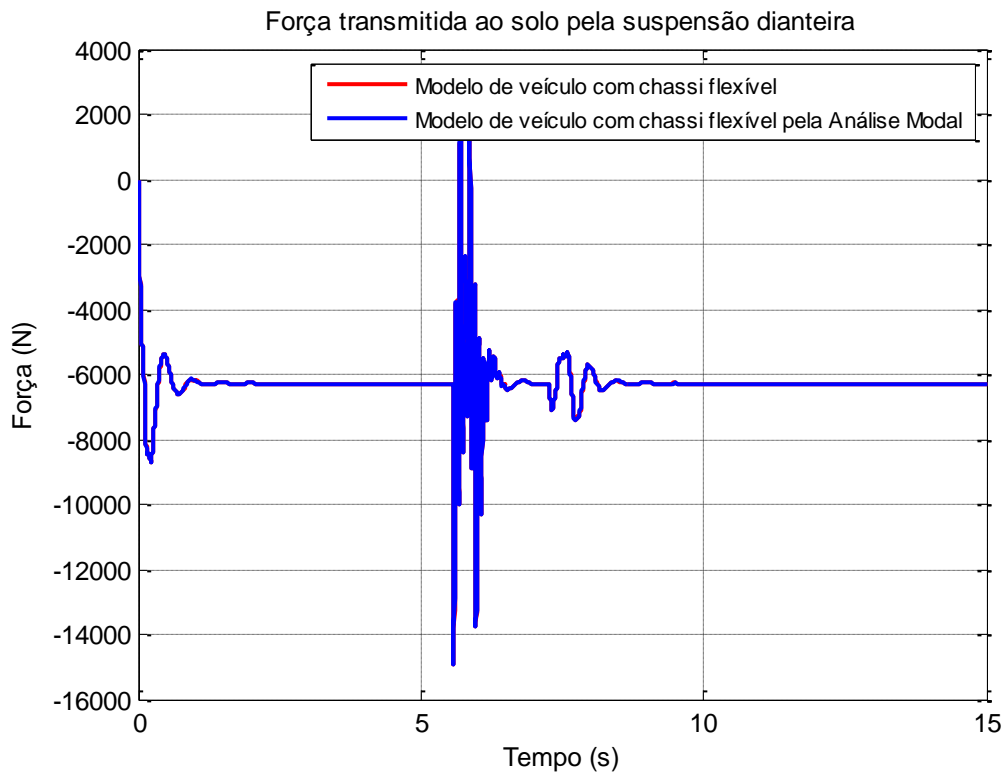


FIG. 3.12 Força Transmitida ao solo pela suspensão dianteira.

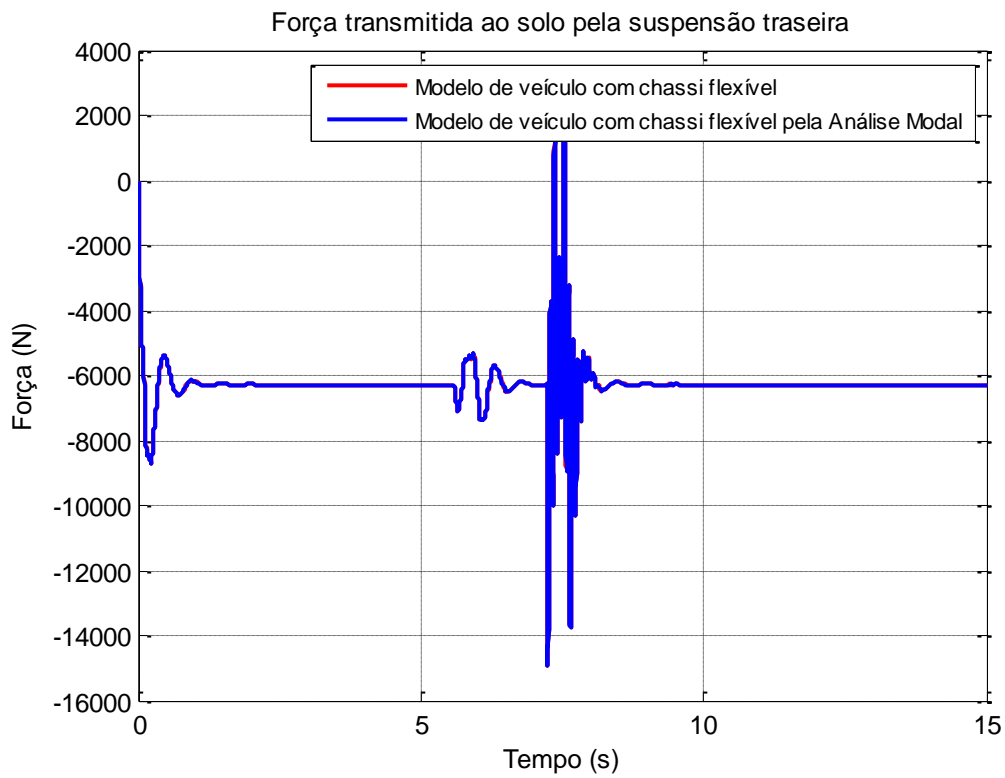


FIG. 3.13 Força Transmitida ao solo pela suspensão traseira.

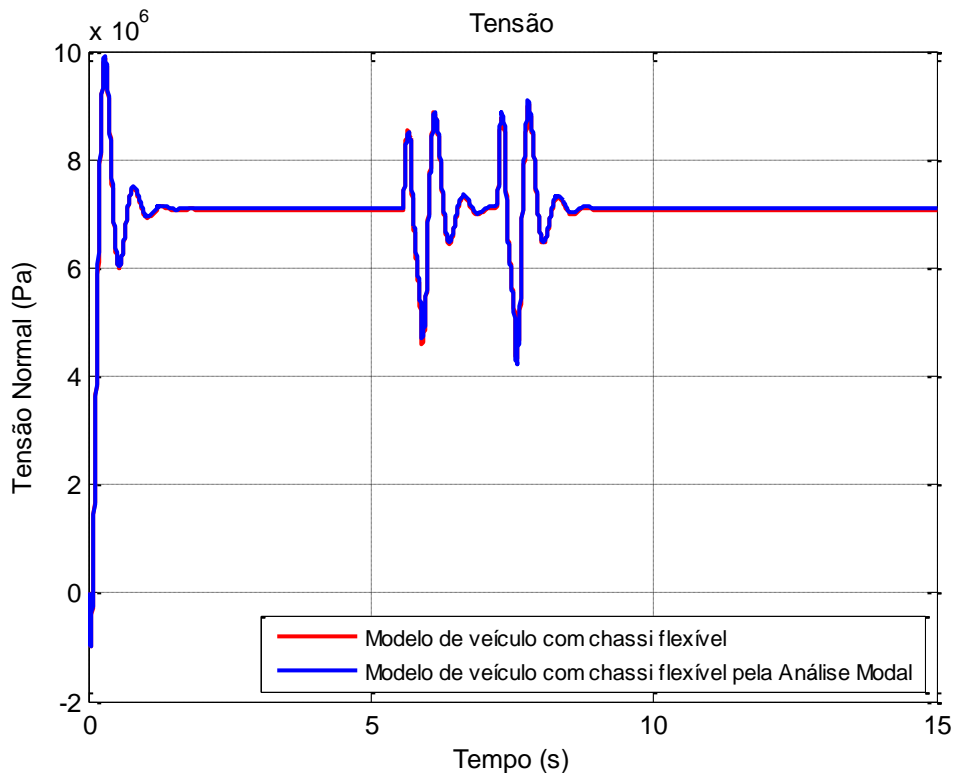


FIG. 3.14 Tensão normal do nó 2 com utilização de quinze modos.

Na FIG 3.11 que se refere ao deslocamento angular do grau de liberdade de flexão da travessa dianteira comparando os resultados é possível se observar que a mesma sofre deformações devido ao nó também estar sobre influência do carregamento vertical distribuído uniformemente pela estrutura, porém para o número de modos selecionados, neste caso os três modos de corpo rígido, o modelo que utiliza o método da análise modal apresenta essas deformações em uma escala maior de  $10^{-8}$ , enquanto o modelo clássico o apresenta na escala de  $10^{-13}$ .

Portanto pode se observar que os resultados em geral para o número de modos selecionados, têm uma boa aproximação dos deslocamentos e das forças transmitidas, onde uma melhor representação para este modelo, embora não demonstrado, se deu a partir da inclusão de mais modos. Estes resultados proporcionarão base para as escolhas dos números de modos a serem utilizados, assim como a opção do tipo amortecimento para o último modelo deste trabalho.

A TAB. 3.1 mostra o percentual de dispersão do valor nominal da tensão após o modelo entrar em equilíbrio estático, onde se observa uma boa representação gráfica mostrada na FIG. 3.13 a partir da utilização de 15 do total de 24 modos.

TAB. 3.2 Valores de tensões geradas pelo modelo de estrutura tridimensional.

QUANTIDADE DE MODOS UTILIZADOS	SEM SELEÇÃO (10e6) Pa	COM SELEÇÃO (10e6) Pa	ERRO PERCENTUAL (%)
6	7,077	5,711	19,3
9	7,077	7,411	4,72
12	7,077	7,526	6,34
15	7,077	7,100	0,32
18	7,077	7,100	0,32
19	7,077	7,079	0,03
20	7,077	7,079	0,03
21	7,077	7,079	0,03
22	7,077	7,077	0,00
23	7,077	7,077	0,00
24	7,077	7,077	0,00

### 3.3 MODELO DE ESTRUTURA VEICULAR ELÁSTICA

Com base nos procedimentos vistos no decorrer deste trabalho, é possível modelar estruturas veiculares bem mais complexas, como a de veículos utilizados tanto para o transporte de carga quanto para o de passageiros. O modelo escolhido trata-se de um chassi de ônibus urbano, com motor dianteiro, eixos rígidos e suspensão tipo feixe de molas similar ao encontrado em Da ROCHA (1998), onde não se pretende reproduzir o modelo em sua íntegra, mas sim possibilitar uma representação razoável dos comportamentos dinâmicos que ocorrem neste tipo de veículo e principalmente validar a utilização do Método da Análise Modal e a seleção de modos.

O modelo físico mostrado na FIG. 3.15 apresenta as características gerais de um chassi de ônibus dividido em vários subsistemas, porém ignorando alguns como o efeito de massa mola do motor, assim como os efeitos vibratórios causados pelo seu funcionamento. Considerou-se também o assento do motorista como rígido sem efeitos de molas, facilitando o desenvolvimento do modelo. A suspensão foi modelada de forma a distribuir a força de reação para três pontos de ancoragem no chassi, como em uma suspensão mecânica real composta de amortecedor e feixe de molas.

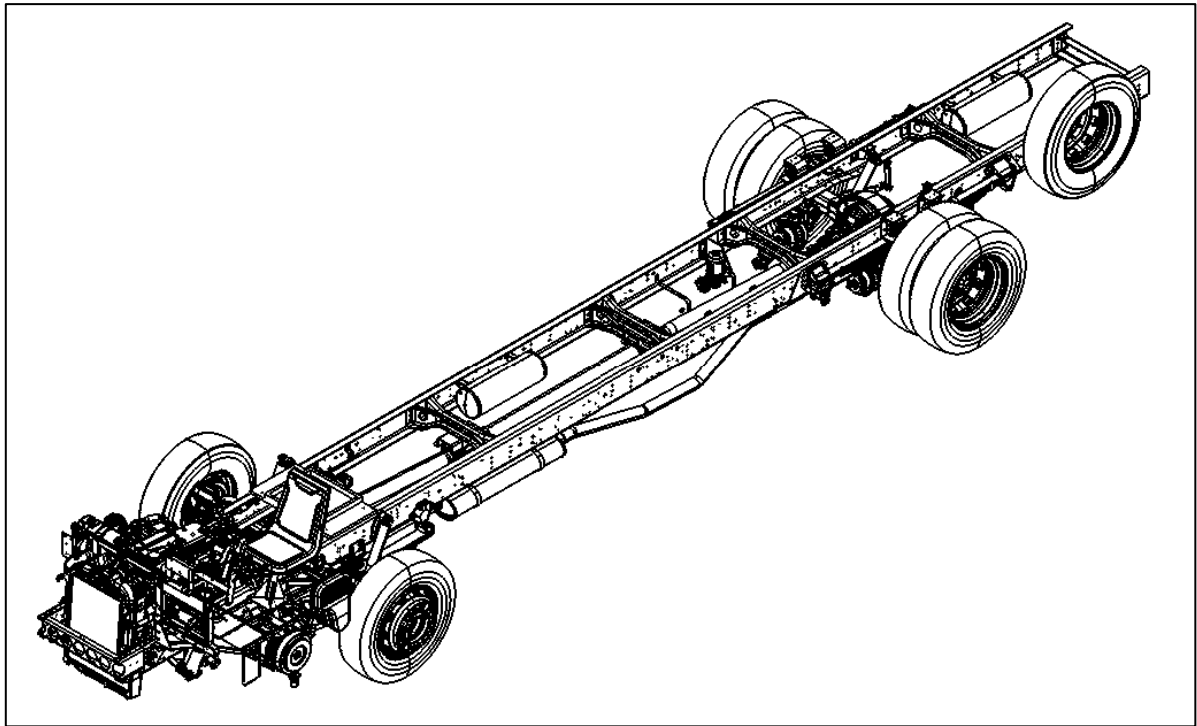


FIG. 3.15 Modelo físico do veículo completo.

### 3.3.1 MODELO FÍSICO DO CHASSI

Nas FIG. 3.16 e FIG. 3.17 pode se observar as dimensões básicas e disposição de travessas do chassi discretizado pelo Método dos Elementos Finitos em 52 elementos, 45 nós e 135 graus de liberdade incluindo os efeitos de flexão e torção além de uma estrutura para o motorista à esquerda simplificando a modelagem do chassi no software escolhido sem perder as características reais do veículo, enquanto na TAB. 3.3 estão relacionados os diferentes tipos de secções transversais utilizadas no chassi e seus parâmetros geométricos numerados conforme FIG. 3.17 e na TAB. 3.4 se encontra as propriedades físicas do material utilizado, seguindo as mesmas características encontradas na referência Da ROCHA (1998) para facilitar cálculos devido às formas simples das secções, sabendo que estas são bem mais complexas.





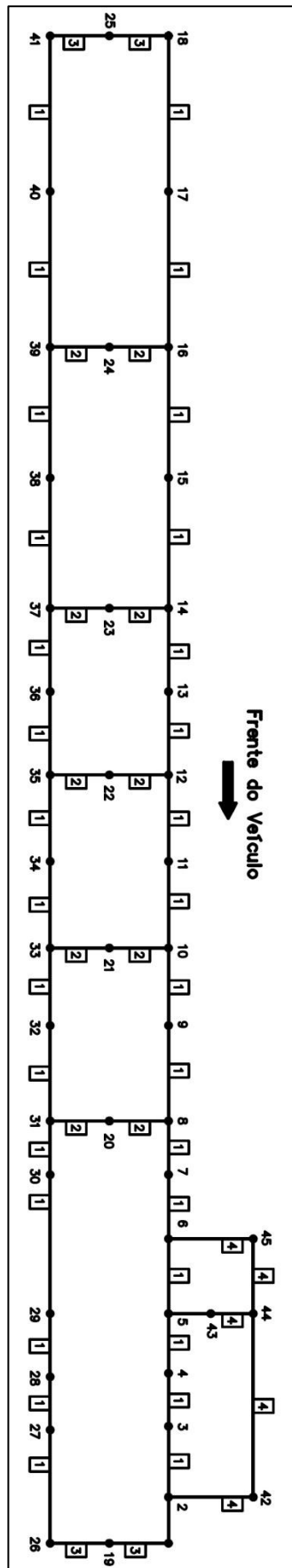
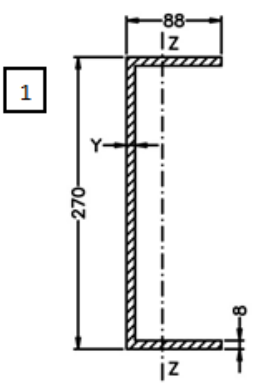
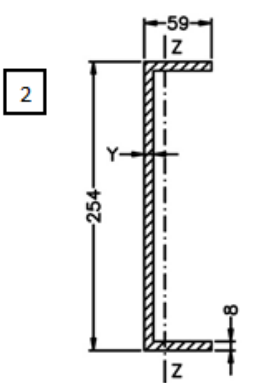
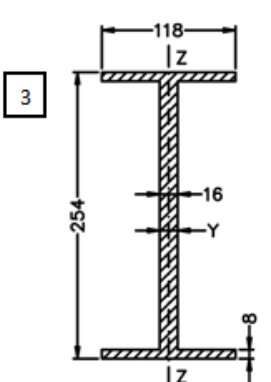
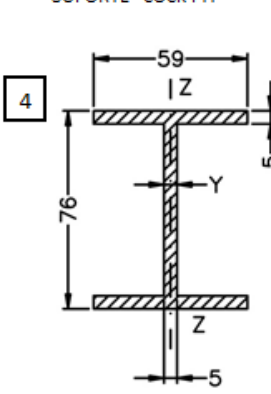


FIG. 3.17 Chassi com numeração de nós e tipos de seções transversais.

TAB. 3.3 Dimensões e propriedades geométricas das seções do chassi.

DIMENSÕES (MM)	PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS SEÇÕES
<p style="text-align: center;">LONGARINAS</p>  <p>1</p>	<p>Momento de inércia de área: <math>I_y=3,509 \times 10^{-5} \text{ m}^4</math>                  Constante de torção: <math>J=7,338 \times 10^{-8} \text{ m}^4</math>                  Momento de inércia polar: <math>I_p=7,026 \times 10^{-5} \text{ m}^4</math>                  Área: <math>A=5,696 \times 10^{-3} \text{ m}^2</math></p>
<p style="text-align: center;">TRAVESSAS DIANT. E TRAS.</p>  <p>2</p>	<p>Momento de inércia de área: <math>I_y=2,327 \times 10^{-5} \text{ m}^4</math>                  Constante de torção: <math>J=6,076 \times 10^{-8} \text{ m}^4</math>                  Momento de inércia polar: <math>I_p=2,438 \times 10^{-5} \text{ m}^4</math>                  Área: <math>A=2,848 \times 10^{-3} \text{ m}^2</math></p>
<p style="text-align: center;">TRAVESSAS PRINCIPAIS</p>  <p>3</p>	<p>Momento de inércia de área: <math>I_y=4,655 \times 10^{-5} \text{ m}^4</math>                  Constante de torção: <math>J=3,762 \times 10^{-7} \text{ m}^4</math>                  Momento de inércia polar: <math>I_p=5,070 \times 10^{-5} \text{ m}^4</math>                  Área: <math>A=5,696 \times 10^{-3} \text{ m}^2</math></p>
<p style="text-align: center;">SUPORTE "COCK PIT"</p>  <p>4</p>	<p>Momento de inércia de área: <math>I_y=8,646 \times 10^{-7} \text{ m}^4</math>                  Constante de torção: <math>J=7,875 \times 10^{-9} \text{ m}^4</math>                  Momento de inércia polar: <math>I_p=1,036 \times 10^{-6} \text{ m}^4</math>                  Área: <math>A=9,200 \times 10^{-4} \text{ m}^2</math></p>

TAB. 3.4 Propriedades físicas do material do chassi.

PROPRIEDADES FÍSICA	VALOR
Módulo de Elásticidade Longitudinal (E)	200 GPa
Módulo de Elásticidade Transversal (G)	80 GPa
Massa específica ( $\rho$ )	7860 kg/m <sup>3</sup>

O modelo desenvolvido no MATLAB buscou também explorar a característica modular, onde a estrutura do chassi tem matrizes de inércia, capacitivas e resistivas, sendo esta última uma matriz de amortecimento modal, adotando uma fração 0,05 que pareceu bem adequada nas simulações. O amortecimento estrutural implementado atenua a oscilação, de modo a ser ter um transiente em um intervalo de tempo aceitável para análise se estabilizando após os efeitos de sua própria carga e excitação de base.

Para simular as cargas do veículo, se adicionou massas pontuais não estruturais nos nós, multiplicada pela aceleração da gravidade, considerando um carregamento descrito em fichas de especificações técnicas por montadoras, onde se encontra a capacidade máxima de carga suportada pelo veículo. Para uma melhor condição de carregamento das forças  $\mathbf{F}$ , se utilizou um cálculo de forma que as mesmas sejam aplicadas para se ter uma distribuição uniforme da carga total sobre a estrutura, visto que o modelo possui cargas dos subsistemas acoplados sobre ele, o que poderia gerar erros nas análises.

A TAB. 3.5 refere-se às massas não suspensas, do motor e do motorista do modelo de um ônibus com motor dianteiro adotado. Para a simulação considerou-se o veículo totalmente carregado com uma massa bruta total de 16700 kg, onde se descontando o total de massas chega-se a uma massa máxima admissível de carregamento acima do plano do chassi distribuída entre quatorze nós de suas longarinas.

TAB. 3.5 Valores das massas consideradas no modelo.

SUBSISTEMAS	VALOR EM (kg)
Chassi	833
Motor	500
Eixo dianteiro	600
Eixo traseiro	890
Passageiro	100

### 3.3.2 MODELO FÍSICO DA SUSPENSÃO

Para representar os sistemas de suspensões utilizou-se uma distribuição das reações por três pontos de acoplamento no chassi feito através dos graus de liberdade de deslocamento de translação tornando o modelo mais representativo, o que ocorre em um veículo que possui feixes de molas. Na FIG. 3.18 é possível se observar as distâncias consideradas da linha de centro do eixo a cada um dos pontos adotados para contato de cada uma das molas. As barras rígidas, as quais se desprezaram as massas, proporcionam efeitos mais reais através de transformações equivalentes. Os amortecedores para cada um dos conjuntos são acoplados diretamente entre o eixo rígido e o chassi também ilustrado na figura.

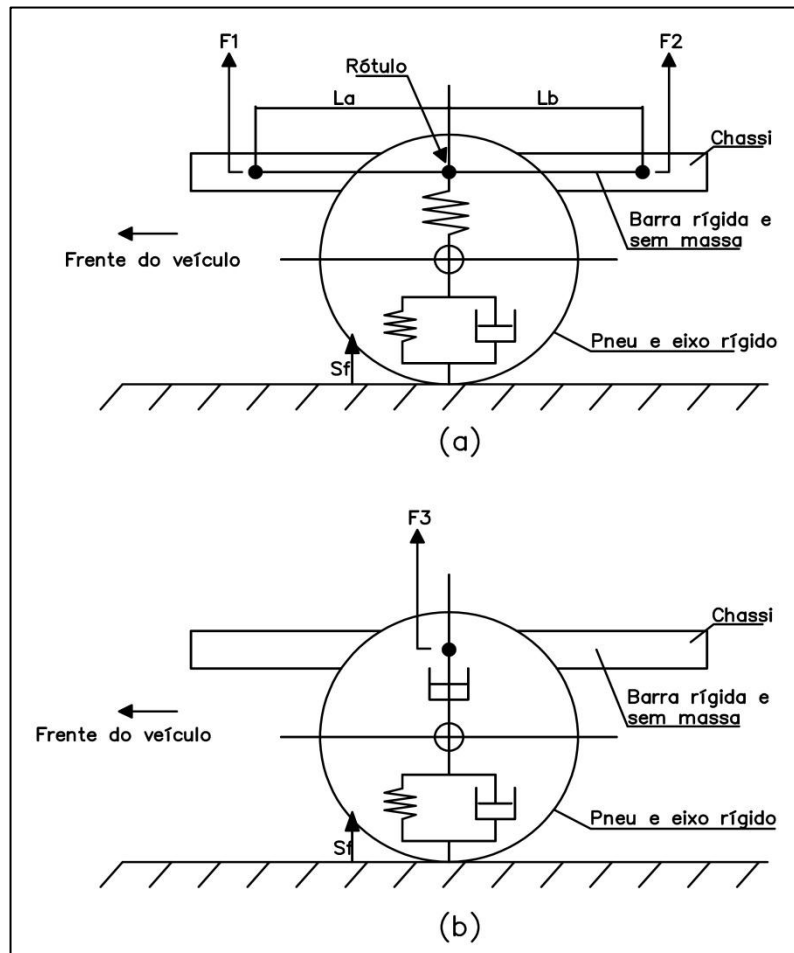


FIG. 3.18 Modelos físicos das suspensões dianteiras e traseiras.

Desta forma obtém-se o módulo multitransformador  $TF$  representado pela matriz  $[MT]$  da EQ. 3.9, onde os elementos são módulos individuais para cada um dos pontos de

ancoragem dos feixes de molas obtidos através de somatório de momentos para vigas bi apoiadas, que associam as variáveis de potência aos graus de liberdade de deslocamento translacionais de interesse da estrutura, onde  $L_a$  e  $L_b$  são distâncias referentes ao centro do eixo aos acoplamentos no chassi dos feixes de molas dianteiros e traseiros definidos a partir de cotas da FIG. 3.16.

$$MT = \begin{bmatrix} \frac{La_d}{La_d+Lb_d} & 0 & 0 & 0 & \frac{La_d}{La_d+Lb_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{La_t}{La_t+Lb_t} & 0 & 0 & 0 & \frac{La_t}{La_t+Lb_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{La_d}{La_d+Lb_d} & 0 & 0 & 0 & \frac{La_d}{La_d+Lb_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{La_t}{La_t+Lb_t} & 0 & 0 & 0 & \frac{La_t}{La_t+Lb_t} \end{bmatrix} \quad \text{EQ. 3.9}$$

O eixo rígido considerado neste modelo representado pela FIG. 3.19 fornece os fluxos prescritos  $S_f$  ao sistema global, obtidos de forma análoga ao multitransformador que representa os feixes de molas, onde a excitação de base no contato do pneu com o solo sofre transformações geométricas diretas impostas pelas dimensões do eixo rígido dianteiro e traseiro do veículo.

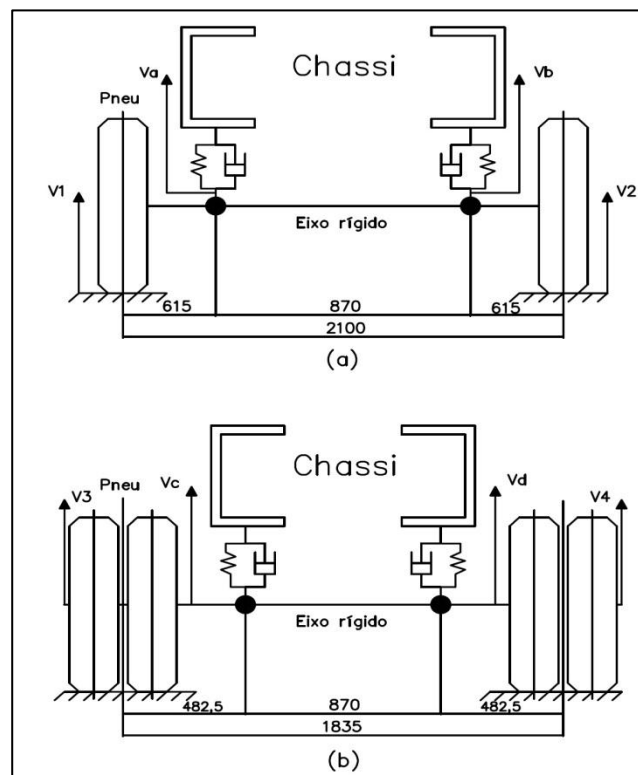


FIG. 3.19 Modelo físico dos eixos rígidos do veículo (Dimensões em milímetros).

A TAB. 3.6 apresenta os valores dos parâmetros dos subsistemas das suspensões dianteiras e traseiras, e dos pneus acoplados ao chassi de forma a deixar o veículo em uma posição plana onde os ângulos sejam nulos quando este se encontrar em equilíbrio.

TAB. 3.6 Parâmetros dos subsistemas das suspensões e pneus.

SUBSISTEMAS DE SUSPENSÃO	Constante de Rigidez (N/m)	Constante de Amortecimento (Ns/m)
Dianteiras	181000	7910
Traseiras	194000	12650
Pneus	500000	3000

### 3.3.3 ACOPLAMENTO DOS SUBSISTEMAS ATRAVÉS DA TÉCNICA DO GRAFO DE MULTILIGAÇÃO

Na FIG. 3.20 é mostrado o acoplamento dos subsistemas ao chassi, ressaltando que o motor e o assento com o motorista foram considerados como cargas impostas ao sistema.

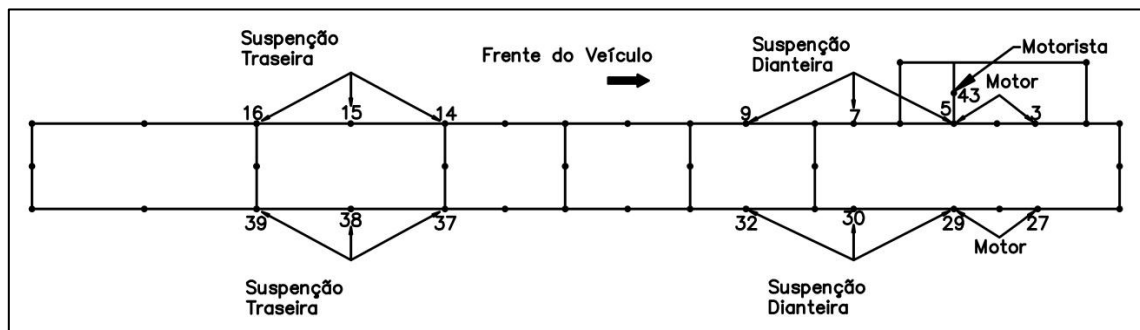


FIG. 3.20 Acoplamento dos subsistemas ao chassi.

O acoplamento do modelo, devido à característica modular já vista anteriormente da técnica dos Grafos de Ligação, e comprovado de forma gráfica, a partir da interação entre a estrutura flexível de chassi e seus subsistemas da suspensão, obtém-se o modelo matemático combinado do sistema. Da SILVA (1994) apresenta uma sistemática para a obtenção do modelo matemático global a partir de modelos de subsistemas isolados, desde que haja uma ordenação apropriada das variáveis de potência associadas a saídas dos subsistemas. Da

ROCHA (1998) utiliza esta sistemática em um problema de interação dinâmica entre sistemas mecânicos lineares contínuos e discretos, que serviu de base para este trabalho.

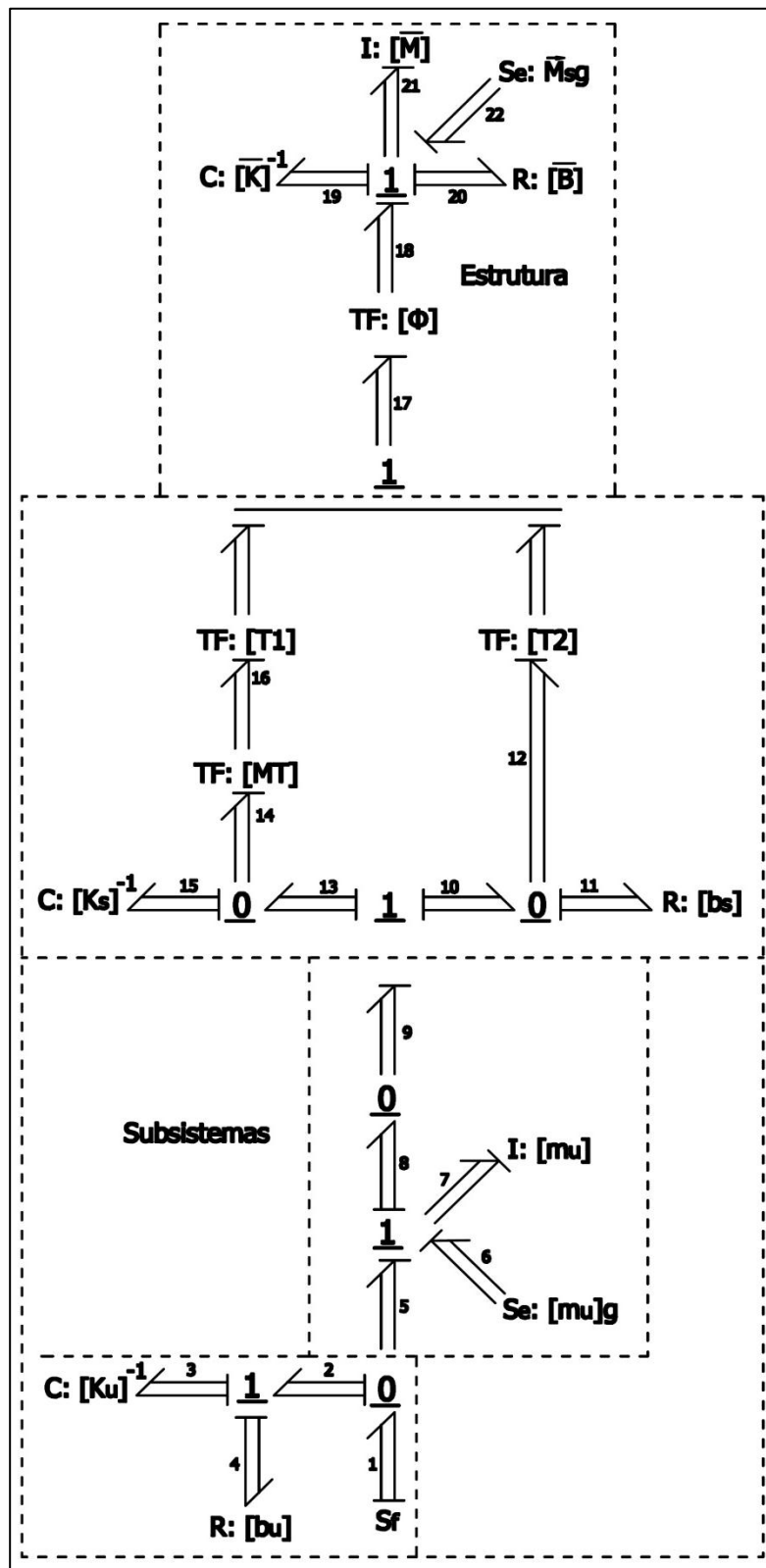


FIG. 3.21 Grafo representativo do modelo de ônibus adotado.

Conforme já mencionado, utilizando os procedimentos dos Grafos de Multiligação, pode-se obter a partir do grafo da FIG. 3.21 o modelo de estado da estrutura e dos demais subsistemas individualmente, bastante simplificados que interagem entre si de forma direta ou através de transformadores que proporcionam efeitos mais reais para o modelo.

### 3.3.4 SIMULAÇÃO

O modelo desenvolvido em MATLAB/SIMULINK foi derivado do modelo anterior, onde somente se procurou adequá-lo conforme as características do atual, com a inclusão direta de operações com as matrizes transformadoras necessárias aos sistemas, não as incorporando nas equações de espaço de estado como pode se observar na figura mostrada abaixo a matriz referente ao efeito do feixe de molas da suspensão.

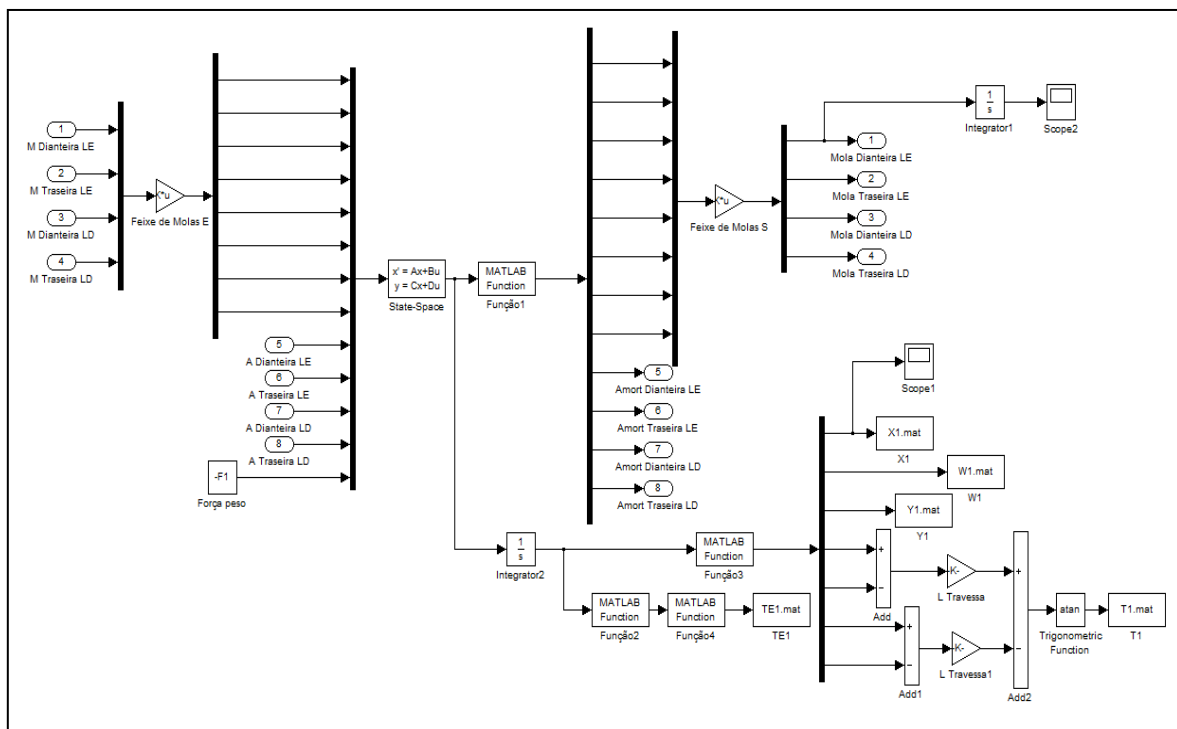


FIG. 3.22 Subsistema de chassi em ambiente SIMULINK.

Simulou-se, portanto este modelo de veículo em MATLAB/SIMULINK, por um período de quinze segundos para se concluir sua passagem por um obstáculo com descrição detalhadas das relações geométricas vista na FIG. 2.11 segundo um ângulo oblíquo de 30°, a fim de que o veículo passe com uma das rodas por vez provocando efeitos dinâmicos



torcionais, após 20 m de pista a uma velocidade de 10 km/h a exemplo dos outros modelos, partindo de uma condição de equilíbrio estático após a ação da força peso e terminando com uma nova estabilização após os efeitos provocados pelo obstáculo a cada uma das rodas do veículo.

A exemplo do modelo utilizado anteriormente também se adotou uma seleção com os quinze primeiros modos onde se obteve uma excelente aproximação para o resultado de tensão e um amortecimento modal com uma fração de amortecimento de 0,05 que pareceu bastante adequada ao modelo. Os gráficos mostrados da FIG. 3.23 a FIG. 3.29 se referem aos deslocamentos relativos ao plano vertical do veículo, força transmitida ao solo, tensão e torção do chassi, adotando modelos que utilizam a análise modal, já que estes apresentaram anteriormente uma excelente confiabilidade se comparados com os modelos por representação clássica, onde para o primeiro programa são considerados todos os modos e para o segundo programa se faz a seleção do número de modos utilizados.

Para os resultados obtidos em geral verifica-se uma boa aproximação entre os modelos utilizados, sendo este o principal foco, onde devido ao número total de graus de liberdade ainda se é possível adotar um maior número de modos, se considerando nesta escolha a relação entre o baixo custo computacional e a resultados mais satisfatórios.

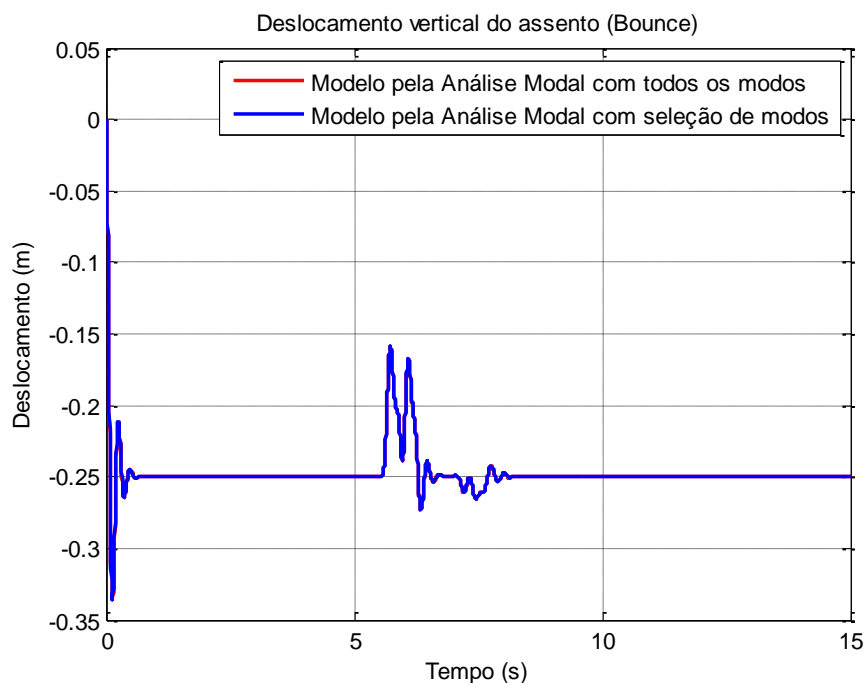


FIG. 3.23 Deslocamento vertical do assento do motorista (Bounce).

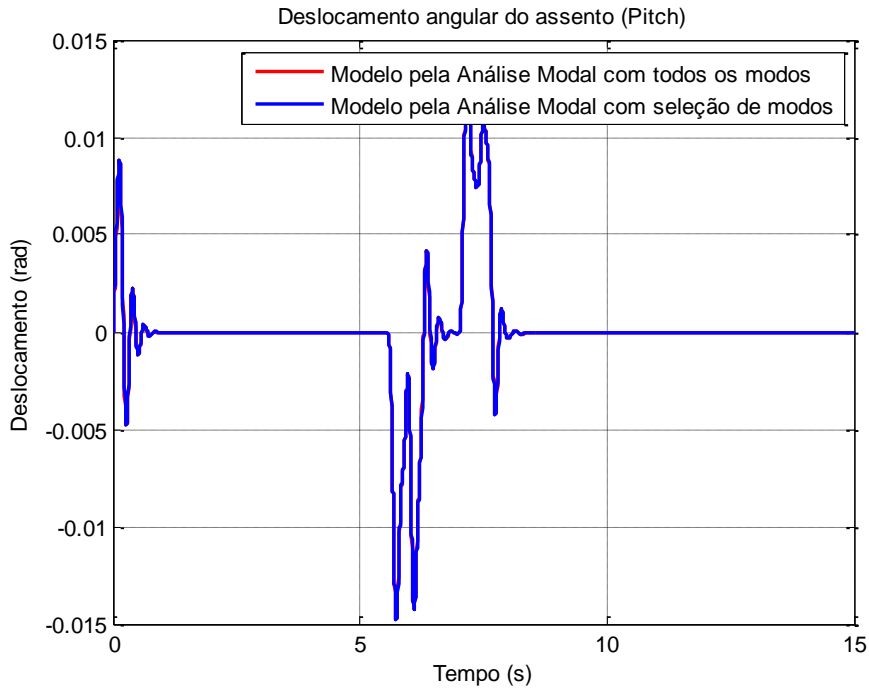


FIG. 3.24 Deslocamento angular do assento do motorista (Pitch).

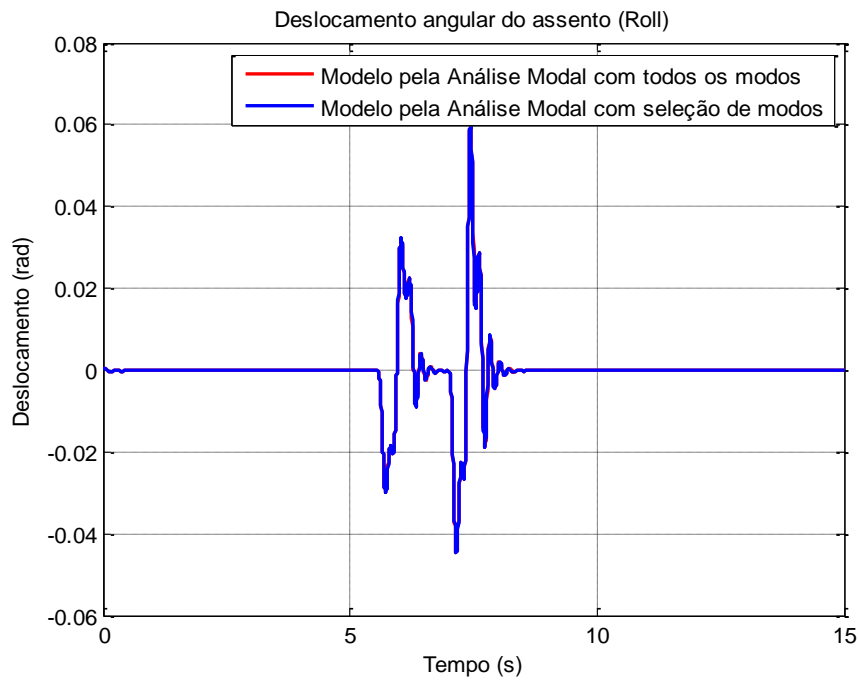


FIG. 3.25 Deslocamento angular do assento do motorista (Roll).

O movimento vertical do veículo “Bounce” tem sua maior amplitude na passagem do pneu do lado esquerdo dianteiro pelo obstáculo apresentando oscilações referentes aos demais eventos da dianteira e traseira. O movimento angular de “Pitch” tem o comportamento

similar, sendo uma consequência do movimento vertical do veículo, ou seja, para o nó escolhido, quanto maior os deslocamentos das suspensões dianteiras e traseiras, maior será o movimento angular.

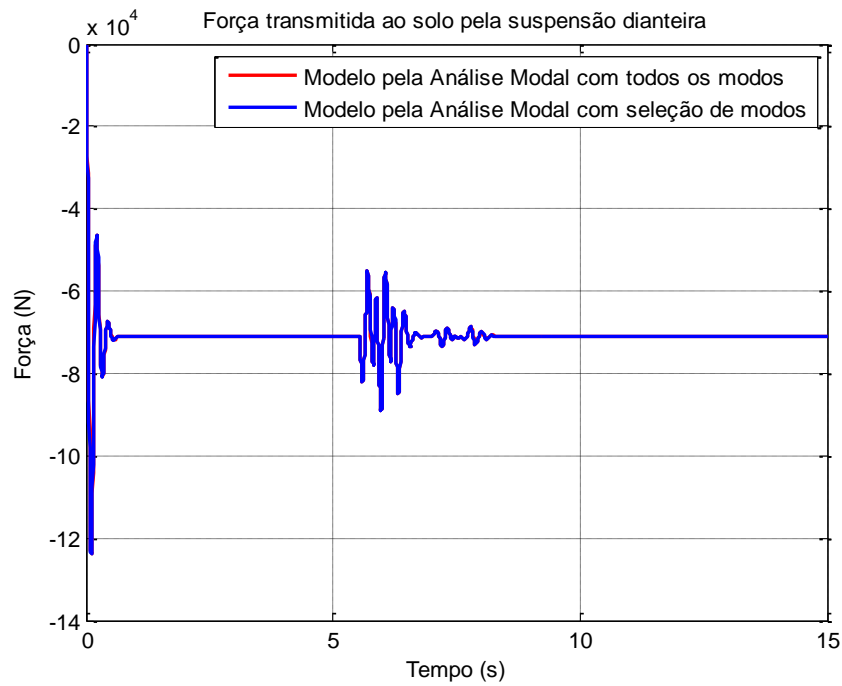


FIG. 3.26 Força transmitida ao solo pelas suspensões dianteiras.

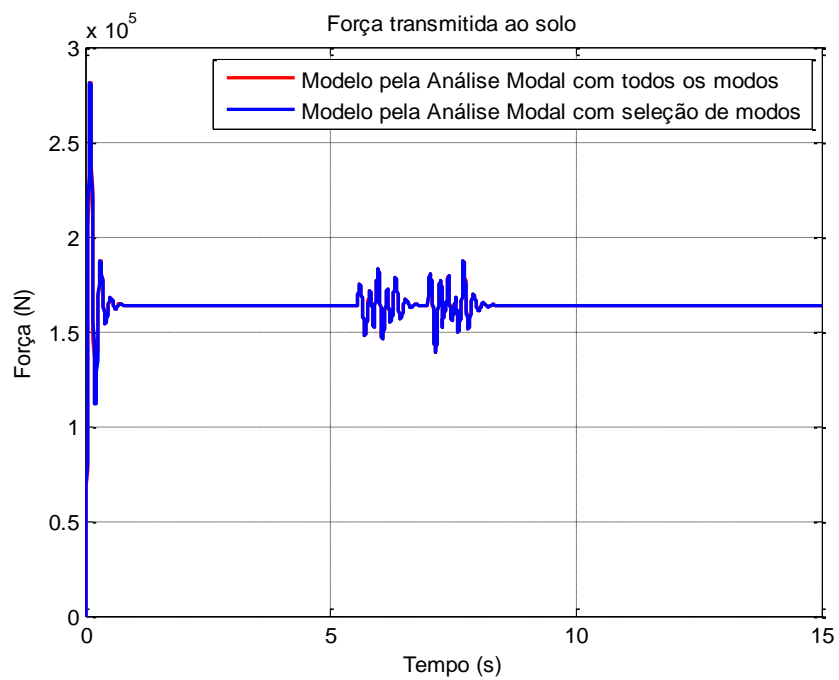


FIG. 3.27 Força transmitida ao solo pelas suspensões.

No gráfico mostrado na FIG. 3.26 é representado pelos esforços que as suspensões dianteiras transmitem ao solo, no qual se observa oscilações em menores amplitudes evidenciando nos intervalos de tempo sujeitos a excitação de base uma transferência de carga imposta pelas suspensões traseiras. Para o gráfico da FIG. 3.27 que mostra as forças transmitidas ao solo pelas quatro suspensões foi feita uma análise com relação ao carregamento imposto ao veículo, chegando-se, ao mesmo resultado para o cálculo estático. A partir destes gráficos pode-se também definir o ponto de CG do veículo, em variados estágios de carregamentos.

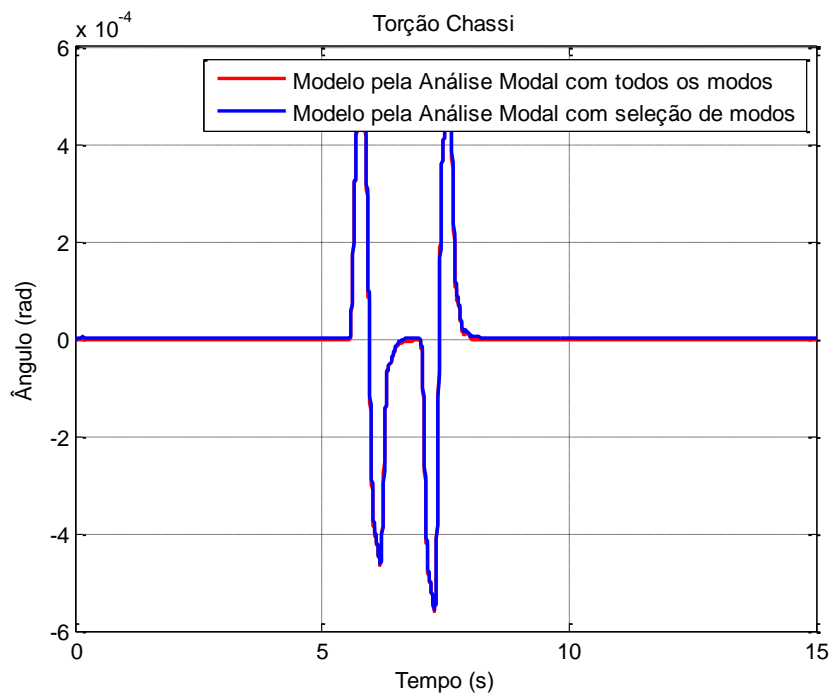


FIG. 3.28 Torção do chassi.

O gráfico da FIG. 3.28 foi obtido a partir dos ângulos que as travessas dianteiras e traseiras formam com o plano horizontal do chassi fornecendo a torção a que ele fica sujeito durante a passagem do veículo pelo o obstáculo.

As EQ. 3.10 e EQ. 3.11 utilizam os graus de liberdade de deslocamento vertical das extremidades do veículo onde  $L$  é o comprimento das travessas, apresentando o resultado da diferença dos ângulos das travessas.

$$\theta_D = \operatorname{arctg} \left( \frac{u_1 - u_{76}}{L} \right) \quad \text{EQ. 3.10}$$

$$\theta_T = \arctg\left(\frac{u_{52}-u_{121}}{L}\right) \quad \text{EQ. 3.11}$$

Portanto com base na figura verifica-se que com a passagem de cada roda do veículo pelo obstáculo ocorre uma variação dos ângulos de inclinação das travessas, demonstrando o efeito de torção a que o chassi fica sujeito quando se considera flexibilidade do chassi, onde o maior valor do ângulo de torção é de aproximadamente  $5,5 \times 10^{-4}$  radianos, o que dá aproximadamente  $0,63^\circ$ , não sendo uma torção considerada, explicável devido às características do modelo e simulação.

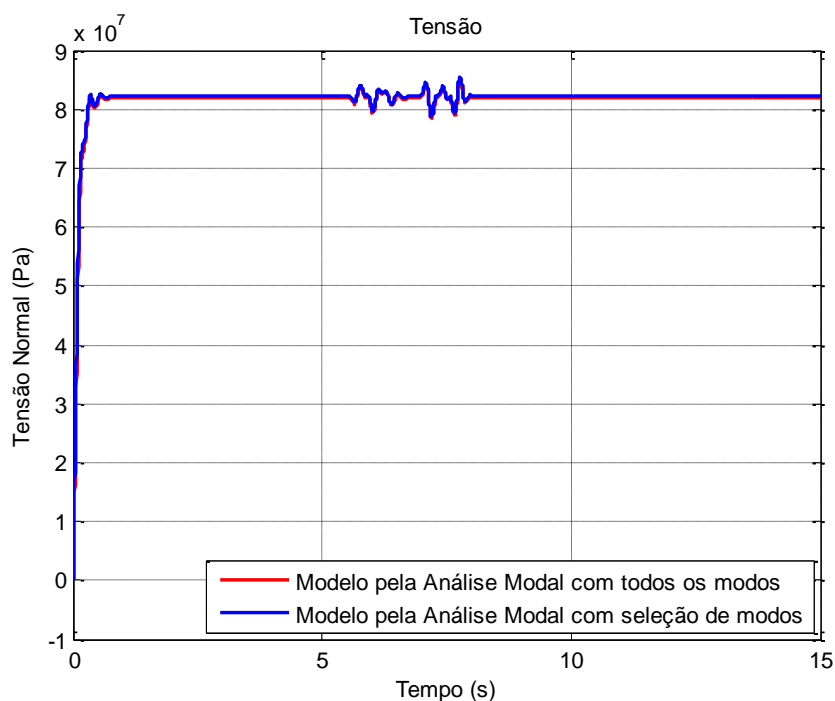


FIG. 3.29 Tensão normal do nó 14 (Ancoragem do feixe de molas traseiro LE).

A tensão normal foi dada durante os quinze segundos de simulação no nó 14 da longarina referente ao primeiro ponto de ancoragem do feixe de molas traseiro situado no lado esquerdo, sabendo que este ponto pode ser considerado como um dos pontos críticos para chassi, utilizando as mesmas funções vistas no modelo representativo de meio veículo, no qual se verificou que o valor da tensão no equilíbrio estático concorda com o calculado analiticamente.

Na FIG. 3.29 mostra uma tensão normal máxima induzida a este ponto do chassi de 85 MPa durante o intervalo de tempo que as rodas transpõe o obstáculo tendo uma razão entre o

valor da tensão dinâmica de pico e o valor de tensão estática neste mesmo nó (81,9 MPa) de aproximadamente 1,04.

Segundo a norma brasileira NBR 6749, o critério para dimensionamento de longarinas, o maior valor de tensão estática induzida pelo carregamento máximo permitido para um veículo deve ser menor que um terço da tensão de ruptura do material. Considerando que o valor da tensão de ruptura para o aço utilizado na confecção de chassi (LNE 38) encontrada em diversas literaturas e tabelas é da ordem de 470 MPa, como a tensão estática máxima desenvolvida pelo modelo é de 81,9 MPa e a tensão dinâmica da simulação encontrada é relativamente baixa, o modelo proposto atende às especificações estabelecidas.

A TAB. 3.7 mostra o percentual de dispersão do valor nominal da tensão após o modelo entrar em equilíbrio estático, onde se observa uma boa representação gráfica mostrada na FIG. 3.29 a partir da utilização de quarenta modos e não tendo erro relativo a partir do uso de cento e vinte modos. Desta forma percebe-se que com a utilização de um número reduzido de modos é possível se obter resultados desejados.

TAB. 3.7 Valores de tensões geradas pelo modelo de estrutura de chassi completo.

QUANTIDADE DE MODOS UTILIZADOS	SEM SELEÇÃO (10e7) Pa	COM SELEÇÃO (10e7) Pa	ERRO PERCENTUAL (%)
4	8,193	5,958	27,28
5	8,193	8,162	0,38
6	8,193	8,163	0,37
7	8,193	7,039	14,09
8	8,193	7,032	14,17
9	8,193	7,070	13,71
10	8,193	7,602	7,21
11	8,193	7,604	7,19
12	8,193	7,642	6,73
13	8,193	7,450	9,07
14	8,193	7,371	10,03
15	8,193	7,372	10,02
20	8,193	8,086	1,31
30	8,193	7,925	3,27
35	8,193	8,036	1,92
40	8,193	8,220	0,33
50	8,193	8,214	0,26
60	8,193	8,213	0,24
90	8,193	8,228	0,43
110	8,193	8,215	0,27
120	8,193	8,193	0,00

## 4. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 4.1 CONCLUSÕES

Utilizou-se neste trabalho procedimentos da técnica dos Grafos de Ligação e Método da Análise Modal para redução de ordem de matrizes no desenvolvimento de modelos se comparando resultados obtidos referentes ao comportamento dinâmico de estruturas flexíveis através do programa MATLAB/SIMULINK.

O desenvolvimento de modelos de subsistemas estrutural através de suas autofunções implica no conhecimento prévio da solução analítica da equação diferencial parcial de governo, trazendo uma limitação para a modelagem de estruturas com condições de contorno mais complexas, podendo estas ser superadas por métodos como o Método dos Elementos Finitos e o conceito de campos multiportas para caracterização do subsistema estrutural.

Nas modelagens tanto para estruturas flexíveis planas quanto tridimensionais discretizadas pelo Método dos Elementos Finitos, se concluiu que a técnica dos Grafos é bastante simples na obtenção das equações de estado e de saída, podendo ainda ser mais simplificadas com o desenvolvimento individual de subsistemas que interagem entre si explorando a característica modular desta técnica que apresentou uma excelente compatibilidade com o programa MATLAB/SIMULINK que tem sua construção feita por blocos interligados, que facilitam os acoplamentos entre os subsistemas e a extração dos dados relevantes aos modelos. Esta propriedade também é utilizada em outros trabalhos, como o desenvolvido por Da ROCHA (1998) que utiliza um modelo de um sistema global capaz de interagir vários subsistemas representando um veículo de transporte urbano em script e ANDRADE (1995) utiliza esta propriedade, onde os elementos estruturais estão limitados a vigas planas.

O Método da Análise Modal e a seleção de modos se demonstraram bastantes eficientes até mesmo quando se tratando da geração de resultados para análises de tensão que devido à utilização da derivada segunda das funções de interpolação, foram os resultados que dependeram do maior número de modos, não tendo alteração quando sem a seleção, ou seja, com a utilização de todos os modos os resultados não apresentaram qualquer variação, e tendo ainda uma grande vantagem com relação à representação que não utiliza o método, por terem

matrizes transformadas (diagonais), que fazem com que os programas se tornem mais leves, reduzindo consideravelmente o custo computacional.

Os resultados encontrados com as simulações dos modelos se mostraram coerentes, onde se procurou comparar os valores no equilíbrio estático fornecidos pelas simulações com os valores calculados analiticamente. Durante o transiente nos intervalos de tempo em que houve simulação dinâmica, os resultados do comportamento dinâmico também se apresentaram coerentes, para os diferentes métodos utilizados, onde foram encontrados os mesmos valores o que dá uma confiabilidade numérica aos resultados, validando os procedimentos para as situações apresentadas, ressaltando que a escolha do número de modos deve ser sempre avaliada.

## 4.2 SUGESTÕES

A partir da modularidade da técnica dos Grafos e sua compatibilidade com o software MATLAB/SIMULINK, os acoplamentos de modelos matemáticos desenvolvidos separadamente podem ser simulados facilmente, oferecendo a oportunidade de se chegar a modelos de sistemas distintos que interajam entre si. Os modelos deste trabalho foram desenvolvidos baseados em modelos de outras literaturas, com o principal foco na exploração de procedimentos que podem ser de grande auxílio no desenvolvimento de modelos bem complexos, e análises mais completas.

Nos modelos propostos, por exemplo, os programas oferecem conexões que permitem extrair outras tantas informações sobre a dinâmica vertical como deslocamento das suspensões, acelerações verticais entre outras, podendo se incluir outros desenvolvimentos e aprimorar os programas.

A seguir são enumeradas algumas melhorias a serem exploradas:

1) Incluir os efeitos dinâmicos do motor, assim como o do assento do motorista podendo simular a excitação provocada pelo mesmo.

2) Conforme dito anteriormente fazer o acoplamento de outros subsistemas distintos.

3) Aproveitar os procedimentos do Método da Análise Modal e a seleção de modos que reduzem o número de variáveis, utilizados e validados neste trabalho, ou ainda utilizar outros



métodos de condensação de matrizes para elaborar modelos mais complexos, discretizados em um maior número de elementos.

4) Desenvolver códigos automatizados, capazes de ordenar as matrizes principais das estruturas.

5) Desenvolver obstáculos mais severos que proporcionem resultados mais realísticos das solicitações da dinâmica vertical.

6) Gerar e avaliar resultados relacionados ao conforto proporcionado pelo veículo a passageiros com base em normas vigentes.

7) Desenvolver códigos e análises para a seleção dos modos mais representativos da estrutura, melhorando a flutuação de precisão dos resultados vistos nas tabelas.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRADE, B. L. B., **Análise das Interações Dinâmicas entre Sistemas Mecânicos Lineares Contínuos e Discretos**, Dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, 1995.
- BATHE, K. J., **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**, Prentice Hall, New Jersey, 1982.
- BATHE, K. J. & E. L. WILSON, **Numerical Methods in Finite Element Analysis**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- BEER, F. P. e JOHNSTON, JR., E.R., **Resistência dos Materiais**, 3.º Ed., Makron Books, 1995.
- BESSA, W. M., **Abordagem do Problema de Cargas Móveis Através de uma Técnica Multidisciplinar de Modelagem**, Dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, 2000.
- BIGGS, J. M., **Introduction to Structural Dynamics**, McGraw Hill, New York, 1964.
- CRAIG, R. R., **Structural Dynamics**, John Wiley & Sons, 1981.
- CLOUGH, R. W. e PENZIEN, J., **Dynamics of Structures**, McGraw-Hill, 1993.
- DA ROCHA, R. S., **Análise Dinâmica de Chassi Veicular Utilizando os Procedimentos Generalizados da Técnica dos Grafos de Ligação**, Dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, 1998.
- DA SILVA, F. R., **Procedimentos para a Análise Estrutural Dinâmica Através da Técnica Generalizada dos Grafos de Ligação**, Tese Doutorado, COOPE, Rio de Janeiro, 1994.
- FERREIRA, F. M., **Modelagem de Sistemas Dinâmicos utilizando Procedimentos Modulares**, Dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, 2006.
- JAZAR, R. N., **Vehicle Dynamics – Theory and Application**, Springer, 2008.
- KARNOPP, D. C., MARGOLIS, D. L. & ROSEMBERG, R.C., **System Dynamics: A Unified Approach**, John Wiley, New York, 1990.
- LEITE, I. C., **Análise Dinâmica de Veículos com Estrutura Flexível Através de Técnicas Modulares de Modelagem**, Dissertação de Mestrado, IME, Rio de Janeiro, 2007.
- MARGOLIS, D. L., **Bond Graph, Normal Modes and Vehicular Structures, Vehicle System Dynamics**, Vol. 7, pp. 49-63, 1978.

MARGOLIS, D. L., **Dynamical Models for Multidimensional Structures Using Bond Graphs**, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and control, Vol. 102, N° 2, pp. 94-100, 1980.

MATHWORKS INC, **Matlab R2008b User's Guide**, Massachusetts, USA, 2008.

NBR 6749 – **Cálculo dos reforços nas longarinas do quadro do chassi para caminhões equipados com eixo veicular auxiliar**, 1988.

POPOV, E. P., **Resistência dos Materiais**, 2º Ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.

RAO, S. S., **Vibrações Mecânicas**, Pearson Prentice Hall, 2008.

## 6. APÊNDICES

## 6.1 APÊNDICE 1: MODELO DE ESTRUTURA PLANA PELO MÉTODO DA ANÁLISE MODAL E A TÉCNICA DO GRAFO DESENVOLVIDO EM SCRIPT NO MATLAB

Utilizando os procedimentos vistos, pode-se facilmente obter o equacionamento de modelo de estado pela técnica dos Grafos do sistema global das FIG. 2.8 e FIG. 2.15 para meio veículo, neste caso mostrado abaixo para o modelo que emprega o Método da Análise Modal para redução de matrizes. Estas equações também podem ser utilizadas para os outros modelos se alterando as suas matrizes características.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -[M_u]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ [K_u] & -[M_u]^{-1}([b_u] + [b_s]) & -[K_s] & 0 & [b_s][T]^T[\emptyset][M]^{-1} \\ 0 & [M_u]^{-1} & 0 & 0 & [T]^T[\emptyset][M]^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [M]^{-1} \\ 0 & [\emptyset]^T[T][b_s][M_u]^{-1} & [\emptyset]^T[T][K_s] & -[K] & -[\emptyset]^T[T][b_s][T]^T[\emptyset][M]^{-1} - [B][M]^{-1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} [I] & 0 & 0 \\ [b_u] & [I] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [I] \end{bmatrix}$$

EQ. 6.1

$$X = \begin{bmatrix} q_3 \\ p_7 \\ q_{10} \\ q_{16} \\ p_{18} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} f_1 \\ e_6 \\ e_{19} \end{bmatrix}$$

O desenvolvimento em MATLAB/SIMULINK pelas equações diretas de Newton-Euler já utilizado servirá para uma comparação de coerência de resultado para o modelo de estrutura flexível plana da FIG. 2.7 com as mesmas características em script com e sem seleção de modos. O modelo nesta fase estará sobre a influência da força peso, com uma distância do eixo dianteiro ao CG de 50%, sem excitação de base, totalizando um intervalo de tempo de 5 segundos necessários a sua estabilização.

Pode se observar que os resultados obtidos para o modelo de meio veículo em script tanto com a utilização de todos quanto com a seleção de modos que neste caso foram dois em um total de quatorze tem uma excelente aproximação podendo representar o modelo.

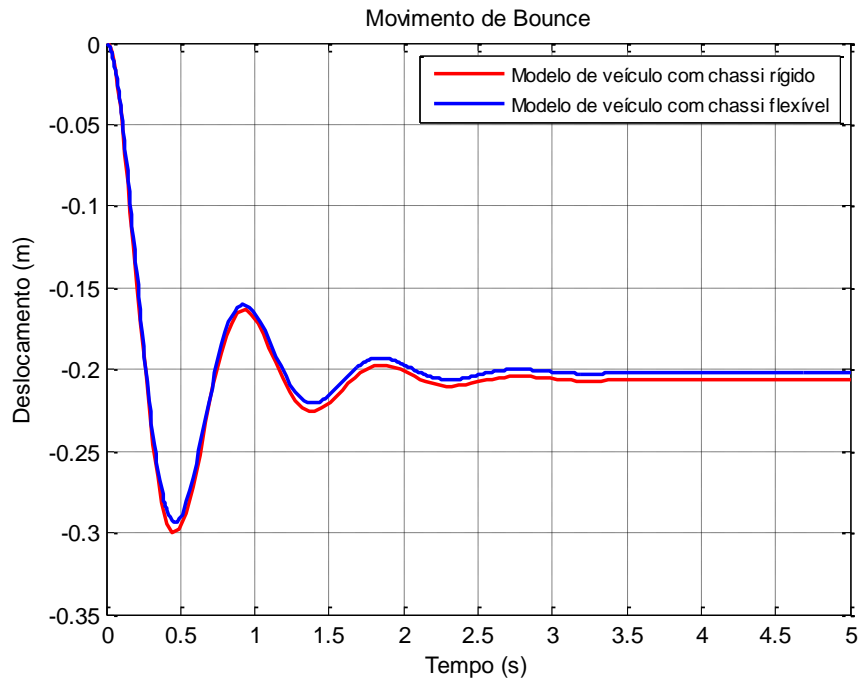


FIG. 6.1 Gráfico com resultado em Script e SIMULINK.

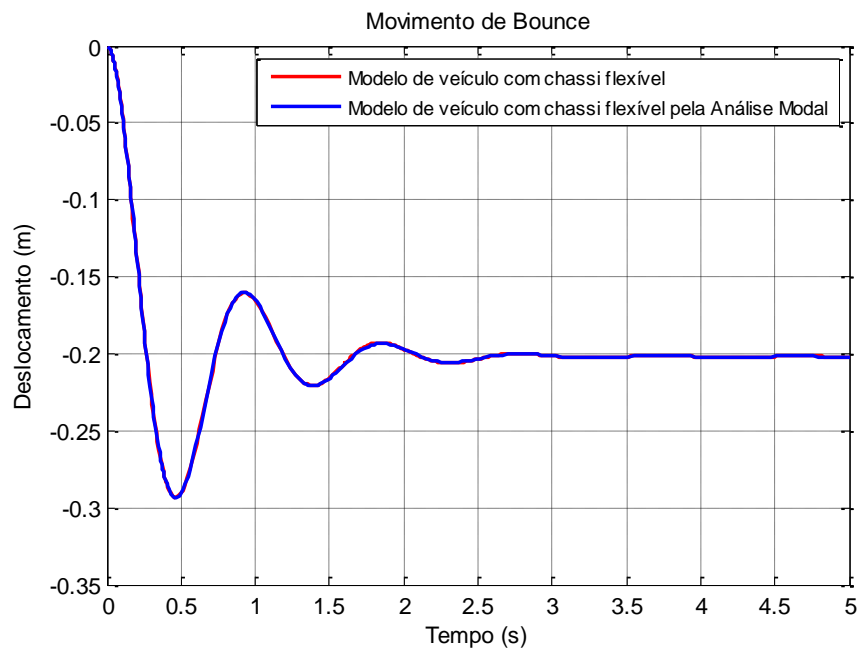


FIG. 6.2 Gráfico com resultado em Script com e sem utilização da análise modal.

A TAB. 6.1 mostra o custo computacional para os modelos utilizados, onde se observa o baixo custo computacional quando utilizado o Método da Análise Modal, mesmo sem a seleção de modos.

TAB. 6.1 Planilha com resultados em Script com e sem utilização da Análise Modal.

MÉTODO UTILIZADO		TEMPO (Seg.)
Equações de estado.		724,97097
Equações de estado com utilização da análise modal.	Sem seleção de modos.	0,228576
	Com seleção de modos.	0,183389

## 6.2 APÊNDICE 2: MODELO DO COMPUTADOR E ODE UTILIZADA NAS SIMULAÇÕES.

O modelo do computador utilizado em todas as simulações realizadas trata-se de Notebook Dell, com processador Intel ® Core™ 2 Duo de 2.20 GHz e memória RAM de 4,00 Gb. Sendo necessário para a compilação em MATLAB/SIMULINK ajuste na configuração, devido a problemas gerados dependendo do tipo de ODE empregada.

Utilizou-se a ODE 15s, que conforme informações dadas pelo próprio software através do “help” pareceu ser a mais adequada ao se comparar o tempo e evitando a falta de convergência dos resultados durante as simulações, devido a sua empregabilidade em problemas que apresentam altos valores quando a ODE 45 que é mais utilizada se torna mais lenta.

A FIG. 6.3 mostra a tela de configurações de parâmetros do SIMULINK, onde além da ODE se alterou a tolerância relativa de  $10^{-3}$  para  $10^{-5}$ .

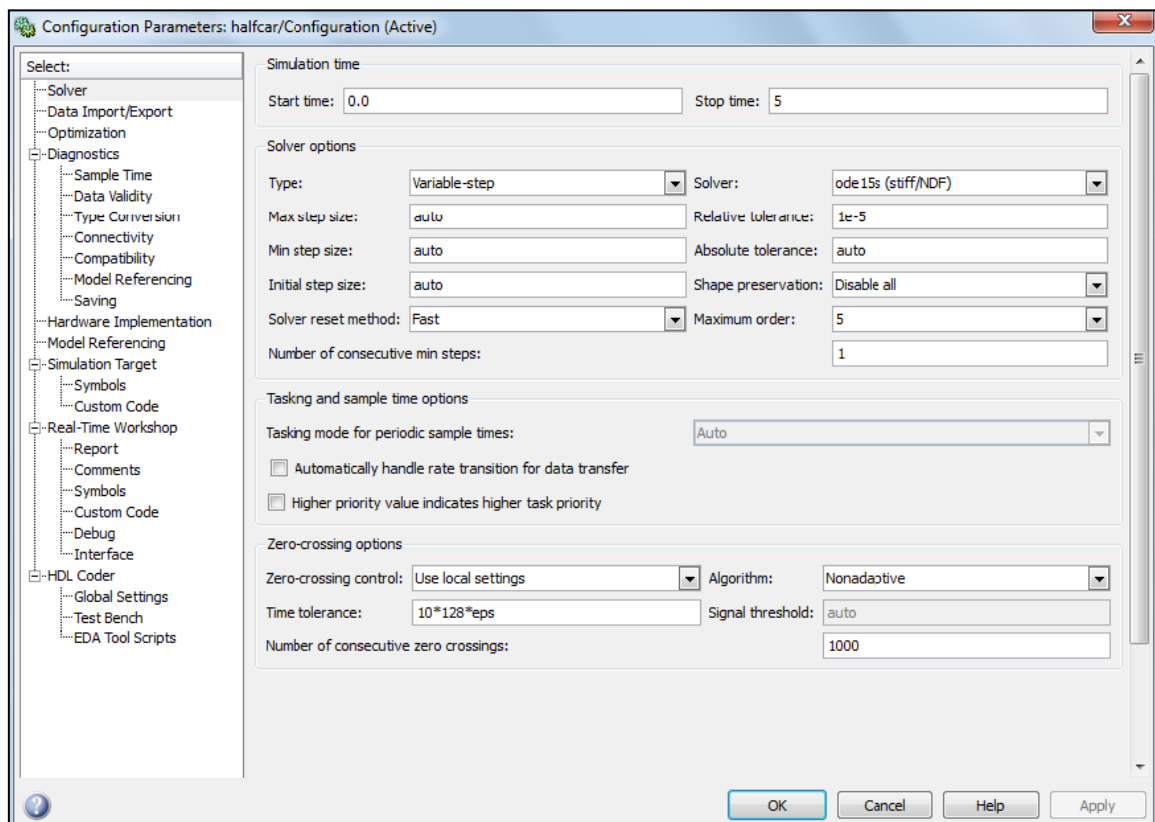


FIG. 6.3 Tela de configuração de parâmetros do SIMULINK.