

**MINISTÉRIO DA DEFESA  
EXÉRCITO BRASILEIRO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**CAP ÉDIO PEREIRA LIMA JÚNIOR**

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO COLAPSO DO CONE  
DE CARGA OCA SOB EFEITO DE ONDA DE DETONAÇÃO**

**Rio de Janeiro**

**2012**

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**Cap ÉDIO PEREIRA LIMA JÚNIOR**

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO COLAPSO DO CONE DE  
CARGA OCA SOB EFEITO DE ONDA DE DETONAÇÃO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Arnaldo Ferreira – Ph.D.

Rio de janeiro

2012

C2012

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro - RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e do orientador.

662.27 Lima Jr., Édio Pereira  
L732s Simulação computacional do colapso do cone de carga oca sob efeito de onda de detonação/ Édio Pereira Lima Júnior; orientado por Arnaldo Ferreira – Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2012.

148p.: il., graf., tab.: – cm

Dissertação (mestrado) – Instituto Militar de Engenharia – Rio de Janeiro, 2012.

1. Engenharia mecânica – teses e dissertações. 2. Carga oca (detonação de explosivos). I. Ferreira, Arnaldo. II. Título. III. Instituto Militar de Engenharia.

CDD 662.27

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**Cap ÉDIO PEREIRA LIMA JÚNIOR**

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO COLAPSO DO CONE DE  
CARGA OCA SOB EFEITO DE ONDA DE DETONAÇÃO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Arnaldo Ferreira – Ph. D.

Aprovada em 18 de dezembro de 2012 pela seguinte Banca Examinadora:

---

Prof. Arnaldo Ferreira – Ph. D. do IME – Presidente

---

Prof. André Luiz Tenório Rezende – Maj – D. C. do IME

---

Prof. Aldélio Bueno Caldeira – Maj – D. C. do IME

---

Prof. Francisco José da Cunha Pires Soeiro – Ph. D. da UERJ

Rio de Janeiro

2012

A minha esposa Carina e a minha pequena filha Ana Laura, pelo apoio e carinho.

## **AGRADECIMENTOS**

A minha esposa Carina que com sua ternura e carinho em muito contribui para este trabalho.

A minha filha Ana Laura, nascida no transcorrer do curso, que mesmo sem tomar ciência do trabalho realizado em muito contribui simplesmente com o seu sorriso.

Aos meus pais pelo incentivo e dedicação principalmente nas primeiras etapas do ensino que culminaram no presente trabalho.

Ao Professor Arnaldo Ferreira, pela orientação, dedicação, conselhos, amizade e por todo apoio prestado na elaboração deste trabalho.

Aos professores da Seção de Engenharia Mecânica e de Materiais do Instituto Militar de Engenharia, pelo apoio, auxílio e contribuição no trabalho.

Ao Maj Baeta Neves, pela colaboração ao longo do trabalho.

A todas as pessoas que de alguma forma contribuíram na elaboração deste trabalho.

E, finalmente, a Deus, pela benção da vida que possibilitou a realização de mais um sonho.

“Pedras no caminho? Guardo todas, um dia vou construir um castelo.”

FERNANDO PESSOA

## SUMÁRIO

LISTAS DE ILUSTRAÇÕES.....	10	
LISTA DE TABELAS .....	13	
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS.....	14	
LISTA DE SIGLAS .....	19	
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO..... 22</b>	
1.1	Considerações Iniciais..... 22	
1.2	Motivação..... 23	
1.3	Objetivo..... 24	
1.4	Organização do Trabalho .....	24
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA..... 26</b>	
2.1	Carga Oca..... 26	
2.1.1	Histórico..... 27	
2.1.2	Aplicações Militares .....	30
2.1.3	Aplicações Civis .....	31
2.2	Ondas de Choque .....	32
2.3	Ondas de Detonação..... 32	
2.4	Método Numérico – SPH..... 33	
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO TEÓRICA ..... 38</b>	
3.1	Equações de Conservação .....	38
3.1.1	Conservação de Massa .....	39
3.1.2	Conservação de Momentum..... 41	
3.1.3	Conservação de Energia..... 42	
3.2	Velocidade .....	44
3.3	Propagação de Ondas .....	45
3.3.1	Ondas de Choque .....	45
3.3.2	Ondas de Detonação..... 46	
3.4	Equações Algébricas de Conservação..... 46	
3.5	Velocidade do Som .....	48
3.6	Equações de Estado..... 50	
3.6.1	Equação de Estado do Material..... 50	



3.6.2	Relações de Rankine-Hugoniot.....	51
3.6.3	Equação de Estado de Mie-Grüneisen .....	54
3.6.4	Equação de Estado de Jones-Wilkins-Lee .....	57
3.7	Teoria da Elasticidade .....	58
3.7.1	Desviador de Tensões .....	60
3.7.2	Critério de von Mises .....	61
3.8	Regime Plástico.....	63
<b>4</b>	<b>MODELO NUMÉRICO .....</b>	<b>65</b>
4.1	Bases Matemáticas do Método SPH .....	65
4.1.1	Representação Integral .....	65
4.1.2	Propriedades da Função de Interpolação .....	66
4.1.3	Representação das Derivadas .....	68
4.1.3.1	Gradiente .....	68
4.1.3.2	Divergente .....	69
4.1.3.3	Produto Vetorial .....	69
4.1.3.4	Gradiente da Função de Suavização .....	69
4.2	Funções de Suavização .....	70
4.2.1	Gaussiana .....	71
4.2.2	“Spline” Cúbica.....	72
4.2.3	Quadrática .....	73
4.3	Aproximação Para Partículas .....	74
4.4	Viscosidade Artificial .....	76
4.5	Aproximação das Equações de Governo .....	77
4.5.1	Massa Específica.....	77
4.5.2	Conservação de Momentum.....	79
4.5.3	Conservação de Energia.....	80
4.6	Passo de Tempo .....	81
<b>5</b>	<b>DESENVOLVIMENTO .....</b>	<b>82</b>
5.1	Simulações no Plano .....	82
5.2	Disposição Inicial de Partículas .....	83
5.3	Integrador .....	84
5.4	Procedimento de Cálculo .....	85
<b>6</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>90</b>
6.1	Carga Oca de TNT .....	90
6.1.1	Iniciação Plana .....	92
6.1.1.1	Detonação do Explosivo .....	92

6.1.1.2	Interação com o revestimento metálico .....	96
6.1.2	Iniciação Pontual .....	103
6.1.2.1	Detonação do explosivo .....	103
6.1.2.2	Interação com o revestimento .....	105
6.1.3	Iniciação Reversa .....	107
6.1.4	Comparação com Resultados da Literatura .....	111
6.2	Carga Oca de Composto B .....	112
6.2.1	Iniciação em 1 ponto .....	114
6.2.2	Iniciação em 2 pontos .....	120
6.2.3	Comparação com Resultados da Literatura .....	126
6.3	Variação de parâmetros.....	127
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>136</b>
7.1	Conclusões .....	136
7.2	Sugestões.....	137
<b>8</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>139</b>
<b>9</b>	<b>APÊNDICES.....</b>	<b>144</b>
9.1	Apêndice 1: Parâmetros de Diversos Materiais .....	145
9.2	Apêndice 2: Parâmetros de ajuste da equação JWL .....	148

## LISTAS DE ILUSTRAÇÕES

FIG. 2.1 Configuração de carga oca cônica .....	26
FIG. 2.2 Colapso da carga oca .....	27
FIG. 2.3 Efeitos do posicionamento dos cartuchos de explosivo.....	28
FIG. 2.4 Resultados experimentais: (a) sem cavidade, (b) com cavidade e (c) cavidade com revestimento. ....	29
FIG. 2.5 Munição 90 mm anti-carro seccionada.....	30
FIG. 2.6 Projétil formado por explosão.....	31
FIG. 2.7 Malha típica Lagrangeana.....	35
FIG. 2.8 Malha típica Euleriana .....	36
FIG. 2.9 Discretização típica por elementos .....	37
FIG. 3.1 Forças na direção x da célula infinitesimal em um sistema Lagrangeano.....	38
FIG. 3.2 Velocidade nas faces da célula infinitesimal .....	40
FIG. 3.3 Perfil idealizado da onda de choque .....	45
FIG. 3.4 Frente de onda.....	47
FIG. 3.5 Distúrbio de pressão.....	48
FIG. 3.6 Velocidade da onda de choque (km/s) (a) e pressão (GPa) (b) versus velocidade de partícula.....	51
FIG. 3.7 Relações de Hugoniot no gráfico $PxV$ .....	53
FIG. 3.8 Hugoniot para alguns materiais .....	54
FIG. 3.9 Curvas idealizadas da relação entre tensão e deformação .....	61
FIG. 3.10 Superfície de escoamento .....	64
FIG. 4.1 Função gaussiana e primeira derivada.....	72
FIG. 4.2 Função “spline” cúbica e primeira derivada.....	73
FIG. 4.3 Função quadrática e primeira derivada.....	74
FIG. 5.1 Configuração inicial de partículas .....	83
FIG. 5.2 Esquema de integração .....	85
FIG. 5.3 Fluxograma .....	86
FIG. 6.1 Configuração inicial da carga e formas de iniciação .....	91
FIG. 6.2 Iniciação plana em $t = 2,5 \mu\text{s}$ .....	92
FIG. 6.3 Pressão (GPa) em $t = 2,5 \mu\text{s}$ .....	93
FIG. 6.4 Massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ) em $t = 2,5 \mu\text{s}$ .....	93

FIG. 6.5 Velocidade (km/s) em $t = 2,5 \mu\text{s}$ .....	94
FIG. 6.6 Vetor velocidade em $t = 2,5 \mu\text{s}$ .....	94
FIG. 6.7 Posição (mm) no tempo $t = 5,0 \mu\text{s}$ .....	95
FIG. 6.8 Pressão (GPa) no tempo $t = 5,0 \mu\text{s}$ .....	95
FIG. 6.9 Posição (mm) no tempo $t = 7,5 \mu\text{s}$ .....	97
FIG. 6.10 Massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ) no tempo $t = 7,5 \mu\text{s}$ .....	97
FIG. 6.11 Pressão (GPa) no tempo $t = 7,5 \mu\text{s}$ .....	98
FIG. 6.12 Revestimento em $t = 7,5 \mu\text{s}$ : (a) pressão (GPa) e (b) massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ).....	99
FIG. 6.13 Velocidade (km/s) no tempo $t = 7,5 \mu\text{s}$ .....	99
FIG. 6.14 Velocidade (km/s) do revestimento no tempo $t = 7,5 \mu\text{s}$ .....	100
FIG. 6.15 Partículas (mm) no tempo $t = 10,0 \mu\text{s}$ .....	100
FIG. 6.16 Velocidade (km/s) no tempo $t = 10,0 \mu\text{s}$ .....	101
FIG. 6.17 Tempo $t = 20,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ).....	101
FIG. 6.18 Tempo $t = 20,0 \mu\text{s}$ : (a) pressão (GPa) e (b) velocidade (km/s).....	102
FIG. 6.19 Jato no tempo $t = 40,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) velocidade (km/s).....	102
FIG. 6.20 Posição no tempo $t = 5,0 \mu\text{s}$ .....	104
FIG. 6.21 Pressão (GPa) no tempo $t = 5,0 \mu\text{s}$ .....	104
FIG. 6.22 Pressões (GPa) no tempo $t = 7,5 \mu\text{s}$ .....	105
FIG. 6.23 Velocidade (km/s) no tempo $t = 10,0 \mu\text{s}$ .....	106
FIG. 6.24 Jato no tempo $t = 20,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) velocidade (km/s).....	106
FIG. 6.25 Jato no tempo $t = 40,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) velocidade (km/s).....	107
FIG. 6.26 Partículas no tempo $t = 2,5 \mu\text{s}$ .....	108
FIG. 6.27 Pressões (GPa) no tempo $t = 2,5 \mu\text{s}$ .....	108
FIG. 6.28 Posição (mm) no tempo $t = 5,0 \mu\text{s}$ .....	109
FIG. 6.29 Tempo $t = 5,0 \mu\text{s}$ : (a) pressão (GPa) e (b) velocidade (km/s).....	109
FIG. 6.30 Tempo $t = 20,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) velocidade (km/s).....	110
FIG. 6.31 Tempo $t = 40,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) velocidade (km/s).....	110
FIG. 6.32 Velocidade da ponta do jato (km/s) ao longo do tempo.....	111
FIG. 6.33 Configuração inicial da carga de Comp B.....	114
FIG. 6.34 Pressões (GPa) no tempo $t = 5,0 \mu\text{s}$ .....	114
FIG. 6.35 Posição da frente de onda no tempo $t = 5,0 \mu\text{s}$ .....	115
FIG. 6.36 Velocidades (km/s) em $t = 5,0 \mu\text{s}$ .....	115
FIG. 6.37 Interação em $t = 10,0 \mu\text{s}$ : (a) pressões (GPa) e (b) massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ).....	116

FIG. 6.38	Formação do jato em $t = 15,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) pressão (GPa).....	116
FIG. 6.39	Contornos em $t = 15,0 \mu\text{s}$ : (a) velocidade (km/s) e (b) massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ) .	117
FIG. 6.40	Evolução (mm) em $t =$ (a) 20,0, (b) 40,0, (c) 60,0, (d) 80,0 e (e) 100,0 ( $\mu\text{s}$ ) .....	118
FIG. 6.41	Velocidade (km/s) em $t =$ (a) 20,0, (b) 40,0, (c) 60,0, (d) 80,0 e (e) 100,0 ( $\mu\text{s}$ )....	119
FIG. 6.42	Tempo $t = 5,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) pressão (GPa) .....	120
FIG. 6.43	Tempo $t = 5,0 \mu\text{s}$ : (a) velocidade (km/s) e (b) massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ).....	121
FIG. 6.44	Tempo $t = 10,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) pressão (GPa) .....	122
FIG. 6.45	Tempo $t = 10,0 \mu\text{s}$ : (a) velocidade (km/s) e (b) massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ).....	122
FIG. 6.46	Tempo $t = 15,0 \mu\text{s}$ : (a) pressões (GPa) e (b) velocidade (km/s) .....	123
FIG. 6.47	Evolução (mm) em $t =$ (a) 20,0, (b) 40,0, (c) 60,0, (d) 80,0 e (e) 100,0 ( $\mu\text{s}$ ) .....	124
FIG. 6.48	Velocidade (km/s) em $t =$ (a) 20,0, (b) 40,0, (c) 60,0, (d) 80,0 e (e) 100,0 ( $\mu\text{s}$ )....	125
FIG. 6.49	Comparação dos resultados .....	126
FIG. 6.50	Carga padrão .....	128
FIG. 6.51	Velocidade do jato em função da variação de parâmetros (km/s).....	129
FIG. 6.52	Massa de explosivo e revestimento (kg).....	130
FIG. 6.53	Tempo de interação ( $\mu\text{s}$ ) .....	130
FIG. 6.54	Ponto de colapso na carga de $30^\circ$ .....	131
FIG. 6.55	Ponto de colapso na carga de $120^\circ$ .....	131
FIG. 6.56	Massa do jato (g).....	132
FIG. 6.57	Comprimento do jato (mm) .....	132
FIG. 6.58	indicador de densidade do jato ( $\text{g}/\text{mm}$ ).....	133
FIG. 6.59	Razão de massa do jato pelo revestimento .....	133
FIG. 6.60	Quantidade de movimento do jato (KN/s).....	133
FIG. 6.61	Energia do jato (KJ).....	134
FIG. 6.62	Configuração do jato $t = 50,0 \mu\text{s}$ : (a) $30^\circ$ até (n) $160^\circ$ .....	135

## LISTA DE TABELAS

TAB. 2.1 Comparação entre abordagens Lagrangeana e Euleriana com malha .....	36
TAB. 3.1 Parâmetros de choque.....	51
TAB. 3.2 Parâmetros de ajuste da equação JWL .....	57
TAB. 5.1 Parâmetros utilizados nas simulações .....	89
TAB. 6.1 Propriedade no explosivo em diferentes instantes de tempo.....	96
TAB. 6.2 Propriedade no cone em diferentes instantes de tempo.....	103
TAB. 6.3 Comparação entre a detonação plana e a esférica do explosivo .....	105
TAB. 6.4 Comparação entre a interação da iniciação plana e da esférica .....	107
TAB. 6.5 Comparação entre a interação da iniciação plana com a reversa .....	110
TAB. 6.6 Parâmetros da equação de JWL do Comp B das simulações de Yang et al.....	113
TAB. 6.7 Parâmetros de choque do Cobre utilizados nas simulações de Yang et al.....	113
TAB. 6.8 Posição e velocidade do jato na iniciação em 1 ponto .....	120
TAB. 6.9 Posição e velocidade do jato na iniciação em 2 pontos.....	126
TAB. 9.1 Parâmetros de diversos materiais .....	145
TAB. 9.2 Parâmetros de ajuste da equação de estado de JWL .....	148

## LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

### ABREVIATURAS

Cin.	–	Cinética
Inic.	–	Iniciação
Rev.	–	Revestimento

### SÍMBOLOS

$A$	–	parâmetro de ajuste da equação de estado de Jones-Wilkins-Lee (Pa)
$A_0$	–	parâmetro de ajuste da equação de estado de Mie-Grüneisen (Pa)
$A_R$	–	área arbitrária (m <sup>2</sup> )
$a$	–	constante linear de viscosidade artificial do SPH
$B$	–	parâmetro de ajuste da equação de estado de Jones-Wilkins-Lee (Pa)
$B_0$	–	parâmetro de ajuste da equação de estado de Mie-Grüneisen (Pa)
$b$	–	constante quadrática de viscosidade artificial do SPH
$C(d)$	–	coeficiente de normalização da função de suavização do SPH
$C_0$	–	parâmetro de ajuste da equação de estado de Mie-Grüneisen (Pa)
$C_V$	–	calor específico a volume constante (J/kgK)
$c$	–	velocidade do som (m/s)
$c_0$	–	termo independente da equação de estado do material (m/s)
$d$	–	dimensão do problema considerado no SPH
$d^{\alpha\beta}$	–	tensor deslocamento relativo (m)
$E_x$	–	contribuição na energia interna devido aos efeitos de deslocamento no eixo x (J)
$e$	–	energia interna específica (J/kg)
$e_0$	–	energia interna específica no instante inicial (J/kg)
$e_D$	–	energia de detonação por unidade de massa (J/kg)
$e_H$	–	energia interna específica de Hugoniot (J/kg)

$e_x, e_y, e_z$	– energia interna específica devido aos efeitos de deslocamento nos eixos x, y e z (J/kg)
$F(\mathbf{x})$	– função escalar qualquer
$\mathbf{F}(\mathbf{x})$	– função vetorial qualquer
$F_p$	– força de penalização (N)
$F_x$	– força na direção x (N)
$f(\mathbf{x})$	– função qualquer escalar ou vetorial
$G$	– Módulo de elasticidade transversal (Pa)
$h$	– comprimento característico ou comprimento suavizante das partículas no SPH
$\mathbf{I}$	– matriz identidade
$i$ e $j$	– partículas do SPH
$J_1$	– primeiro invariante do tensor desviador (Pa)
$J_2$	– segundo invariante do tensor desviador (Pa <sup>2</sup> )
$K$	– módulo de Compressibilidade – “Bulk modulus” (Pa)
$k$	– fator de escala da função de suavização do SPH
$k_0$	– coeficiente de compressibilidade isotérmica na temperatura de 0 K (m <sup>2</sup> /N)
$k_b$	– constante de Boltzmann (1,3506503.10 <sup>-23</sup> J/K)
$l^\alpha$	– deslocamento nos eixos coordenados: x, y e z para $\alpha = 1, 2$ e $3$ respectivamente (m)
$m_j$	– massa da partícula da partícula $j$ no SPH (kg)
$N$	– número de partículas no domínio de suporte do SPH
$N_{ato}$	– número de átomos por unidade de massa (átomos/kg)
$O$	– Origem do sistema de referência (m)
$P_e$	– parâmetro da força de penalização do SPH
$p$	– pressão (Pa)
$p_0$	– pressão no instante inicial (Pa)
$p_E$	– componente de excitação eletrônica da pressão (Pa)



$p_F$	–	componente “fria” da pressão (Pa)
$p_H$	–	pressão de Hugoniot (Pa)
$p_T$	–	componente térmica da pressão (Pa)
$Q$	–	energia gerada por fontes externas por unidade de massa (J/kg)
$r$	–	módulo do vetor $\mathbf{r}$
$\mathbf{r}$	–	vetor (m)
$R$	–	módulo do vetor $\mathbf{r}$ normalizado pelo comprimento suavizante $h$
$R_1$	–	parâmetro de ajuste da equação de estado de Jones-Wilkins-Lee
$R_2$	–	parâmetro de ajuste da equação de estado de Jones-Wilkins-Lee
$S$	–	entropia específica (J/kg)
$s_i$	–	$i = 1, 2, \dots$ ; coeficiente de ajuste da equação de estado do material ((m/s) <sup>-(i-1)</sup> )
$T$	–	Temperatura (K)
$t$	–	tempo (s)
$U_S$	–	velocidade de propagação da onda de choque (m/s)
$\mathbf{u}$	–	vetor velocidade (m/s)
$u_0$	–	velocidade no instante inicial (m/s)
$u_D$	–	velocidade de detonação (m/s)
$u_{jato}$	–	velocidade da ponta do jato (km/s)
$u_x, u_y$ e $u_z$	–	componente do vetor velocidade (m/s)
$u^\alpha$	–	representação tensorial do vetor velocidade (m/s)
$V$	–	volume específico (m <sup>3</sup> /kg)
$V_0$	–	volume específico na condição inicial (m <sup>3</sup> /kg)
$x, y$ e $z$	–	eixos coordenados (m)
$\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$	–	vetores posição (m)
$x_i$ e $x'_i$	–	componentes do vetor posição (m)
$x_{jato}$	–	posição da ponta do jato (m)
$x^\alpha$	–	eixos coordenados: $x, y$ e $z$ para $\alpha = 1, 2$ e $3$ respectivamente (m)
$W$	–	função de suavização (1/m <sup>3</sup> )
$w$	–	parâmetro de ajuste da equação de estado de Jones-Wilkins-Lee

$w_m$	–	trabalho por unidade de massa (J/kg)
$w_t$	–	trabalho (J)
$\alpha$	–	ângulo do cone (°)
$\alpha_0$	–	coeficiente de expansão térmica a pressão constante na temperatura de 0 K (K <sup>-1</sup> )
$\Delta E_x$	–	variação na energia interna devido aos efeitos no eixo x (J)
$\Delta E_t$	–	variação da energia (J)
$\Delta V_j$	–	volume da partícula da partícula $j$ (m <sup>3</sup> )
$\Delta e_x$	–	variação na energia interna específica devido aos efeitos no eixo x (J/kg)
$\Delta t$	–	intervalo de tempo (s)
$\delta$	–	função Delta de Dirac
$\delta V$	–	volume do elemento infinitesimal (m <sup>3</sup> )
$\delta m$	–	massa do elemento infinitesimal (kg)
$\delta x, \delta y$ e $\delta z$	–	arestas do elemento infinitesimal (m)
$\delta^{\alpha\beta}$	–	Delta de Kronecker
$\varepsilon_E$	–	componente de excitação eletrônica da energia interna específica (J/kg)
$\varepsilon_F$	–	componente “fria” da energia interna específica (J/kg)
$\varepsilon_T$	–	componente térmica da energia interna específica (J/kg)
$\varepsilon^{\alpha\beta}$	–	tensor de deformações
$\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta}$	–	tensor taxa de deformações (s <sup>-1</sup> )
$\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta}$	–	tensor desviador de deformações (m)
$\phi_{ij}$	–	componente do cálculo da viscosidade artificial do SPH
$\gamma$	–	coeficiente de Mie-Grüneisen
$\gamma_0$	–	constante de Mie-Grüneisen
$\eta$	–	razão entre massas específicas
$\eta_1$	–	parâmetro para cálculo de pressão na equação de estado de Mie-Grüneisen
$\lambda$	–	constante de Lamé do material (Pa)

$\theta$	– fator de ajuste das componentes desviadoras e de verificação do critério de escoamento
$\Pi_{ij}$	– viscosidade artificial no SPH (Pa)
$\rho$	– massa específica (kg/m <sup>3</sup> )
$\rho_0$	– massa específica no instante inicial (kg/m <sup>3</sup> )
$\sigma$	– representação matricial do tensor das tensões totais (Pa)
$\sigma_Y$	– limite de escoamento (Pa)
$\sigma_{x_1x_2}$	– tensão total na face perpendicular ao eixo $x_1$ com força resultante na direção do eixo $x_2$ (Pa)
$\sigma_1, \sigma_2$ e $\sigma_3$	– tensões principais (Pa)
$\sigma^{\alpha\beta}$	– tensor das tensões totais em notação tensorial (Pa)
$\zeta$	– fator para evitar singularidades na viscosidade artificial do SPH
$\tau$	– representação matricial do desviador de tensões (Pa)
$\tau_1, \tau_2$ e $\tau_3$	– tensões principais do desviador de tensões (Pa)
$\tau_{x_1x_2}$	– tensão cisalhante na face perpendicular ao eixo $x_1$ com força resultante na direção do eixo $x_2$ (Pa)
$\tau^{\alpha\beta}$	– desviador de tensões (Pa)
$\dot{\tau}^{\alpha\beta}$	– derivada temporal do desviador de tensões (Pa/s)
$\tau_*^{\alpha\beta}$	– desviador de tensões corrigido para a superfície de escoamento (Pa)
$\Omega$	– domínio de integração
$\omega^{\alpha\beta}$	– tensor de rotações (rad)
$\dot{\omega}^{\alpha\beta}$	– tensor taxa de rotações (rad/s)
$\xi$	– número de Courant
$\psi^{\alpha\beta}$	– correção de rotação de corpo rígido (Pa/s)
$\zeta$	– funcional arbitrário

## LISTA DE SIGLAS

EDE	–	Equação de Estado
JWL	–	Jones-Wilkins-Lee
LF	–	“Leap Frog” – integrador
PIC	–	partícula na célula – “ <i>Particle-in-cell</i> ”
SPH	–	hidrodinâmica por suavização de partículas – “ <i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i> ”

## RESUMO

Neste trabalho foi modelado matematicamente o colapso do cone de carga oca, utilizando a teoria hidrodinâmica da propagação de ondas de choque, sujeito a interação com uma onda de detonação. Equações de estado compatíveis com a dinâmica do fenômeno foram empregadas para relacionar as variáveis de estado, para o revestimento metálico empregou-se a Equação de Mie-Grüneisen e para os produtos da detonação do explosivo a de Jones-Wilkins-Lee. Dados experimentais disponíveis na literatura foram utilizados a fim de se obter uma resposta confiável da solicitação dinâmica dos materiais envolvidos nas simulações computacionais. Para materiais metálicos, a Lei de Hooke generalizada foi empregada para representar o regime elástico. O critério de Von Mises foi empregado para se definir a região sob o regime de escoamento plástico.

Um código computacional utilizando o método sem malha “*Smoothed Particle Hydrodynamics*” foi construído e utilizado para aproximar numericamente as equações de governo na forma diferencial, que após a integração numérica estima a solução do problema em estudo. Os resultados obtidos são consistentes quando comparados com os presentes na literatura, validando o código. Os resultados da variação do explosivo, revestimento e ângulo da carga foram discutidos, para se obter um melhor ângulo de carga.

## ABSTRACT

The collapse of shaped charge cone was mathematically modeled in the present work, using the hydrodynamics theory of shock waves propagation subject to interaction with detonation waves. The equations of state employed to relate the state variables are in according to the dynamic of the study, using the Mie-Grüneisen equation for liner material and the Jones-Wilkins-Lee equation for de detonation products. Experimental data available in literature were used to describe the dynamic response of material involved in computational simulations. For metallic materials the generalized Hooke's Law was used for elastic flow. The von Mises criterion was employed to define the material region under plastic flow.

A computational code using the meshless method "*Smoothed Particle Hydrodynamics*" was build and used to approximate the governing equation in differential form, which after integration estimates the solution of the problem under study. The results are consistent when compared with the literature results, validating de computational code. The effects of variation of explosive, liner material and charge angle have been discussed in order to obtain the better angle for shaped charge devices.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O explosivo é uma substância pura ou mistura de substâncias que uma vez iniciada é capaz de produzir uma explosão pela sua própria energia (Davis, 1950). A explosão é um processo de detonação ou decomposição química que percorre o explosivo, provocando a geração de uma grande quantidade de calor e, geralmente, produtos gasosos em um curto espaço de tempo (Akhavan, 2004).

A detonação se propaga com uma velocidade maior do que a velocidade do som no explosivo, assim a frente de detonação separa a região do explosivo que ainda não foi afetada. Na frente de detonação ocorre um rápido aumento de pressão devido à alta taxa de liberação da energia da reação. Este aumento gera um gradiente de pressões que é responsável pela expansão dos produtos gasosos. Em geral, a reação química da região atingida está 90% concluída entre  $10^{-9}$  e  $10^{-6}$  segundos e a pressão alcança a ordem de algumas dezenas de megapascais (Davis, 1981).

O processo de detonação é marcado pela propagação de uma onda de reação que avança pelo explosivo. Pela semelhança com as ondas de choque a detonação recebe um tratamento semelhante e o processo é conhecido por onda de detonação. Após a completa decomposição do explosivo ocorre a expansão dos produtos gasosos, provocando o movimento de materiais da interface com o explosivo e do meio (Liu e Liu, 2007).

A interação da detonação com materiais em contatos ou nas proximidades envolve transmissão e reflexão das ondas de choque e de detonação, expansão gasosa, e relações entre o explosivo e o material (Meyers, 1994). Devido à rapidez na liberação da energia química e a altas pressões na interface, várias aplicações são possíveis para a interação entre explosivo e metal, por exemplo: aceleração, fragmentação, endurecimento, soldagem, altas deformações associadas a altas taxas de deformação de metais etc (Cooper, 1997).

## 1.2 MOTIVAÇÃO

Para a indústria de defesa, a capacidade de provocar grandes perfurações em alvos blindados com uma pequena massa de explosivo, aproximadamente 1/15 a 1/16 da massa do explosivo sem cavidade e revestimento para um dano equivalente (Walters, 2008), constitui um objetivo continuamente desejado. A redução da massa e a ampliação dos efeitos constituem uma vantagem tecnológica no cenário atual das operações militares, à procura de artefatos cada vez mais eficientes. Materiais de diferentes formas de emprego são dotados destas cargas, o estudo do colapso visa fornecer informações para a melhoria ou o desenvolvimento de produtos.

Na indústria petrolífera, a crescente procura por combustíveis fósseis, tem resultado na descoberta de fontes nos lugares mais remotos. A técnica de canhoneio se mostra eficiente na comunicação do poço de serviço com o reservatório, seja este em terra ou no mar. Existe uma crescente perspectiva na utilização das cargas ocas destinadas a este tipo de exploração. Dependendo das características geológicas diferentes tipos de cargas podem ser utilizadas. Devido à demanda mundial por petróleo, gás e seus derivados associado às novas jazidas descobertas, principalmente no pré-sal, a utilização das cargas terá um significativo aumento nos próximos anos.

Métodos experimentais associados a fenômenos que envolvem elevados gradientes de pressão, massa específica e velocidade de partículas associados às altas taxas de deformação a que o metal do revestimento é submetido, possuem um custo de operação bastante elevado. Equipamentos específicos e pessoal capacitado são escassos, desta forma a avaliação experimental fica restrita a apenas alguns grandes centros de pesquisa espalhados pelo mundo.

Técnicas computacionais para simulação de escoamento de materiais submetidos a intensas ondas de choque só foram possíveis a partir da introdução da viscosidade artificial por Von Neumann e Richtmyer em 1950 (Lee, 2006). Ainda em 1950, a primeira investigação numérica, referenciada na literatura para problemas de impacto, deu origem ao método partícula na célula (*“Particle-in-cell – PIC”*) desenvolvido no Laboratório Nacional de Los Alamos, dando origem aos códigos hidrodinâmicos, como passaram a ser conhecidos (Zukas, 2004), estes códigos são empregados em simulações de carga oca.



As aplicações civis e militares da carga oca são atrativos para a realização de um estudo sobre o colapso do revestimento sob efeito da onda de detonação. A utilização de métodos numéricos se tornou uma ferramenta importante na redução dos custos experimentais, sendo capaz de descrever o comportamento dos materiais e prever o resultado, com boa aproximação, de uma dada configuração de carga. A possibilidade de variar o tipo de explosivo utilizado, a forma de iniciação do explosivo, o material para revestimento e alvo, e perfil do revestimento são possíveis nas simulações e motivam a construção de um código computacional.

### 1.3 OBJETIVO

O objetivo do trabalho proposto é:

- elaborar um código computacional que modele o colapso do revestimento sob a ação de uma onda de detonação na munição de carga oca.

Com este código se pretende simular diferentes configurações de carga. Para tanto as seguintes variáveis serão estudadas:

- explosivo;
- material do revestimento;
- configuração geométrica da carga.

Com base no problema físico que se deseja resolver, o código deve fornecer dados para uma melhor configuração da carga oca.

### 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é desenvolvido em 8 (oito) capítulos e 2 (dois) apêndices:

a) Capítulo 1 (Introdução) – são apresentadas a motivação e importância do estudo desenvolvido, e finalmente os objetivos;

b) Capítulo 2 (Revisão Bibliográfica) – é exposta a revisão bibliográfica que dá o suporte necessário ao trabalho.

c) Capítulo 3 (Formulação Teórica) – Apresenta a formulação matemática utilizada para a solução do problema utilizando a teoria hidrodinâmica. As EDE utilizadas no modelo numérico são apresentadas bem como os modelos constitutivos utilizados;

d) Capítulo 4 (Modelo Numérico) – desenvolve a formulação do método numérico utilizado como técnica de solução, bem como o equacionamento apresentado no Capítulo 3 escrito em termos de equações do método numérico;

e) Capítulo 5 (Desenvolvimento) – trata da adaptação utilizada para as simulações de carga oca. Com ênfase na aproximação de deslocamento no plano. Expõem as equações do SPH no sistema de referência bem como a estrutura lógica de processamento e armazenamento;

f) Capítulo 6 (Resultados e Discussões) – este é o principal capítulo desta dissertação, pois apresenta os resultados das simulações de carga oca utilizando a teoria discutida nos capítulos anteriores. As duas primeiras simulações foram acrescentadas para a validação do código construído, quando comparados a resultados da literatura. A terceira simulação se propõe a atender os objetivos propostos deste estudo, avaliando a variação dos parâmetros no colapso de uma carga oca;

g) Capítulo 7 (Conclusões e Sugestões) – apresenta as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros;

h) Capítulo 8 (Referências Bibliográficas) – são descritas as referências utilizadas na elaboração do presente trabalho;

j) Apêndice 1 – é exposta uma lista mais completa de parâmetros de choque utilizados nas EDE dos materiais inertes; e

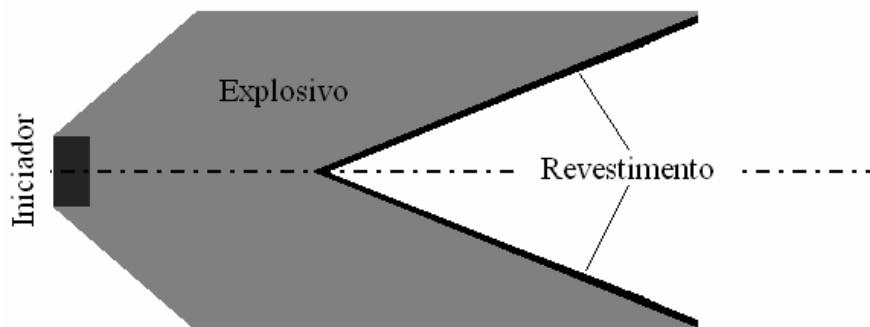
k) Apêndice 2 – exhibe uma lista de parâmetros de ajuste da EDE de JWL para diversos explosivos.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, são descritos em breves resumos as principais informações consultadas ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Em geral estas referências englobam todos os conteúdos das subseções a seguir, sendo assim, a divisão foi realizada pela importância no detalhamento das informações nas referências, dentro de uma ordem lógica.

### 2.1 CARGA OCA

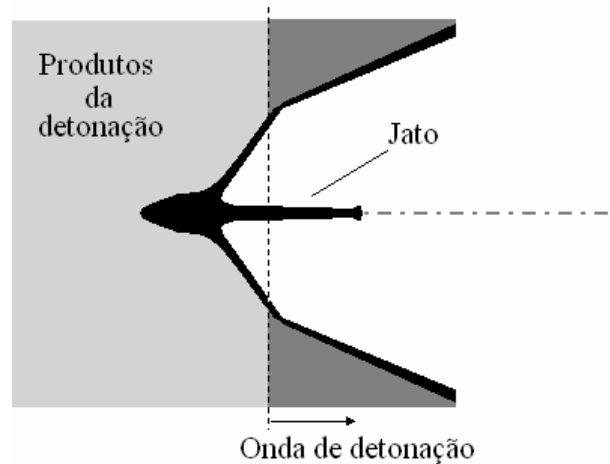
A carga oca é obtida quando um cilindro de explosivo possui uma cavidade oca em uma extremidade e um iniciador na oposta (Walters e Zukas, 1989). A onda de detonação percorre o explosivo e ao atingir a cavidade provoca um aumento na capacidade de penetração do artefato, devido à concentração dos efeitos da detonação impostos pela configuração geométrica da cavidade. A adição de um fino revestimento metálico em contato com a cavidade do explosivo amplifica significativamente esta capacidade, as altas taxas de deformação e a elevada energia cinética a que o revestimento é submetido justificam este aumento. A FIG. 2.1 mostra um esquema de uma carga oca com cavidade cônica, revestimento e iniciador (ou detonador).



**FIG. 2.1 Configuração de carga oca cônica**

Esta configuração de carga é capaz de produzir um grande alongamento no revestimento, deformações maiores que 10 (dez) podem ser rapidamente obtidas, devido às elevadas pressões da detonação do explosivo (Walters e Zukas, 1989). Com o passar da onda de detonação pelo revestimento, este é acelerado formando um pequeno ângulo com a superfície

original do revestimento. Quando o material converge no eixo de simetria, ocorre à formação do que é comumente conhecido como jato de carga oca (Cooper, 1997). Geralmente o revestimento dá origem a uma parte que não contribui para a perfuração que neste trabalho será denominado escória, na literatura de língua inglesa usa-se o termo “slug”. A FIG. 2.2 mostra esquematicamente o colapso da carga oca mostrada na FIG. 2.1 originando o jato.



**FIG. 2.2 Colapso da carga oca**

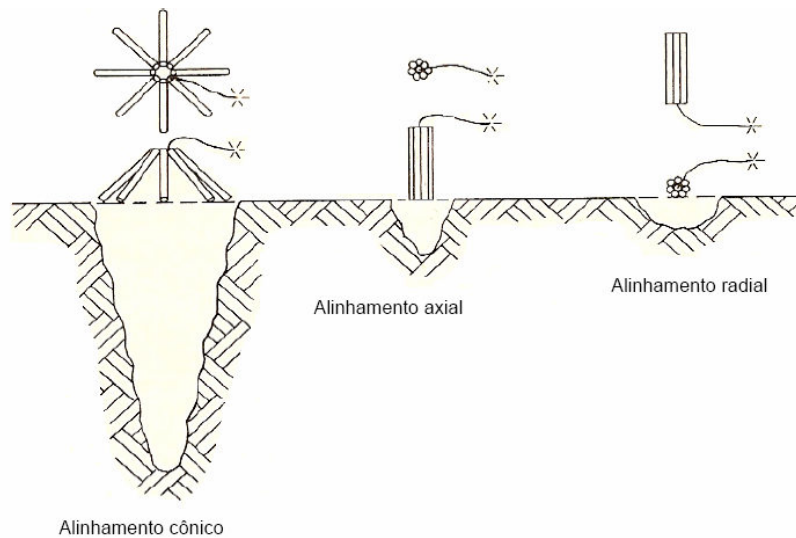
Este jato ao interagir com um alvo produz uma perfuração devido ao deslocamento lateral do material que compõem o alvo, com pouca influência dos efeitos térmicos (Walters, 1990), o que caracteriza uma deformação plástica no alvo.

### 2.1.1 HISTÓRICO

A citação mais antiga sobre explosivos com cavidade é datada de 1792 quando o engenheiro de minas Franz Von Baader publicou um trabalho sobre perfuração, confinamento de propelentes, efeitos de pequenas cavidades entre o propelente e alvo a distâncias variadas e fragmentação de rochas. Estes experimentos utilizaram pólvora negra que não é capaz de detonar e as cavidades não continham revestimento, porém os efeitos de concentração de energia devido à configuração geométrica foram observados. Avanços na estabilização de explosivos com maior liberação de energia e a produção de detonadores só foram possíveis após os trabalhos de Alfred Nobel em 1867 (Walters, 2008).

No século 19, mineradores utilizavam cartuchos de dinamites arranjados em forma de círculo no solo e com as outras extremidades amarradas em forma de um cone vertical,

resultando em penetrações mais profundas do que explosivos dispostos sobre o solo de outras maneiras (Guimarães, 2009). Tal efeito é ilustrado na figura FIG. 2.3:



**FIG. 2.3 Efeitos do posicionamento dos cartuchos de explosivo**  
**Barbour, 1981**

A primeira demonstração dos efeitos da cavidade utilizando alto explosivos é datada de 1883 e é atribuída a Von Foester. Em 1888, Charles Munroe conduziu experimentos com cargas ocas observando que a profundidade da penetração pode ser consideravelmente aumentada pela cavidade no explosivo, para uma pequena quantidade de explosivo. O aumento da penetração se deve concentração dos produtos da detonação. Munroe realizou várias publicações sobre o assunto popularizando o seu conceito (Walters, 2008).

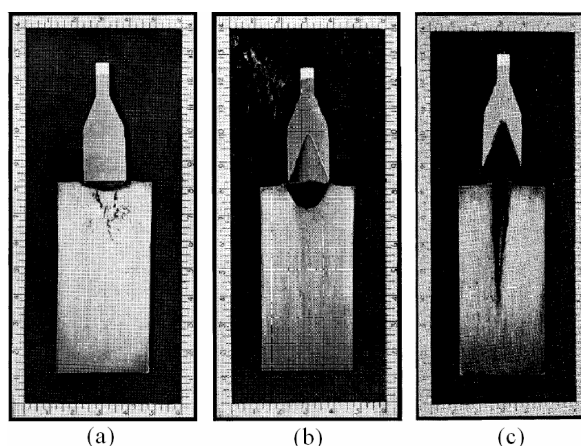
Devido aos trabalhos de Munroe, é comum utilizar a expressão “efeito Munroe” para representar os efeitos de carga oca. Experimentos conduzidos por outros pesquisadores em outros países, deram origem a diferentes denominações: carga cumulativa e “Hohlladung” na antiga União Soviética e Alemanha, respectivamente, para se referir a este tipo de carga. Os experimentos conduzidos por M. Neumann, em 1911 e E. Neumann, em 1914 na Alemanha deram origem ao termo “efeito Neumann” para o efeito gerado pela detonação da carga oca (Gürel, 2009).

Muitos trabalhos sobre a carga oca foram realizados em diferentes países no período anterior a II Guerra Mundial: Lepidi na França em 1891; Sukharevskii na União Soviética entre 1925 e 1926; Lodati na Itália em 1932; na Inglaterra diversos pesquisadores contribuíram para o estudo do fenômeno destacando-se: Evans, Ubbelohde, Taylor, Tuck, Mott, Hill, Pack, Payman e Woodhead; nos Estados Unidos destacam-se os trabalhos de

Watson, Wood e Eichelberger. O conceito da carga oca atual é atribuído a Franz Rudolf Thomanek na Alemanha e a Henry Hans Mohaupt nos Estados Unidos e Inglaterra (Walters, 2008).

O período de 1935 a 1950 representou um grande avanço na utilização da carga oca com revestimento devido à II Guerra Mundial, empregada para fins bélicos; até então poucas aplicações práticas haviam sido concluídas. Destacando-se o desenvolvimento na Alemanha por Thomanek, Brandmayer e Von Huttern que contribuíram no desenvolvimento das cargas oca, nas granadas perfurantes, no projeto de ogivas, na mistura de auto explosivos e aditivos, moldagem de explosivos, sistemas de detonação por impacto, iniciação de explosivos, armas disparadas do ombro e portáteis. Nos Estados Unidos se deve ao trabalho independente iniciado por Mohaupt que culminou nas munições anti-carro 2.36", 75 mm, 105 mm e na arma "bazzoka" com um motor foguete acoplado que podia ser lançada do ombro do atirador (Walters e Zukas, 1989).

O desenvolvimento das cargas ocas continuou no período pós II guerra, por várias empresas e centros de pesquisa na área de Defesa, principalmente nos Estados Unidos. Com o desenvolvimento de técnicas experimentais como, por exemplo, a fotografia com raios-X de alta velocidade obtendo informações de velocidade e distribuição de massa, permitindo a continuação dos estudos e auxiliando no desenvolvimento. A FIG. 2.4 apresenta os resultados obtidos no trabalho pioneiro de Birkhoff et al. (1948) apresentando os efeitos da cavidade no explosivo (b) e da cavidade revestida (c) comparados com o explosivo de face plana (a). Neste experimento, a carga explosiva era constituída de 113,4 g de pentolite, revestimento cônico de aço com 6,35 mm de espessura e cilindro sólido de aço como alvo.



**FIG. 2.4 Resultados experimentais: (a) sem cavidade, (b) com cavidade e (c) cavidade com revestimento.**

**Birkhoff et al., 1948**

Diferentes configurações geométricas, explosivos e materiais para revestimento vêm sendo continuamente testados ampliando o campo de utilização. Atualmente o conceito destas cargas é largamente empregado em atividades militares e civis. A pequena massa de explosivo, revestimentos obtidos a partir de diversos processos de produção e técnicas precisas de fabricação tornam os artefatos cada vez mais eficientes na penetração ou abertura de crateras rasas, sendo motivadores para o emprego.

### 2.1.2 APLICAÇÕES MILITARES

As aplicações práticas com cargas ocas tiveram considerável aumento no período da II Guerra Mundial com o objetivo de se obter vantagens na perfuração ou estilhaçamento da carcaça de carros de combate, embarcações e aeronaves. Deste modo, possui um grande campo de atuação nas aplicações militares com extensão para o meio civil.

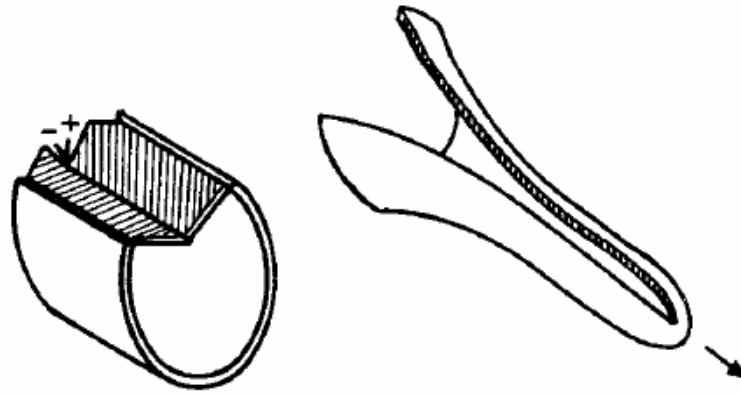
O conceito é amplamente utilizado em artefatos que tem por objetivo a penetração em alvos blindados, sendo utilizado em granadas do tipo anti-carro, disparadas de carros de combate, canhões sem recuo ou fuzis (Granada de Bocal). Cabeças de guerra de mísseis e foguetes podem ser dotadas de uma ou múltiplas cargas ocas. A FIG. 2.5 apresenta um tiro de munição 90 mm anti-carro seccionado.



**FIG. 2.5 Munição 90 mm anti-carro seccionada**

**Guimarães, 2009**

Em geral o material do revestimento utilizado nestas aplicações é o cobre devido à ductilidade. O explosivo encontra-se usualmente confinado em um corpo de aço com alta dureza e prensado contra o cone, assim o efeito da carga oca será obtido antes que o corpo da granada estilhaça. A precisão exigida pelo emprego, envolvendo segurança do atirador ou guarnição e a alta confiabilidade para o efeito desejado no alvo, implica em maior custo do que as de aplicações civis (Guimarães, 2009).



**FIG. 2.6 Projétil formado por explosão**

**Meyers, 1994**

A FIG. 2.6 mostra que as alterações na forma da cavidade e do revestimento dão origem a outros efeitos, como por exemplo, o projétil forjado ou formado por explosivo que provoca crateras maiores na região de impacto e caso não seja possível transpassar o alvo, a transmissão da onda de choque possibilita o estilhaçamento da superfície oposta ao impacto.

### 2.1.3 APLICAÇÕES CIVIS

As cargas ocas são empregadas de diversas formas no meio civil. Explosivos lineares com revestimento em forma de cunha são utilizados para cortes de chapas espessas, aberturas de saídas de emergência em aeronaves, demolições de estruturas etc.

Uma das principais aplicações na atividade civil é a perfuração de poços de petróleo. Após a abertura do duto de escoamento do óleo ou gás, tubos de aço são soldados e inseridos revestindo todo o canal. Para estruturação, o espaço entre os tubos e a rocha é preenchido com cimento específico. Concluída a operação, um canhão ou torpedo contendo múltiplas pequenas cargas, cerca de 30 g de explosivo cada, pode ser utilizado para perfurar o alvo de múltiplas camadas: aço, cimento e rocha; o que possibilitará o escoamento do óleo ou gás após a limpeza. Revestimentos produzidos por compactação de pós geram poucos resíduos e originam uma escória fragmentada, diferente de materiais dúcteis que dão origem a escória de grandes dimensões que poderiam obstruir os canais abertos para a exploração na rocha.



## 2.2 ONDAS DE CHOQUE

Zel'dovich e Raizer (1963 - edição de 2002) apresentam um estudo completo sobre propagação de onda de choque em meios condensados, como os metais. Apontando a necessidade deste estudo para o entendimento e cálculos associados ao fenômeno da detonação. Ressaltando que o conhecimento das propriedades termodinâmicas do meio são importantes para se descrever o processo hidrodinâmico complexo da compressão dinâmica de sólidos e líquidos sob ação de intensas ondas de choque. Apresentam ainda, as relações de Rankine-Hugoniot e a EDE Mie-Grüneisen.

Zukas et al. (1982) consolida um trabalho sobre impacto a altas velocidades. Abordando ao efeito das ondas de choque no fenômeno de penetração e perfuração de sólidos, bem como informações sobre a dinâmica da fratura com o objetivo de consolidação de informações para um código numérico de solução do fenômeno.

Meyers (1994) em seu livro sobre o comportamento dinâmico dos materiais realiza a mesma abordagem do trabalho de Zel'dovich e Raizer para as ondas de choque, apresentando as equações de governo das ondas na forma diferencial, tanto em coordenadas Eulerianas com em Lagrangeanas, base para a simulação computacional da propagação de ondas. Apresenta também um capítulo com as equações na forma de equações de diferenças finitas. Detalha através da técnica do casamento de impedância a transmissão e reflexão da onda de choque quando esta atinge uma interface. Trata ainda do casamento de impedância entre explosivo e metal.

## 2.3 ONDAS DE DETONAÇÃO

Cooper, em 1931 (Cooper, edição de 1997), apresenta aspectos químicos da reação de decomposição do explosivo. Os conceitos básicos da termodinâmica, termofísica e termoquímica são discutidos. Os parâmetros da detonação são apresentados de maneira teórica e comparados com os observados experimentalmente. Inclui várias tabelas com propriedades dinâmicas de metais e explosivos, com foco nas propriedades do explosivo no ponto de detonação ideal.

Davis, em 1981, apresenta um estudo da química da detonação de explosivos. Caracteriza o avanço contínuo da química e da mecânica, enquanto que o acoplamento entre estes ramos

na detonação de explosivos ainda se encontra em estágio primitivo. Aborda os aspectos físicos e teóricos da onda de detonação, zona de reação, equações de conservação e interação metal-explosivo.

Barroso, em 2004, apresenta um estudo hidrodinâmico a altas temperaturas e densidades, que é aplicado na detonação de explosivos químicos. Aspectos da configuração geométrica dos explosivos são discutidos. A transmissão da onda de detonação do explosivo para o sólido é abordada caracterizando a interação entre o metal e explosivo, podendo-se estimar por processos numéricos o gradiente de pressões e velocidade a que o metal acelerado foi submetido.

## 2.4 MÉTODO NUMÉRICO – SPH

Monaghan e Gingold, em 1977, e Lucy, em 1977, publicaram os primeiros trabalhos sobre o método sem malha de Hidrodinâmica por Suavização de Partículas (“*Smoothed Particle Hydrodynamics - SPH*”). O objetivo era a aproximação da solução de problemas astrofísicos.

Monaghan, em 1985, apresentou uma revisão comparando o consagrado PIC com o SPH, como métodos para solução de problemas hidrodinâmicos de escoamento compressivo. Focaram na simplicidade do SPH e na alternativa quando a malha envolvida no PIC resultar em cálculos com pouca precisão ou impossibilitados de apresentar uma aproximação.

Libersky et al., em 1993, estenderam a utilização do SPH para a simulação de respostas a solicitação dinâmica dos materiais. Ampliaram a utilização do método para corpos sólidos.

Swegle e Attaway, em 1995, expandiram a utilização do SPH para a simulação de detonação de explosivos submersos. Apresentaram o embasamento teórico e enfatizaram na atualização do comprimento característico de interpolação das partículas. Desenvolveram a simulação de detonação submersa em água, avaliaram a interação entre fluido e estrutura e entre onda de choque e estrutura.

Liu et al., em 2003a, publicaram um trabalho tratando de detonação de explosivos. Focaram no uso de EDE compatível com os produtos da detonação, apresentaram os resultados de simulações de detonações, inclusive submersas.

Liu et al., em 2003b, publicaram outro trabalho versando sob a utilização do SPH para problemas de carga oca sem revestimento. Apresentaram os resultados para diferentes formas de carga e de iniciação do explosivo.

Liu e Liu, em 2007, consolidaram em um livro o método SPH. O método é puramente Lagrangeano e caracterizado apenas por pontos (posição das partículas) no domínio computacional. Possui a vantagem de não haver a degeneração da malha, comum nos sistemas Lagrangeanos sujeitos à elevadas deformações, sendo desnecessário o remapeamento. Exemplos mostram a viabilidade para a simulação de explosivo.

Zukas, em 2004, publicou um trabalho de introdução aos códigos computacionais para simulação de ondas de choque e impacto. Abordou aspectos de discretização do domínio: diferenças finitas, elementos finitos, grandes deformações e regiões de interface. A solução numérica utilizando coordenadas Lagrangeanas, Eulerianas, métodos híbridos acoplado e arbitrário Lagrangeano-Euleriano, e métodos sem malha como o descrito acima são discutidos.

Lee, em 2006, reuniu informações em seu livro sobre simulação computacional de problemas de carga oca. Descreveu os métodos de solução Lagrangeano e Euleriano, em coordenadas cilíndricas e cartesianas utilizando diferenças finitas, foca na difícil tarefa de modelagem do fluxo e da interface de materiais em algoritmos Eulerianos, e na deformação excessiva da malha para soluções Lagrangeanas, que provoca a sua degeneração. Expôs a idéia do código arbitrário Lagrangeano-Euleriano que tenta preservar as vantagens de cada método de solução. Apresentou aspectos de viscosidade artificial para problemas unidimensionais e a sua adaptabilidade para o caso bidimensional. Simulações de ondas de choque com incidência oblíqua são descritas. Modelos constitutivos para sólido, como o de Steinberg-Guinan, EDE para sólidos e a EDE de JWL para relacionar as variáveis de estado nos produtos da detonação são apresentados. Simulações de cargas para aplicações militares e da indústria petrolífera concluem o trabalho.

Qiang et al., em 2008, apresentaram os resultados de simulação de carga oca com revestimento pela solução das equações de Euler, utilizaram uma modificação disponível na literatura para a aproximação da massa específica, visando melhor representar a interface entre materiais distintos.

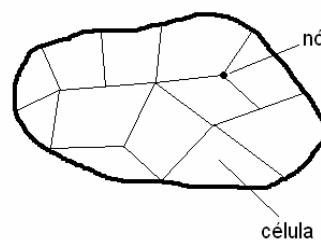
Liu e Liu, em 2010, apresentaram uma revisão do SPH. Apontaram desenvolvimentos recentes, aspectos numéricos do método e recentes utilizações.

Yang et al., em 2011, apresentaram um estudo voltado para a simulação de carga oca com revestimento. Compararam os resultados com métodos tradicionais de malha, observaram a coerência de resultados.

A utilização de métodos computacionais para a solução de problemas em ciência e engenharia tornou-se uma ferramenta alternativa de desenvolvimento. Problemas que apresentam configuração geométrica e condições de contorno que impossibilitam soluções analíticas podem ter suas respostas estimadas. Esta ferramenta reduz a quantidade de experimentos, e por conseqüência os custos, tempo e eventuais riscos associados às técnicas experimentais (Liu e Liu, 2007).

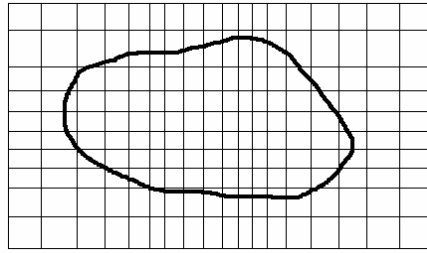
Com o modelo de viscosidade artificial introduzido por Von Neumann e Richtmyer em 1950, foi possível estender a utilização para fenômenos que envolvam efeitos de choque e, assim, simular problemas relacionados com ondas de choque, como no caso de impactos a altas velocidades (Zukas, 2004). Várias técnicas foram desenvolvidas para solucionar problemas físicos, destacando-se quanto ao sistema de referência, os enfoques Lagrangeano e Euleriano, e quanto à discretização, em métodos que envolvem malhas ou elementos (partículas). Os métodos baseados em malha tipicamente utilizam a solução pelos métodos das diferenças finitas, dos volumes finitos ou dos elementos finitos.

Sob a abordagem Lagrangeana, uma malha é definida no corpo através de um número finito de células. A solução das equações de governo determina o deslocamento dos nós, a deformação e a rotação das células, acompanhando assim a malha no espaço e no tempo. A FIG. 2.7 apresenta uma malha típica Lagrangeana fixa em um corpo qualquer.



**FIG. 2.7 Malha típica Lagrangeana**

A abordagem Euleriana define um conjunto de células fixas no espaço e pela solução das equações de governo obtêm-se os fluxos de massa, momentum e energia através das superfícies das células, podendo definir a quantidade de material localizada em todas as células para qualquer instante de tempo. A FIG. 2.8 apresenta esquematicamente uma malha Euleriana fixa no espaço onde um corpo está inserido.



**FIG. 2.8 Malha típica Euleriana**

Métodos Lagrangeanos sujeitos a altas taxas de deformação podem provocar elevadas deformações na malha ou a degeneração de células (inversão da célula), ocasionando cálculos com pouca precisão ou parada dos cálculos, respectivamente. Nestes casos, pode-se obter volume negativo nas células devido ao emaranhamento da malha (Azevedo e Alves, 2009). Métodos Lagrangeanos ou Eulerianos podem estar submetidos a um remapeamento para refinamento das soluções, onde geralmente está associada uma pequena perda de informação ou diluição das propriedades físicas ao longo das novas células. A TAB. 2.1 apresenta um quadro comparativo entre as abordagens para sistemas com malha.

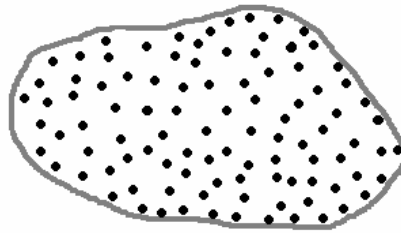
**TAB. 2.1 Comparação entre abordagens Lagrangeana e Euleriana com malha**

<b>Item</b>	<b>Método Lagrangeano</b>	<b>Método Euleriano</b>
Malha	Fixa no material em movimento	Fixo no espaço
Rastreamento	Movimento de qualquer célula no material	Fluxo de massa, momentum e energia através das células
Histórico	Fácil de obter para um determinado ponto	Difícil de obter para um determinado ponto no corpo
Contorno e interface	Fácil de rastrear	Difícil de rastrear
Configuração geométrica irregular	Fácil de modelar	Difícil de modelar para uma boa precisão
Grandes deformações	Difícil de simular	Fácil de simular

**Liu e Liu, 2007**

Os métodos que operam com elementos discretos buscam reunir as vantagens das duas abordagens, especificamente quando o problema físico envolve grandes deformações. Uma vez que não existe malha o sistema não é afetado por grandes deformações (Azevedo e Alves, 2009). Estes métodos têm por objetivo representar um corpo por um determinado número de elementos, dispensando assim o uso de malha e removendo o problema de degeneração suscetível dos códigos Lagrangeanos. Como o sistema é definido por elementos, a abordagem Lagrangeana é a mais propícia para rastrear cada elemento. Uma vez que os elementos podem

representar materiais diferentes à interface entre materiais pode ser representada com mais facilidade do que nos códigos Eulerianos. A FIG. 2.9 apresenta uma possibilidade de discretização de um meio por elementos.



**FIG. 2.9 Discretização típica por elementos**

Vários métodos sem malha estão disponíveis na literatura como, por exemplo, ponto finito, elemento difusivo, Galerkin sem malha, interpolação por pontos etc. O método sem malha de Hidrodinâmica por Suavização de Partículas (“*Smoothed Particle Hydrodynamics - SPH*”) foi utilizado neste estudo, é um dos mais antigos datado de 1977 e desenvolvido por Lucy, Monaghan e Gingold para uso em simulação de fenômenos astrofísicos (Liu e Liu, 2007). Desenvolvido inicialmente para movimento arbitrário de massas fluidas no espaço tridimensional e na ausência de condições de contorno (Monaghan, 1988). A sua adaptabilidade a problemas com altas taxas de deformação, grandes gradientes de pressão e velocidade, ondas de choque e de expansão comuns nas simulações para que foi desenvolvido são motivadores para sua utilização em simulações de carga oca.

A escolha deste método está relacionada com a quantidade de material disponível para consulta, sendo um dos motivadores para a escolha deste método. Embora geralmente se trabalhe com simulações de fluidos, é possível estender o seu uso para meios sólidos, utilizando para isso equações coerentes disponíveis na literatura da mecânica do contínuo.

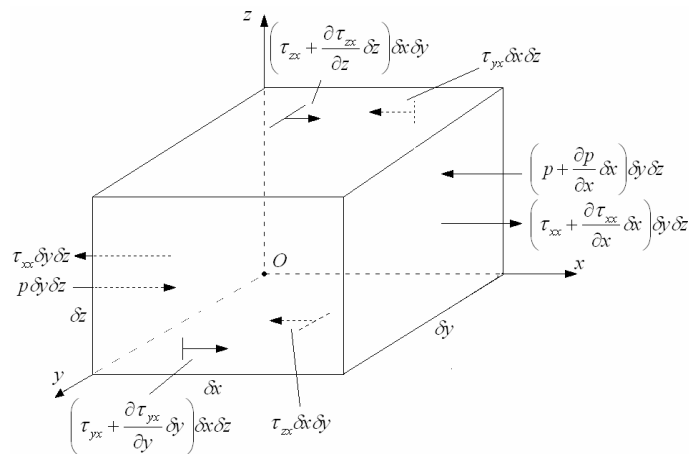
Este método é baseado em um funcional que depende da distância entre as partículas vizinhas e um comprimento característico. O valor do funcional age como um ponderador entre as propriedades ao longo das partículas. Esta função recebe o nome de função de suavização ou função de base radial em uma visão mais geral. A seção 4.1 (página 65) apresenta as bases matemáticas do método e nas demais seções a sua adaptabilidade para as equações gerais da fluidodinâmica, que são as equações de governo desenvolvidas na seção 3.1 (página 38).

### 3 FORMULAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem por objetivo fornecer o embasamento teórico e o tratamento matemático necessários para o desenvolvimento do trabalho. As ondas de choque são modeladas utilizando as bases da teoria hidrodinâmica fazendo uso das equações de conservação de massa, momentum e energia, que foram inseridas no código computacional na forma diferencial para simulação do fenômeno de propagação. O conceito é estendido à detonação de explosivo, pois ondas de detonação e de choque são semelhantes exceto pela liberação de energia na frente de detonação pela decomposição química destas substâncias. As equações de estado para explosivos e materiais inertes são necessárias são abordadas com valores de ajuste típicos da literatura para os principais materiais.

#### 3.1 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

Tomando como base um sistema de coordenadas Lagrangeanas e uma célula infinitesimal em forma de paralelepípedo sujeita a um estado de tensões, conforme ilustrado na FIG. 3.1 apenas para as componentes que resultam em forças atuando na direção x. As tensões normais foram decompostas em pressão hidrostática e desviadora.



**FIG. 3.1** Forças na direção x da célula infinitesimal em um sistema Lagrangeano

As tensões cisalhantes muitas vezes são desprezadas em face dos valores de pressão a que um corpo é submetido quando da ação de uma onda de choque, o que representa um estado puramente hidrodinâmico. Para representação de ondas em meios gasosos, como no caso dos

produtos da detonação, esta simplificação é adotada, pois em toda a pesquisa bibliográfica realizada não foi possível encontrar um modelo para determinar o tensor cisalhante, quer os produtos sejam considerados como fluido Newtoniano ou não. Para o caso de materiais inertes, especificamente os metais, a determinação do tensor cisalhante é conhecida e discutida oportunamente.

O balanço de massa, momentum e energia nesta célula deve ser efetuado considerando o estado de tensões a que o elemento está submetido e as velocidades com que as faces se movem. Adota-se neste estudo que  $\tau_{yx}$  é a tensão cisalhante atuante na face  $y = 0$  com força resultante na direção  $x$ .

### 3.1.1 CONSERVAÇÃO DE MASSA

Como não há geração ou perda de massa neste estudo, esta deve permanecer constante, em linguagem matemática a derivada total da massa deve ser nula para qualquer instante. Considerando o elemento da FIG. 3.1 de arestas  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$  possuindo massa  $\delta m$  e volume  $\delta V$ , tem-se:

$$\frac{D\delta m}{Dt} = 0 \quad (3.1)$$

Onde  $D/Dt$  caracteriza a derivada material, que é a derivada ao longo da trajetória e a velocidade do paralelepípedo elementar. Escrevendo a massa em função da massa específica ( $\rho$ ) e do volume da célula:

$$\delta m = \rho \delta V \quad (3.2)$$

Substituindo na EQ. 3.1:

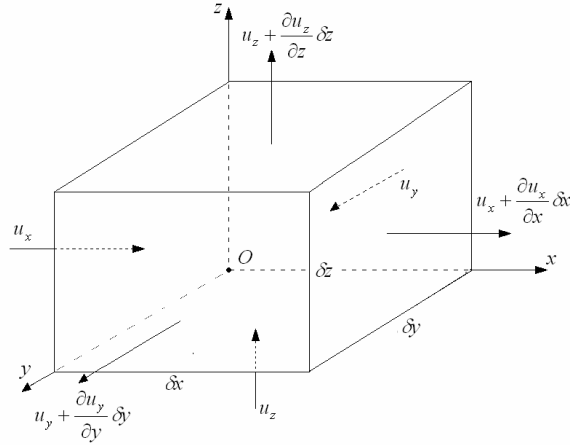
$$\frac{D(\rho \delta V)}{Dt} = 0 \quad (3.3)$$

Procedendo com a derivada do produto:

$$\delta V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D\delta V}{Dt} = 0 \quad (3.4)$$

A derivada do volume da célula está associada às velocidades das faces do paralelepípedo elementar, a FIG. 3.2 apresenta esquematicamente as componentes de velocidade nas faces da célula.





**FIG. 3.2 Velocidade nas faces da célula infinitesimal**

A variação de volume da célula para um intervalo de tempo  $\Delta t$  é obtida pela soma das diferenças das velocidades multiplicadas pelas áreas das faces paralelas:

$$\begin{aligned} \Delta \delta V = & \left[ \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \delta x - u_x \right) \delta y \delta z + \left( u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} \delta y - u_y \right) \delta x \delta z + \right. \\ & \left. + \left( u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} \delta z - u_z \right) \delta x \delta y \right] \Delta t \end{aligned} \quad (3.5)$$

Logo:

$$\frac{\Delta \delta V}{\Delta t} = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (3.6)$$

No limite de  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\frac{D \delta V}{Dt} = \delta V (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (3.7)$$

Substituindo a EQ. 3.7 na EQ. 3.4:

$$\delta V \frac{D \rho}{Dt} + \rho \delta V (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (3.8)$$

Simplificando a expressão acima, tem-se a expressão geral que associa a derivada total da massa específica com o divergente do campo de velocidade:

$$\frac{D \rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.9)$$

A expressão para conservação de massa em coordenadas Lagrangeanas na notação tensorial assume a forma:

$$\frac{D \rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad (3.10)$$

### 3.1.2 CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM

Momentum é uma grandeza vetorial, assim deve ser analisada considerando o caso geral do espaço tridimensional. A FIG. 3.1 apresenta as forças que atuam apenas na direção x, resultado das tensões, normais e cisalhantes, e dos efeitos da pressão. Pela segunda lei de Newton o somatório das forças é igual ao produto da massa pela aceleração. Para a componente x da célula infinitesimal tem-se:

$$\sum F_x = \delta m \frac{Du_x}{Dt} \quad (3.11)$$

Onde  $F_x$  e  $u_x$  são as forças ao longo do eixo x e a componente de velocidade paralela ao eixo x.

A força resultante nesta direção é dada pelo somatório dos produtos da tensão ou pressão pela área da face, levando-se em conta o sentido em que a força resulta atua, assim:

$$\begin{aligned} \sum F_x = & - \left[ \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x - p \right) \right] \delta y \delta z + \left[ \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \delta x - \tau_{xx} \right) \right] \delta y \delta z \\ & + \left[ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta y - \tau_{yx} \right) \right] \delta x \delta z + \left[ \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta z - \tau_{zx} \right) \right] \delta x \delta y \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cancelando termos comuns na acima, considerando a relação entre massa e volume do elemento infinitesimal pela EQ. 3.2, e igualando a EQ. 3.11:

$$\rho \delta x \delta y \delta z \frac{Du_x}{Dt} = - \left[ \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (3.13)$$

Logo a equação de conservação de momentum na direção x, assume a forma:

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (3.14)$$

Repetindo o procedimento para as direções y e z, obtém-se respectivamente:

$$\rho \frac{Du_y}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (3.15)$$

$$\rho \frac{Du_z}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (3.16)$$

As EQs. 3.14, 3.15 e 3.16 podem ser representadas na notação tensorial pela equação abaixo:

$$\frac{Du^\alpha}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^{\beta\alpha}}{\partial x^\beta} \quad (3.17)$$

O tensor de tensões totais é definido como:

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta} \quad (3.18)$$

Onde  $\delta^{\alpha\beta}$  é o Delta de Kronecker, com a propriedade de  $\delta = 1$ , se  $\alpha = \beta$  e  $\delta = 0$ , se  $\alpha \neq \beta$ .

O tensor da EQ. 3.18 pode ser expresso matricialmente como uma combinação do tensor das tensões normais e cisalhantes  $\boldsymbol{\tau}$  e dos efeitos isotrópicos de pressão:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.19)$$

Onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\boldsymbol{\tau}$  é o tensor desviador definido na equação abaixo:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

A EQ. 3.19 assume na notação matricial a forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} - p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} - p \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Condições de equilíbrio requerem que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  e  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  (Rinehart, 1975). A equação de conservação de momentum na notação tensorial assume a forma abaixo:

$$\frac{Du^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \quad (3.22)$$

### 3.1.3 CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

A equação de conservação de energia é obtida pela primeira lei da termodinâmica, onde a derivada de energia interna específica na célula infinitesimal é igual ao fluxo de calor mais a derivada do trabalho. Da primeira lei da termodinâmica:

$$\frac{De}{Dt} + \frac{Dw_m}{Dt} = \frac{DQ}{Dt} \quad (3.23)$$

Onde  $e$ ,  $w_m$  e  $Q$  são, respectivamente: energia interna específica, trabalho por unidade de massa e energia de fontes externas por unidade de massa.

A EQ. 3.23 é aplicada a um estado termodinâmico que ainda não alcançou o equilíbrio. Para o equilíbrio e baseado na segunda lei da termodinâmica a equação pode ser reescrita como:

$$TdS = de + dw_m \quad (3.24)$$

Onde  $S$  é a entropia específica. Assim na ausência de fontes externas ( $Q=0$ ), esta equação é equivalente à equação de entropia para uma partícula, que é a mesma condição do escoamento adiabático (Zel'dovich e Raizer, 2002). A hipótese do escoamento adiabático é reforçada pela dinâmica envolvida na expansão das ondas de choque ou detonação, uma vez que o fenômeno tem duração de poucos microssegundos. Assim:

$$\frac{DS}{Dt} = 0 \quad (3.25)$$

Com o processo é admitido adiabático, a equação da energia será dependente apenas do trabalho de expansão, provocado pela pressão isotrópica e pelos efeitos viscosos.

Considerando apenas as componentes que resultam em movimento no eixo  $x$ , conforme FIG. 3.1, componente de velocidade paralela à  $x$ , conforme FIG. 3.2, e as variações desta componente de velocidade ao longo das direções  $y$  e  $z$ , tem-se a parcela ( $\Delta E_x$ ) da variação da energia total após um intervalo de tempo  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \Delta E_x = & -p \left[ \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \delta x - u_x \right) \delta y \delta z \right] \Delta t + \tau_{xx} \left[ \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \delta x - u_x \right) \delta y \delta z \right] \Delta t + \\ & + \tau_{yx} \left[ \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \delta y - u_x \right) \delta x \delta z \right] \Delta t + \tau_{zx} \left[ \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} \delta z - u_x \right) \delta x \delta y \right] \Delta t \end{aligned} \quad (3.26)$$

Simplificando a equação acima e reorganizando:

$$\Delta E_x = \left( -p \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \Delta t \quad (3.27)$$

Escrevendo a energia em função da energia interna específica:

$$E_x = e_x \delta m \quad (3.28)$$

Utilizando a EQ. 3.2 e substituindo a EQ. 3.28 na EQ. 3.27:

$$\Delta e_x \rho \delta V = \left( -p \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \delta V \Delta t \quad (3.29)$$

Logo:

$$\frac{\Delta e_x}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} \left( -p \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad (3.30)$$

No limite de  $\Delta t \rightarrow 0$  :

$$\frac{De_x}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left( -p \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad (3.31)$$

De maneira similar, as contribuições para os efeitos do movimento nos eixos y e z, respectivamente, são:

$$\frac{De_y}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left( -p \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (3.32)$$

$$\frac{De_z}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left( -p \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (3.33)$$

Somando todas as contribuições obtém-se a expressão para a derivada de energia interna que na notação tensorial assume a forma:

$$\frac{De}{Dt} = \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \quad (3.34)$$

A EQ. 3.34 pode ser reescrita considerando a forma geral do tensor de tensões dado pela EQ. 3.18:

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\tau^{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \quad (3.35)$$

## 3.2 VELOCIDADE

A definição de velocidade caracteriza mais uma equação para compor o sistema a ser resolvido:

$$u^\alpha = \frac{\partial l^\alpha}{\partial t} \quad (3.36)$$

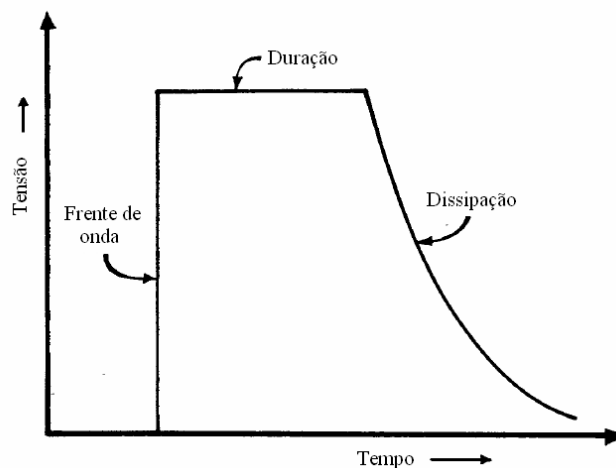
As EQs. 3.10, 3.22, 3.34 e 3.36 formam o sistema de equações diferenciais em coordenadas Lagrangeanas a ser resolvido.

### 3.3 PROPAGAÇÃO DE ONDAS

Uma onda ao se propagar em um material separa as regiões sob influência de um pulso de tensões da não afetada. Neste estudo, a frente de onda é considerada de espessura desprezível, assim tem-se uma clara distinção da região afetada da não afetada, sem levar em consideração o que ocorre exatamente na frente de onda. Desta forma, a frente recebe o tratamento de uma descontinuidade na massa específica, pressão, energia interna, temperatura e velocidade de partícula.

#### 3.3.1 ONDAS DE CHOQUE

As ondas que se propagam em um meio sujeitando o material a um estado de tensões significativamente superior ao limite de escoamento dinâmico recebem a denominação de ondas de choque, onde a velocidade de propagação na frente é superior a das demais regiões causando um contínuo alongamento da região afetada. A FIG. 3.3 apresenta um perfil idealizado de onda de choque:



**FIG. 3.3 Perfil idealizado da onda de choque**

**Meyers, 1994**

A hipótese da frente de onda ser considerada uma descontinuidade é apresentada na reta vertical da figura acima, onde o tempo compreendido entre o material ser solicitado e atingir o nível de pressão imposto pela onda é desconsiderado. O nível de tensão máxima do pulso apresenta um patamar que é relacionado com a duração da exposição a que o corpo é submetido, mais facilmente entendido quando se leva em conta, por exemplo, o tempo de

impacto entre dois corpos. Após o material ser submetido ao estado de choque, inicia-se a expansão, ou onda de rarefação (Cooper, 1997), onde o material tende a retornar para os níveis de pressão de contorno do problema. De acordo com as hipóteses simplificadoras admitidas que resultaram na EQ. 3.25, a expansão ocorre isentropicamente.

Como as equações na forma diferencial desenvolvidas na seção 3.1 (página 38) são gerais, podem ser aplicadas para simulações numéricas de ondas de choque. As equações de conservação na forma algébrica, abordadas mais adiante, relacionam os estados antes e depois da frente de onda, formando assim uma base para a EDE do material sujeito a solicitações dinâmicas.

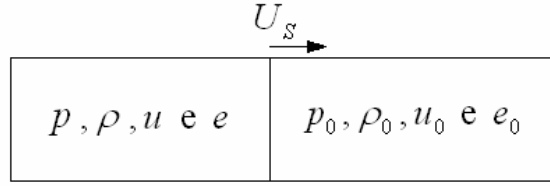
### 3.3.2 ONDAS DE DETONAÇÃO

As ondas de detonação que percorrem o explosivo recebem um tratamento semelhante com o dado às ondas de choque, devido aos elevados valores de pressão associados à detonação. Como as velocidades de detonação e de expansão dos produtos são extremamente altas, admiti-se, como nas ondas de choque, que o processo é adiabático e que a expansão ocorra através da isentrópica (Liu e Liu, 2007). Desta forma, as equações de conservação na forma diferencial podem ser aplicadas na simulação da detonação apenas com a correção devido à energia de detonação liberada na frente de onda.

Numericamente, pode-se definir que a energia interna inicial do explosivo seja a de detonação por unidade de massa, adotando um tratamento idêntico ao da onda de choque, apenas com a diferença da EDE apropriada para os produtos da detonação.

### 3.4 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS DE CONSERVAÇÃO

O estado de agregação do meio, sob efeito de uma onda de choque, deve ser considerado quando da aplicação das leis de conservação de massa, momentum e energia (Meyers, 1994). Com a hipótese da descontinuidade, a separação do meio em duas regiões é apresentada esquematicamente na FIG. 3.4, em um estado puramente hidrodinâmico, ou seja, na ausência de efeitos cisalhantes:



**FIG. 3.4 Frente de onda**

Onde  $U_s$  é a velocidade de propagação do distúrbio de pressão.

Tomando como referência a FIG. 3.4, a frente de onda altera o estado inicial do meio de  $p_0, \rho_0, u_0$  e  $e_0$  para  $p, \rho, u$  e  $e$  após o choque. Para um observador posicionado na frente de onda (linha vertical), a massa de material que entra deve ser igual a que sai em um intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) para uma área arbitrária ( $A_R$ ):

$$\rho_0 A_R (U_s - u_0) \Delta t = \rho A_R (U_s - u) \Delta t \quad (3.37)$$

Simplificando:

$$\rho_0 (U_s - u_0) = \rho (U_s - u) \quad (3.38)$$

A diferença de momentum linear é igual ao impulso aplicado em uma área qualquer. Utilizando a massa na forma empregada na EQ. 3.37, tem-se:

$$\rho A_R (U_s - u) u \Delta t - \rho_0 A_R (U_s - u_0) u_0 \Delta t = (p - p_0) A_R \Delta t \quad (3.39)$$

Simplificando:

$$\rho (U_s - u) u - \rho_0 (U_s - u_0) u_0 = (p - p_0) \quad (3.40)$$

Utilizando a igualdade da EQ. 3.38:

$$\rho_0 (U_s - u_0) (u - u_0) = (p - p_0) \quad (3.41)$$

Com a hipótese de processo adiabático, o trabalho ( $w_t$ ) realizado devido aos valores de pressão  $p$  e  $p_0$  será igual à variação da energia total do sistema ( $\Delta E_t$ ), composta pela energia cinética e pela energia interna.

$$w_t = A_R (p u - p_0 u_0) \Delta t \quad (3.42)$$

$$\Delta E_t = A_R \left[ \frac{1}{2} \rho (U_s - u) u^2 + e \rho (U_s - u) - \frac{1}{2} \rho_0 (U_s - u_0) u_0^2 - e_0 \rho_0 (U_s - u_0) \right] \Delta t \quad (3.43)$$

Igualando a EQ. 3.42 com a EQ. 3.43, realizando as simplificações necessárias e empregando a EQ. 3.38, se obtém:



$$pu - p_0u_0 = \frac{1}{2}\rho_0(U_s - u_0)(u^2 - u_0^2) + \rho_0(U_s - u_0)(e - e_0) \quad (3.44)$$

As EQs. 3.38, 3.41 e 3.44 são as equações de conservação de massa, momentum e energia na forma algébrica, respectivamente.

Como hipótese simplificadora, os valores de pressão, velocidade e energia interna são desprezados em comparação com os impostos pela onda de choque. Desta forma, as equações algébricas de continuidade assumem as formas simplificadas:

$$\rho_0U_s = \rho(U_s - u) \quad (3.45)$$

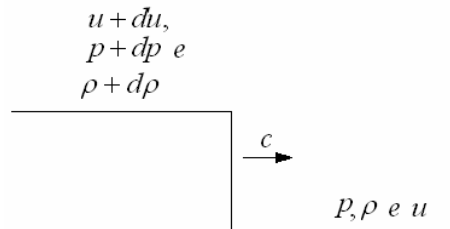
$$p = \rho_0uU_s \quad (3.46)$$

$$pu = \rho_0U_s\left(\frac{u^2}{2} + e\right) \quad (3.47)$$

### 3.5 VELOCIDADE DO SOM

No método numérico utilizado para as simulações (Capítulo 4, página 22), a velocidade de som é importante na determinação da viscosidade artificial, pois define a atenuação necessária dos gradientes de pressão levando em consideração a velocidade de propagação do distúrbio no meio, mantendo a estabilidade numérica. Sendo assim, esta seção foi incluída a fim de determinar esta velocidade.

Considerando um distúrbio de pressão que se propaga em um meio na velocidade do som ( $c$ ), alterando a massa específica, velocidade de partícula e a pressão como esquematizado na FIG. 3.5:



**FIG. 3.5 Distúrbio de pressão**

Pela equação de conservação de massa:

$$\rho c = (\rho + d\rho)(c - du) \quad (3.48)$$

$$\rho c = \rho c - \rho du + cd\rho - dud\rho \quad (3.49)$$

Desprezando o termo do produto dos diferenciais:

$$\rho du = cd\rho \quad (3.50)$$

Pela conservação de momentum:

$$F = \frac{d}{dt}(mu) \quad (3.51)$$

$$A_R(p + dp - p) = \frac{d(mdu)}{dt} \quad (3.52)$$

Onde a massa é dada por  $m = A_R(\rho c \delta t)$ , logo:

$$dp = \frac{d}{dt}(\rho c du \delta t) \quad (3.53)$$

No limite de  $\delta t \rightarrow 0$ :

$$dp = \rho c du \quad (3.54)$$

Substituindo  $\rho du$  da EQ. 3.54 na EQ. 3.50:

$$\frac{dp}{c} = cd\rho \quad (3.55)$$

Logo:

$$dp = c^2 d\rho \quad (3.56)$$

Operando com os princípios do cálculo diferencial:

$$\frac{dp}{d\rho} d\rho = c^2 d\rho \quad (3.57)$$

$$d\rho \left( \frac{dp}{d\rho} - c^2 \right) = 0 \quad (3.58)$$

A única solução da equação acima visto que  $d\rho$  não assume o valor nulo para qualquer propagação de distúrbio é:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (3.59)$$

Desta forma, a velocidade do som é relacionada com as variáveis de estado pressão e massa específica.

### 3.6 EQUAÇÕES DE ESTADO

As equações de estado relacionam as variáveis de estado envolvidas em um problema. Sendo assim, conhecidas energia interna e massa específicas determinam-se as outras grandezas de estado, no caso de interesse deste estudo, o valor de pressão associado ao estado termodinâmico. Estes valores e seus respectivos gradientes são os responsáveis pela dinâmica da propagação do distúrbio no meio. Em geral, trata-se de dados tabelados obtidos em métodos experimentais, podendo estar na forma de curvas ou equações ajustadas que facilitam a utilização.

Como o sistema constituído pelas equações de conservação, EQs. 3.10, 3.22 e 3.34, e a equação da velocidade, EQ. 3.36, apresentam 5 (cinco) variáveis a serem determinadas ( $p, e, u, \rho$  e  $U_s$ ) e 4 (quatro) equações, 1 (uma) equação precisa ser acrescentada ao sistema para possibilitar a solução. Assim, a EDE supre esta necessidade tornando possível a solução do problema.

#### 3.6.1 EQUAÇÃO DE ESTADO DO MATERIAL

De um modo geral, a relação entre a velocidade de propagação da onda de choque (velocidade de choque) e a velocidade de partícula é expressa através de uma relação polinomial, conforme mostrado na equação abaixo:

$$U_s = c_0 + \sum_{i=1}^n s_i u^i \quad (3.60)$$

Experimentos realizados encontraram uma relação linear para a maioria dos metais (Cooper, 1997). Sendo assim a equação geral apresenta a forma simplificada:

$$U_s = c_0 + s_1 u \quad (3.61)$$

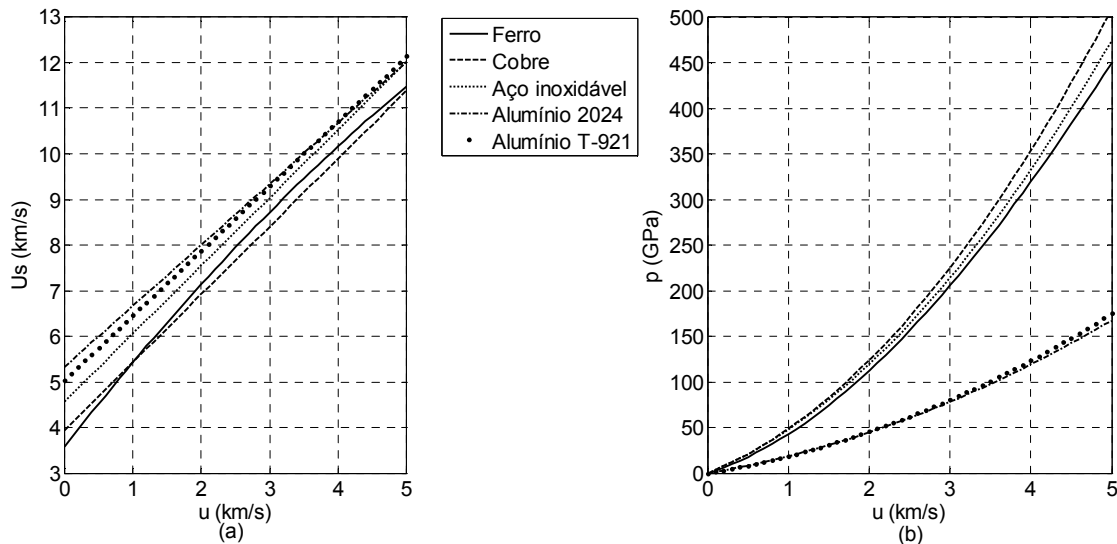
Para alguns metais o valor de  $s_2$  não é desprezível, porem o valor é relativamente pequeno. A TAB. 3.1 apresenta os valores do ajuste linear para alguns materiais, bem como os valores da constante de Mie-Grüneisen ( $\gamma_0$  - ver seção 3.6.3, página 54) e massa específica ( $\rho_0$ ) nas condições padrão. Estes parâmetros também são conhecidos como parâmetros de Hugoniot (Lee, 2006). A TAB. 9.1 (página 145) apresenta uma tabela mais completa destes parâmetros.

**TAB. 3.1 Parâmetros de choque**

Material	$\rho_0$ ( $g/cm^3$ )	$c_0$ ( $km/s$ )	$s_1$	$\gamma_0$
Ferro	7,850	3,574	1,920	1,69
Cobre	8,930	3,940	1,489	1,99
Aço inoxidável	7,896	4,569	1,490	2,17
Alumínio 2024	2,785	5,328	1,338	2,00
Alumínio T-921	2,833	5,041	1,420	2,10

Lee, 2006

A FIG. 3.6 apresenta as curvas de velocidade da onda de choque (a), EQ. 3.60, e pressão (b), EQ. 3.46, versus velocidade de partícula para os materiais descritos na TAB. 3.1. O ferro apresenta o coeficiente  $s_2 = -0,068$  s/m que foi incorporado na elaboração das curvas.



**FIG. 3.6 Velocidade da onda de choque (km/s) (a) e pressão (GPa) (b) versus velocidade de partícula**

### 3.6.2 RELAÇÕES DE RANKINE-HUGONIOT

As relações de Rankine-Hugoniot, ou simplesmente Hugoniot, representam a correspondência entre as propriedades termodinâmicas antes e após a passagem da onda de choque, devido apenas à variação de volume, desprezando efeitos térmicos. O equacionamento algébrico desenvolvido na seção 3.4 (página 46) é geral e pode ser aplicado

para a obtenção destas relações. O objetivo é relacionar pressão e energia apenas com massa específica (ou volume específico) antes e após a passagem da onda.

Tomando por base as equações algébricas de conservação, EQs. 3.45, 3.46 e 3.47, com as hipóteses simplificadoras. Da EQ. 3.45:

$$\rho u = U_s(\rho - \rho_0) \quad (3.62)$$

Substituindo o valor de  $u$  da EQ. 3.46:

$$\rho \frac{p}{\rho_0 U_s} = U_s(\rho - \rho_0) \quad (3.63)$$

Simplificando para obter a pressão na curva de Hugoniot ( $p_H$ ):

$$p_H = \rho_0 U_s^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \quad (3.64)$$

Devido ao desenvolvimento aplicado com a hipótese de descontinuidade na frente de onda, a EQ. 3.64 relaciona estados e não representa o caminho.

A reta que une os estados inicial e final no diagrama  $PxV$  é denominada de reta de Rayleigh. A equação desta reta pode ser obtida diretamente da EQ. 3.64:

$$\frac{p_H}{\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)} = (\rho_0 U_s)^2 \quad (3.65)$$

Que em termos do volume específico ( $V$ ):

$$\frac{p_H}{(V - V_0)} = -(\rho_0 U_s)^2 \quad (3.66)$$

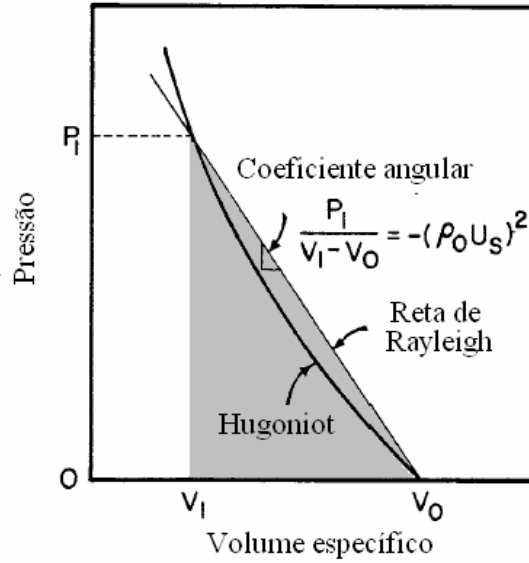
Logo, a reta de Rayleigh apresenta coeficiente angular  $-(\rho_0 U_s)^2$ . Desenvolvendo a EQ. 3.47 com o valor de  $u$  da EQ. 3.46, obtêm-se:

$$e_H = \frac{p}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right) \quad (3.67)$$

Que em termos do volume específico:

$$e_H = \frac{p}{2} (V_0 - V) \quad (3.68)$$

A equação acima representa a área abaixo da reta de Rayleigh entre os estados inicial e final. A FIG. 3.7 apresenta qualitativamente a curva de Hugoniot, a reta de Rayleigh e a energia associada.



**FIG. 3.7 Relações de Hugoniot no gráfico  $P \times V$**   
**Meyers, 1994**

Admitindo que velocidade de choque e de partícula apresentem a relação linear dada pela EQ. 3.61, a EQ. 3.64 pode ser relacionada apenas com massa específica e com os parâmetros de choque de Hugoniot que são dados tabelados obtidos experimentalmente. Da EQ. 3.62:

$$\frac{U_s - c_0}{s_1} = U_s \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \quad (3.69)$$

Simplificando a expressão:

$$U_s = \frac{c_0}{\left[ 1 - s_1 \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right]} \quad (3.70)$$

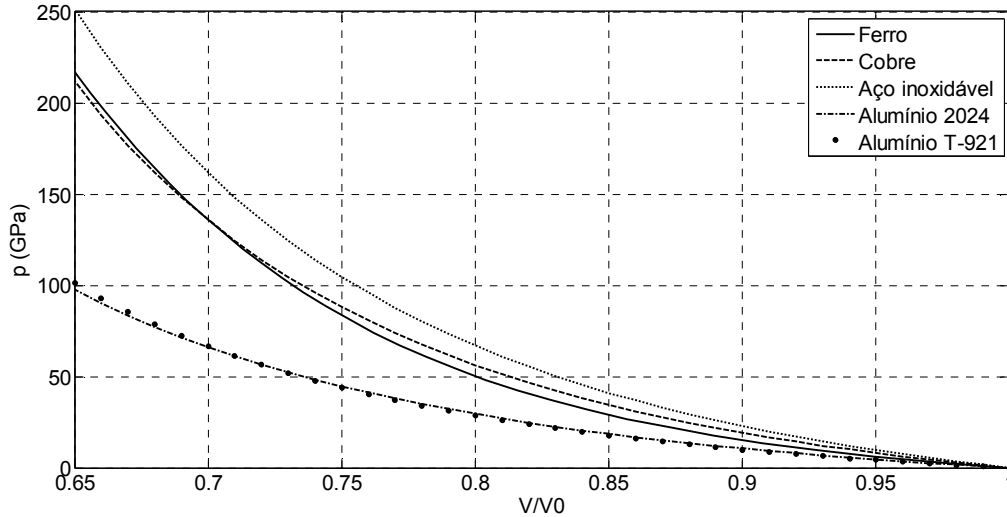
Aplicando o resultado da EQ. 3.70 na EQ. 3.64:

$$p_H = \rho_0 \frac{c_0^2}{\left[ 1 - s_1 \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right]^2} \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \quad (3.71)$$

Simplificando:

$$p_H = \frac{c_0^2 (V_0 - V)}{\left[ V_0 - s_1 (V_0 - V) \right]^2} \quad (3.72)$$

A FIG. 3.8 apresenta as curvas de Hugoniot para os materiais da TAB. 3.1 (página 51). O parâmetro  $s_2$  do ferro foi incorporado ao gráfico, que neste caso particular fez uso das EQs. 3.64 e 3.60 combinadas.



**FIG. 3.8 Hugoniot para alguns materiais**

### 3.6.3 EQUAÇÃO DE ESTADO DE MIE-GRÜNEISEN

O movimento de átomos de um meio é alterado devido ao aquecimento, desta forma pressão e energia devem ser associadas ao estado de excitação dos elétrons e em consequência a temperatura. Assim, um estado geral de pressão e energia interna pode ser expresso como uma combinação de uma componente “fria” de deformação ( $p_F$  e  $\varepsilon_F$  a 0 K), uma componente térmica ( $p_T$  e  $\varepsilon_T$ ) e uma de excitação eletrônica ( $p_E$  e  $\varepsilon_E$ ). Conforme definido na EQ. 3.73 e na EQ. 3.74.

$$p = p_F + p_T + p_E \quad (3.73)$$

$$e = \varepsilon_F + \varepsilon_T + \varepsilon_E \quad (3.74)$$

Para temperaturas inferiores a 10.000 K (dez mil Kelvin), os átomos apresentam pequenas vibrações em torno da posição de equilíbrio e as componentes de excitação podem ser desprezadas. Estas vibrações são harmônicas devido as suas amplitudes serem inferiores as distâncias interatômicas. Em termos da física quântica clássica, para pequenas oscilações a energia de vibração é da ordem de  $3k_bT$  por átomo, onde  $k_b$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura. Um sistema com  $N_{ato}$  átomos por unidade de massa apresentará energia de vibração específica de  $3N_{ato}k_bT$  e esta componente é função exclusiva da temperatura (Zel’dovich e Raizer, 2002). Assim:

$$\varepsilon_T = 3N_{ato}k_bT \quad (3.75)$$

Como esta componente se deve apenas a efeitos térmicos, pode-se definir o calor específico a volume constante:

$$C_V = 3N_{ato}k_b \quad (3.76)$$

Combinando a EQ. 3.75 com a EQ. 3.76:

$$\varepsilon_T = C_V T \quad (3.77)$$

Logo a energia interna específica pode ser expressa como:

$$e = \varepsilon_F(V) + C_V T \quad (3.78)$$

A pressão composta pela soma das duas partes assume:

$$p = p_F(V) + p_T(V, T) \quad (3.79)$$

A pressão elástica (fria) é relacionada com a energia potencial por (Zel'dovich e Raizer, 2002):

$$p_F = -\frac{d\varepsilon_F}{dV} \quad (3.80)$$

A dependência entre temperatura e pressão pode ser obtida diretamente da identidade termodinâmica:

$$\left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \quad (3.81)$$

Como  $C_V$  independe do volume, a EQ. 3.81 resulta em:

$$T\left(\frac{\partial p_T}{\partial T}\right)_V = p_T \quad (3.82)$$

Logo a função  $p_T$  possui uma variação linear com a temperatura, e pode ser escrita para uma função qualquer de volume específico:

$$p_T = \zeta(V)T \quad (3.83)$$

Uma possibilidade que satisfaz o funcional da equação acima é dada por:

$$p_T = \frac{\gamma(V)}{V} C_V T \quad (3.84)$$

Onde o parâmetro  $\gamma$  é o coeficiente de Mie-Grüneisen. A relação termodinâmica dada pela equação abaixo (Zel'dovich e Raizer, 2002) pode relacionar o coeficiente que é



dependente do volume específico com valores de referência para o estado inicial e definindo assim a constante de Mie-Grüneisen.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1 \quad (3.85)$$

O coeficiente de expansão térmica a pressão constante e o coeficiente isotérmico de compressibilidade do meio, respectivamente EQs. 3.86 e 3.87, para a temperatura de 0 K são definidos como a seguir:

$$k_0 = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \quad (3.86)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (3.87)$$

Onde se pode obter o valor da constante de Mie-Grüneisen para a temperatura de 0 K:

$$\gamma_0 = \frac{\alpha_0}{\rho_0 C_V k_0} \quad (3.88)$$

Esta equação pode ser modificada para:

$$\frac{\gamma_0}{V_0} = \frac{\alpha_0}{C_V k_0} \quad (3.89)$$

Admitindo que  $C_V$ ,  $\alpha_0$  e  $k_0$  sejam constantes na faixa de operação, a relação  $\gamma(V)/V$  apresenta um valor constante para outros estados, logo:

$$\frac{\gamma(V)}{V} = \frac{\gamma_0}{V_0} \quad (3.90)$$

Substituindo a EQ. 3.90 na EQ. 3.79:

$$p = p_F + \frac{\gamma(V)\varepsilon_T}{V} \quad (3.91)$$

Isolando  $\varepsilon_T$  na EQ. 3.74 e inserido na equação acima, tem-se:

$$p - p_F = \frac{\gamma(V)}{V} (e - \varepsilon_F) \quad (3.92)$$

Esta equação pode ser estendida após manipulações algébricas para outros estados como os definidos pela Hugoniot e considerando a EQ. 3.90:

$$p - p_H = \frac{\gamma_0}{V_0} (e - e_H) \quad (3.93)$$

A equação acima é a forma mais comum da EDE de Mie-Grüneisen.

### 3.6.4 EQUAÇÃO DE ESTADO DE JONES-WILKINS-LEE

Para a simulação da detonação de um explosivo deve-se acrescentar uma EDE compatível. Uma série de equações foram desenvolvidas para os produtos da detonação de um alto-explosivo. A EDE de JWL é admitida como uma equação que descreve com boa aproximação processo de expansão dos produtos, com os coeficientes determinados experimentalmente (Lee, 2006).

$$p = A \left[ 1 - \frac{w\eta}{R_1} \right] \exp\left(-\frac{R_1}{\eta}\right) + B \left[ 1 - \frac{w\eta}{R_2} \right] \exp\left(-\frac{R_2}{\eta}\right) + w\rho e \quad (3.94)$$

Onde  $A, B, R_1, R_2$  e  $w$  são parâmetros de ajuste experimental e  $\eta$  é a razão das massas específicas:

$$\eta = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (3.95)$$

A tabela abaixo mostra alguns valores típicos dos parâmetros de ajuste da equação JWL. Onde  $u_D$  é a velocidade de detonação e  $e_D$  a energia de detonação, ambos característicos do explosivo e determinados experimentalmente.

**TAB. 3.2 Parâmetros de ajuste da equação JWL**

Explosivo	$\rho_0$ (g/cm <sup>3</sup> )	$u_D$ (km/s)	$e_D$ (MJ/kg)	$A$ (GPa)	$B$ (GPa)	$R_1$	$R_2$	$w$
Comp B	1,717	7,98	4,95	524,2	7,678	4,2	1,10	0,34
LX-14-0	1,835	8,80	5,56	826,1	17,240	4,55	1,32	0,36
TNT	1,630	6,93	4,29	371,2	3,231	4,15	0,95	0,30

Lee, 2006

Os parâmetros fornecidos na TAB. 3.2 só são válidos para a os produtos da reação. Caso se deseje utilizar para a fase sólida, valores específicos devem ser empregados. A tabela completa publicada na referência citada está transcrita na TAB. 9.2 (página 148).

A velocidade de detonação por ser muito elevada separa o explosivo em duas regiões, a detonada da não detonada, assim o tratamento de descontinuidade das ondas de choque é mantido. A região não afetada pela detonação, hipoteticamente, não necessitada de uma EDE,

devido às hipóteses simplificadoras adotadas. Em um tratamento mais realístico a EDE de Mie-Grüneisen pode ser empregada e constitui uma das sugestões para trabalhos futuros. Em geral os códigos computacionais que simulam detonações, descartam este efeito devido à elevada velocidade de detonação e ao comentado acima.

### 3.7 TEORIA DA ELASTICIDADE

O estado de tensões de um meio é definido pelas 6 (seis) componentes de tensão:  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$  e  $\sigma_{xz}$ . As relações lineares entre estas componentes de tensão e as de deformação são conhecidas como Lei de Hooke (Timoshenko e Goodier, 1980). Esta lei para um corpo isotrópico é dada por (Mase, 1970):

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda \delta^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\gamma} + 2G \varepsilon^{\alpha\beta} \quad (3.96)$$

Onde  $\lambda$  é uma constante de Lamé,  $G$  o módulo de elasticidade transversal e  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  é o tensor de deformações. Este tensor é a parte simétrica do tensor de deslocamento relativo e representa apenas a deformação, a rotação de corpo rígido é representada pela parte anti-simétrica. O tensor deslocamento relativo é dado por (Mendelson, 1983):

$$d^{\alpha\beta} = \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\beta} \quad (3.97)$$

Onde  $l^\alpha$  são as componentes de deslocamento. Escrevendo o tensor de segunda ordem como uma combinação de uma parte simétrica e uma anti-simétrica:

$$\frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial l^\beta}{\partial x^\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial l^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \quad (3.98)$$

Logo:

$$d^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta} \quad (3.99)$$

Onde  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  é o tensor de deformações da EQ. 3.96 e  $\omega^{\alpha\beta}$  é o tensor de rotações:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial l^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \quad (3.100)$$

$$\omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial l^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial l^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \quad (3.101)$$

O tensor de tensões introduzido na seção 3.1.2 (página 42) foi dividido em uma parte hidrostática ( $p\delta^{\alpha\beta}$ ) e um componente desviador ( $\tau^{\alpha\beta}$ ). O tensor de deformações pode igualmente ser dividido em uma componente de deformação média e um desviador:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\gamma} + \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta} \quad (3.102)$$

Onde a primeira parte do segundo membro da equação acima é proporcional à variação de volume. O termo  $\bar{\varepsilon}^{\alpha\beta}$  representa a deformação provocada somente pela distorção e é chamado de tensor desviador de deformações. Utilizando a EQ. 3.18 que define as tensões totais e introduzindo na EQ. 3.96:

$$-p\delta^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta} = \lambda\delta^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\gamma} + 2G\varepsilon^{\alpha\beta} \quad (3.103)$$

Isolando a componente desviadora:

$$\tau^{\alpha\beta} = (p + \lambda\varepsilon^{\gamma\gamma})\delta^{\alpha\beta} + 2G\varepsilon^{\alpha\beta} \quad (3.104)$$

Para o tensor esférico de pressões com valor de pressão dado por (Wilkins, 1963):

$$p = -\frac{(3\lambda + 2G)}{3}\varepsilon^{\gamma\gamma} = -K\varepsilon^{\gamma\gamma} \quad (3.105)$$

Onde  $K$  é o módulo de Compressibilidade (“*Bulk modulus*”). Obtêm-se expressões alternativas da Lei de Hooke para relacionar o tensor desviador com o desviador de deformações:

$$\tau^{\alpha\beta} = 2G\left(\varepsilon^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\gamma}\right) \quad (3.106)$$

Operando em função de taxas temporais a fim de ser incluído no código computacional marchante no tempo:

$$\dot{\tau}^{\alpha\beta} = 2G\left(\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}^{\gamma\gamma}\right) + \psi^{\alpha\beta} \quad (3.107)$$

Onde o tensor taxa de deformação é definido pela derivada temporal da EQ. 3.100:

$$\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha}\right) \quad (3.108)$$

E  $\psi^{\alpha\beta}$  corresponde à correção devido à rotação de corpo rígido. A zona ou elemento lagrangeano submetido a uma rotação no espaço deve ser acompanhada da rotação por um mesmo ângulo do estado de tensões. O tensor derivativo de Jaumann para pequenas rotações

pode ser introduzido na EQ. 3.107 em substituição ao termo de correção devido a rotação de corpo rígido (Liu e Liu, 2007):

$$\dot{\tau}^{\alpha\beta} = 2G \left( \dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta^{\alpha\beta} \dot{\varepsilon}^{\gamma\gamma} \right) + \tau^{\alpha\kappa} \dot{\omega}^{\beta\kappa} + \tau^{\kappa\beta} \dot{\omega}^{\alpha\kappa} \quad (3.109)$$

Onde  $\dot{\omega}^{\alpha\beta}$  é o tensor taxa de rotação obtido pela derivada temporal da EQ. 3.101:

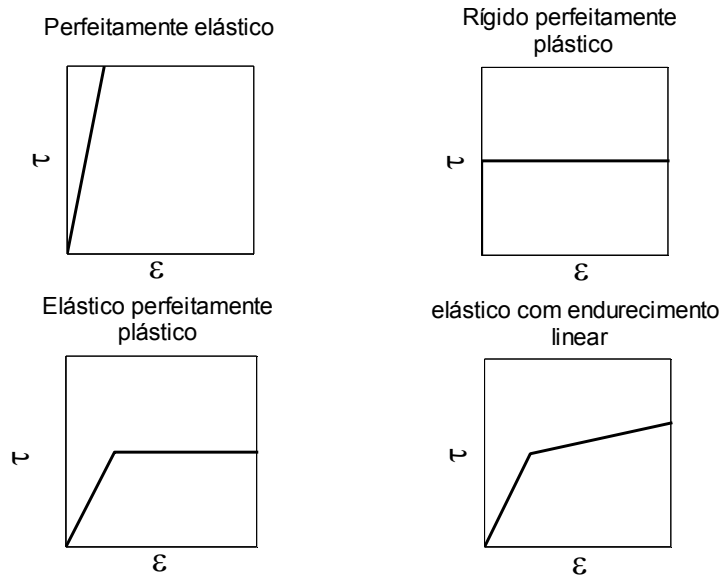
$$\dot{\omega}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \quad (3.110)$$

A EQ. 3.109 representa o incremento no tensor desviador para o regime elástico. Caso o nível de tensões ultrapasse o limite estabelecido pelo critério de escoamento adotado, estabelecido na seção 3.7.2 (página 61), correções devem ser efetuadas para que o modelo elástico perfeitamente plástico seja respeitado.

### 3.7.1 DESVIADOR DE TENSÕES

As componentes desviadoras presentes nas equações de conservação de momentum e de energia, EQs. 3.22 e 3.35 respectivamente, podem ser determinadas por um modelo matemático que relacione tensão com deformação, taxa de deformação, rigidez do material etc. Devido à natureza complexa desta relação, modelos teóricos foram criados e estão disponíveis na literatura, pode-se citar, por exemplo, o perfeitamente elástico, o rígido com endurecimento linear, o elástico perfeitamente plástico e o elástico com endurecimento linear (Mendelson, 1983). A FIG. 3.9 apresenta esquematicamente as relações entre tensão e deformação dos modelos citados.

O modelo elástico perfeitamente plástico compõe o código computacional deste trabalho devido à maior disponibilidade de dados disponíveis na literatura. Este modelo é caracterizado por uma região de deformação elástica, que ocorre para níveis de tensão até o limite de escoamento do material. Após este limite, o material entra em regime de deformação plástica. Mesmo assim, não se dispõem de informação para muitos materiais o que resultará em simulações com a parte desviadora desprezada.



**FIG. 3.9** Curvas idealizadas da relação entre tensão e deformação  
 Adaptado de Mendelson, 1983

### 3.7.2 CRITÉRIO DE VON MISES

O critério de escoamento é uma hipótese acerca do limite da região elástica sob qualquer possível combinação de tensões (Johnson e Mellor, 1983). Baseado em experimentos, o limite de escoamento dos materiais são determinados e estipulados para cada critério. Dentre os vários critérios de escoamento disponíveis, destacam-se os critérios de Tresca e o de Von Mises, os quais se baseiam nas tensões principais e no limite de escoamento determinado experimentalmente para o caso unidimensional. O critério de Von Mises foi incorporado ao código computacional limitando a região de deformação elástica, por apresentar melhores resultados que o modelo de Tresca (Mendelson, 1983).

O critério de escoamento é baseado no estado de tensões do ponto. Conhecendo este estado, pode-se definir um novo sistema de coordenadas onde as tensões cisalhantes sejam nulas ( $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$ ) e as tensões normais definem as tensões principais ( $\sigma_{xx} = \sigma_1, \sigma_{yy} = \sigma_2$  e  $\sigma_{zz} = \sigma_3$ ). O modelo proposto por Von Mises pode ser interpretado como uma função escalar das tensões principais com o limite da região elástica definido por uma constante:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \text{constante} \quad (3.111)$$

Para estados de tensão unidimensionais em materiais ortotrópicos, o limite de escoamento determinado experimentalmente apresentará o mesmo valor ( $\sigma_Y$ ) em todas as direções principais. Introduzindo uma das tensões principais como ( $\sigma_Y$ ) e as demais nulas na EQ. 3.111, determina-se o valor da constante:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_Y^2 \quad (3.112)$$

Como o tensor definido na EQ. 3.18 é constituído da pressão hidrostática atuando igualmente em todas as direções e das componentes desviadoras, as tensões principais podem ser expressas em função das tensões principais do desviador de tensões. Definindo as três equações abaixo:

$$\sigma_i = -p + \tau_i, i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (3.113)$$

Inserido na EQ. 3.112 pode-se obter o critério de escoamento em função das componentes principais do tensor desviador:

$$(\tau_1 - \tau_2)^2 + (\tau_2 - \tau_3)^2 + (\tau_1 - \tau_3)^2 = 2\sigma_Y^2 \quad (3.114)$$

Embora o critério tenha sido apresentado em termos de uma função escalar, as bases se encontram na máxima energia de distorção, o que reforça a idéia do critério de escoamento depender exclusivamente do desviador de tensões. A EQ. 3.114 pode ser escrita em função do segundo invariante do tensor desviador ( $J_2$ ). Os invariantes dependem apenas do estado de tensões, sendo conveniente a sua utilização que é aplicável a qualquer sistema de coordenadas.

$$J_2 = \frac{1}{2} \tau^{\alpha\beta} \tau^{\beta\alpha} \quad (3.115)$$

Nos eixos principais do desviador de tensor:

$$J_2 = \frac{1}{2} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) \quad (3.116)$$

O primeiro invariante do tensor desviador ( $J_1$ ) é dado pela soma dos termos da diagonal principal e apresenta valor nulo, da EQ. 3.106:

$$J_1 = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0 \quad (3.117)$$

Devido à independência do sistema de coordenadas:

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad (3.118)$$

Logo, a EQ. 3.116 pode ser reescrita como:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\tau_1 - \tau_2)^2 + (\tau_2 - \tau_3)^2 + (\tau_1 - \tau_3)^2] \quad (3.119)$$

Comparando a EQ. 3.114 com a EQ. 3.119, o critério de escoamento pode ser escrito como:

$$J_2 = \frac{\sigma_Y^2}{3} \quad (3.120)$$

### 3.8 REGIME PLÁSTICO

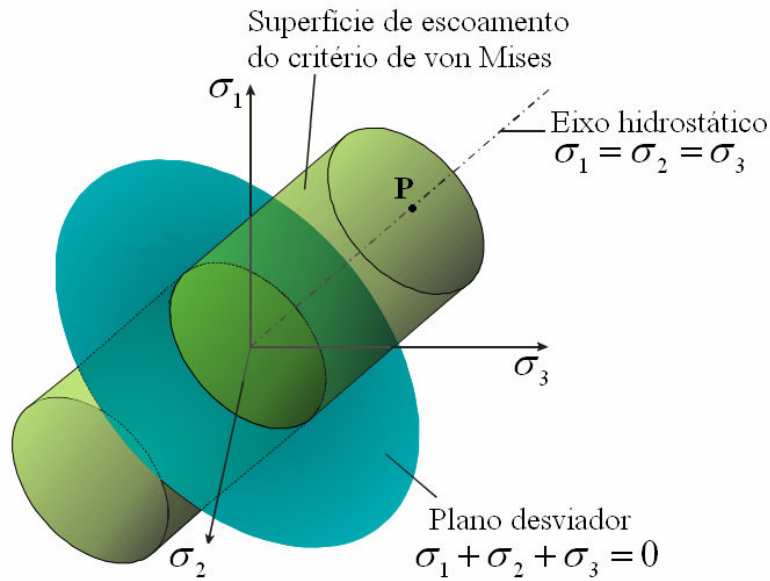
Depois de estimado o estado de tensões em um ponto pela integração da EQ. 3.109 e pela EDE, o segundo invariante do tensor desviador pode ser empregado para verificar o critério de Von Mises. A superfície definida pela EQ. 3.120 marca a região de transição do regime elástico,  $J_2 \leq \sigma_Y^2/3$ , para o plástico,  $J_2 > \sigma_Y^2/3$ . Com base na EQ. 3.115 pode-se definir um fator de ajuste das componentes desviadoras e de verificação do critério de escoamento ( $\theta$ ).

$$\theta = \sqrt{\tau^{\alpha\beta} \tau^{\beta\alpha}} \quad (3.121)$$

O regime será elástico para  $\theta \leq \sigma_Y \sqrt{2/3}$  e plástico para  $\theta > \sigma_Y \sqrt{2/3}$ . Na FIG. 3.10 tem-se a representação espacial da superfície de escoamento do critério de Von Mises no sistema de coordenadas dos eixos principais,  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$ . O eixo hidrostático está associado à pressão e caracteriza o afastamento da circunferência que define o critério de escoamento da origem do sistema de referência ( $\overline{OP}$ ), o ponto  $P$  está localizado ao longo da linha que une a origem ao ponto (1,1,1). O plano desviador representa o afastamento em relação ao eixo hidrostático, na figura o plano desviador é apresentado para a pressão hidrostática nula.

A região definida pelos diversos planos desviadores para diferentes valores de pressão caracteriza a superfície de escoamento pelo critério de Von Mises, que nesta representação gráfica é dada por um cilindro. Verifica-se mais uma vez que a transição entre elástico e plástico, pelas hipóteses adotadas independe do estado de pressão hidrostática e somente das componentes desviadoras. O raio do cilindro é dado por  $\sigma_Y \sqrt{2/3}$  (Mendelson, 1983).





**FIG. 3.10 Superfície de escoamento**

**Bortolan Neto, 2009**

Caso o estado de tensões presente  $\theta > \sigma_Y \sqrt{2/3}$ , o tensor deve ser ajustado para o limite da região elástica mantendo assim o modelo elástico perfeitamente plástico adotado (Wilkins, 1963):

$$\tau_*^{\alpha\beta} = \frac{\sigma_Y \sqrt{2/3}}{\theta} \tau^{\alpha\beta} \quad (3.122)$$

Onde o tensor  $\tau_*^{\alpha\beta}$  representa o tensor desviador de tensão na superfície de escoamento do critério. Valores do módulo de elasticidade transversal e do limite de escoamento para alguns materiais obtidos no trabalho de Steinberg et al. (1983) foram incluídos no apêndice (TAB. 9.1, página 145).

## 4 MODELO NUMÉRICO

### 4.1 BASES MATEMÁTICAS DO MÉTODO SPH

As bases do SPH estão relacionadas com a representação integral de uma função escalar ou vetorial qualquer. Sendo assim, o desenvolvimento teórico representa um caso geral sendo posteriormente adaptado para um sistema discreto, restringindo o domínio do integral para os pontos onde estão localizadas as partículas.

#### 4.1.1 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

Seja  $f(\mathbf{x})$  uma função qualquer, escalar ou vetorial. O objetivo da representação integral é obter o valor desta função conhecendo o valor nos pontos vizinhos. Assim, o desenvolvimento se inicia com a seguinte identidade:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (4.1)$$

Onde  $\Omega$  é o domínio do integral que contém  $\mathbf{x}$ , e  $\mathbf{x}'$  representa o espaço de todos os vetores dentro do domínio do integral, e  $\delta$  é a função Delta de Dirac, definido na EQ. 4.2:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \end{cases} \quad (4.2)$$

Aproximando a função Delta de Dirac na EQ. 4.1 por uma função de interpolação ou suavização:

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \approx \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.3)$$

Onde  $h$  é um comprimento característico que está diretamente relacionado com o domínio de influência da função de suavização  $W$  (Liu e Liu, 2007). O domínio de influência é a região do domínio do problema utilizado para a determinação da função que se deseja obter.

Utilizando a aproximação da EQ. 4.3 na EQ. 4.1, pode-se o valor da função pretendida  $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$ :

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (4.4)$$

Definindo um vetor posição  $\mathbf{r}$  de módulo  $r$  como sendo a diferença dos vetores posição:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' \quad (4.5)$$

Pode-se reescrever a EQ. 4.4 como:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}' \quad (4.6)$$

#### 4.1.2 PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO

A função de aproximação deveria satisfazer a algumas propriedades. A primeira propriedade decorre diretamente da EQ. 4.4 para representar uma função constante. Para a função  $f(\mathbf{x}) = 1$ , a sua aproximação deve retornar ao valor 1 (um), assim:

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}' = 1 \quad (4.7)$$

A expressão acima é conhecida como condição de normalização ou condição de unidade e atesta que o integral da função no domínio deve apresentar o valor 1 (um).

A segunda propriedade decorre da aproximação entre o funcional e a função Delta de Dirac, EQ. 4.3, e é conhecida como propriedade da função Delta. Deve haver uma convergência do valor aproximado pela representação integral para o próprio valor da função, considerando domínios de integração cada vez menores, logo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r}, h) = \delta(\mathbf{r}) \quad (4.8)$$

A terceira propriedade é o domínio compacto. A função que se deseja aproximar utiliza os pontos onde a distância seja menor que o produto do comprimento característico pelo fator de escala da função ( $kh$ ) e o funcional se anula fora do domínio de suporte. O objetivo do domínio de suporte é, por um lado, evitar que uma aproximação seja muito afetada pela utilização de todo o domínio do problema ou um domínio muito grande. Por outro lado, se o domínio for muito pequeno o caráter interpolativo será afetado resultando em aproximações igualmente incoerentes. Para uma função de suavização  $W$  qualquer deve existir um fator  $k$  definido na construção da função tal que:

$$W(\mathbf{r}, h) = 0, \text{ quando } r > kh \quad (4.9)$$

Com as 3 (três) propriedades mencionadas acima, é desejável que a função de suavização seja bem comportada para um melhor tratamento matemático. Podendo ser escolhida como sempre positiva, sem descontinuidades e decrescente, com valor máximo em  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  e se anulando fora do domínio de suporte. A positividade é estimulada pelo caráter de interpolação do método, onde  $W$  representa o peso dado ao valor da função nas vizinhanças do ponto de interesse. Uma função sem descontinuidades é buscada para representação das derivadas, seção 4.1.3 (página 68). O caráter decrescente da função é desejado para se fornecer pesos maiores aos pontos mais próximos de  $\mathbf{x}$ , reduzindo a influência com o aumento da distância.

Expandindo  $f(\mathbf{x}')$  através da série de Taylor em torno de  $\mathbf{x}$  com erro de truncamento da ordem de  $O(h^2)$ :

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{r})] W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}' + O(h^2) \quad (4.10)$$

Como a integração se dá na variável  $\mathbf{x}'$ :

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}' + f'(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \mathbf{r} W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}' + O(h^2) \quad (4.11)$$

Utilizando a condição de normalização e assumindo que a aproximação representa o próprio valor da função:

$$f'(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \mathbf{r} W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}' = 0 \quad (4.12)$$

Utilizando a definição de  $\mathbf{r}$  e para a sentença acima seja sempre verdadeira:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0 \quad (4.13)$$

Como o integral é nulo o funcional  $W$  deve ser uma função par para que a expressão  $(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$  seja uma função ímpar. O funcional  $W$ , a rigor, não precisa ser par, visto que houve truncamento na expansão por série de Taylor. O argumento motivador para se escolher funções de interpolação pares é que na aproximação entre duas partículas  $i$  e  $j$ , a interação de  $i$  e  $j$  será igual à de  $j$  com  $i$ :

$$W(\mathbf{r}, h) = W(-\mathbf{r}, h) \quad (4.14)$$

Casos em que a expressão acima não é satisfeita podem resultar em incompatibilidades físicas, como por exemplo, massa específica menor do que zero, sendo necessário um cuidado muito maior na implementação do código.

De um modo geral, buscam-se funções que atendam as propriedades citadas abaixo:

1. A função deve ser normalizada, EQ. 4.7.
2. Domínio de suporte compacto, EQ. 4.9.
3. Positividade,  $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \geq 0$ .
4. Função com máximo em  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  e decrescente no domínio de suporte.
5. Condição de Delta de Dirac, EQ. 4.8.
6. Função par, EQ. 4.14.
7. Função derivável.

#### 4.1.3 REPRESENTAÇÃO DAS DERIVADAS

A representação integral pode ser utilizada para representar derivadas de campos escalares e vetoriais. Sendo assim, podem ser obtidos os gradientes e divergentes utilizando a aproximação dada pela representação integral com a função de suavização.

##### 4.1.3.1 GRADIENTE

O gradiente de um campo escalar  $F(\mathbf{x})$  pode ser obtido pela derivada espacial aplicada diretamente na representação integral definida na EQ. 4.1. Assim:

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int_{\Omega} F(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{x}' \quad (4.15)$$

Onde cada componente do gradiente é tomada em relação a uma determinada direção. Utilizando a aproximação com a função de interpolação  $W$  dada pela EQ. 4.4 e atentando para o fato de  $F(\mathbf{x}')$  dentro do integral é independente de  $\mathbf{x}$ :

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}' \quad (4.16)$$

Logo:

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}' \quad (4.17)$$

#### 4.1.3.2 DIVERGENTE

Um procedimento similar ao da seção acima pode ser utilizado para se obter o divergente de um campo vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{x}' \quad (4.18)$$

Vale ressaltar que a expressão acima representa um produto escalar e pode ser reescrita como:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}' \quad (4.19)$$

#### 4.1.3.3 PRODUTO VETORIAL

Pode-se ainda obter a representação integral do produto  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})$ :

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla \times \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{x}' \quad (4.20)$$

Apenas a função Delta de Dirac deve ser diferenciada, visto que a função  $\mathbf{F}(\mathbf{x}')$  dentro do integral independe de  $\mathbf{x}$ . Utilizando novamente a aproximação da função Delta de Dirac:

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}') \times \nabla W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}' \quad (4.21)$$

#### 4.1.3.4 GRADIENTE DA FUNÇÃO DE SUAVIZAÇÃO

As aproximações obtidas nas seções anteriores dependem exclusivamente do gradiente da função de aproximação, desta forma se faz necessário desenvolver o procedimento para obtenção deste gradiente. Embora a função de suavização tenha sido escrita, até este ponto,

em função do vetor  $\mathbf{r}$  e do comprimento suavizante  $h$ , a sua dependência se deve exclusivamente ao módulo de  $r$  normalizado por  $h$ . Podendo-se representar a função por  $W(\mathbf{r}, h)$ ,  $W(r, h)$ ,  $W(r/h)$  ou  $W(R)$ . Onde a variável  $R$  é definida na equação abaixo:

$$R = \frac{r}{h} \quad (4.22)$$

Da definição de  $\mathbf{r}$  na EQ. 4.5, o módulo do vetor  $r$  pode ser calculado em função das componentes de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$ , que para o caso mais geral em coordenadas cartesianas:

$$r = \left[ \sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2 \right]^{1/2} \quad (4.23)$$

A derivada da equação acima em relação a componente  $x_i$  será:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x'_i)}{r} \quad (4.24)$$

Logo o gradiente do funcional pode ser obtido pela regra da cadeia:

$$\nabla W(\mathbf{r}, h) = \frac{\partial W(\mathbf{r}, h)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial \bar{x}} \quad (4.25)$$

Utilizando o resultado da EQ. 4.24 na EQ. 4.25 atentando para a EQ. 4.22:

$$\nabla W(\mathbf{r}, h) = \frac{\partial W(\mathbf{r}, h)}{\partial R} \frac{\mathbf{r}}{hr} \quad (4.26)$$

Ou em função do módulo de  $\mathbf{r}$ :

$$\nabla W(\mathbf{r}, h) = \frac{\partial W(\mathbf{r}, h)}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4.27)$$

Lembrando que a expressão acima representa um vetor que no caso geral apresenta três componentes.

## 4.2 FUNÇÕES DE SUAUIZAÇÃO

As funções de base radiais são uma designação mais generalizada para funções relacionadas apenas com a distância de um ponto de referência. Podem ser denominadas como globais ou compactas. As funções globais utilizam todo o domínio do problema para a interpolação, já as compactas são interpoladas para apenas uma região do domínio, denominado de domínio de suporte no SPH.

Esta seção tem por objetivo apresentar algumas funções de suavização disponíveis na literatura, que foram implementadas no código computacional. As seguintes subseções apresentaram informações sobre as funções: Gaussiana, “*spline*” cúbica e quadrática. Outras funções podem ser obtidas em trabalhos sobre o SPH ou em uma abordagem mais geral funções de base radial.

#### 4.2.1 GAUSSIANA

Esta função foi utilizada no trabalho original do SPH (Monaghan e Gingold, 1977), por se tratar de uma das funções mais comuns que atendem a praticamente todas as propriedades citadas na seção 4.1.2 (página 66), exceto pelo domínio compacto. As funções exponenciais são comuns em ciências e engenharia tornando uma opção atrativa para uso como função de interpolação. O problema do domínio compacto é contornado, pois a função decresce rapidamente e para fins práticos o fator de escala é tomado como  $k = 3$  para se evitar que cálculos sejam efetuados e interações que podem ser desprezadas sejam consideradas. A função Gaussiana assume a forma geral:

$$W(R) = C(d)e^{-R^2} \quad (4.28)$$

Onde  $d$  é a dimensão do problema considerado e  $C(d)$  é um coeficiente de normalização da função, geralmente determinado com a propriedade de normalização. Para a esta função:

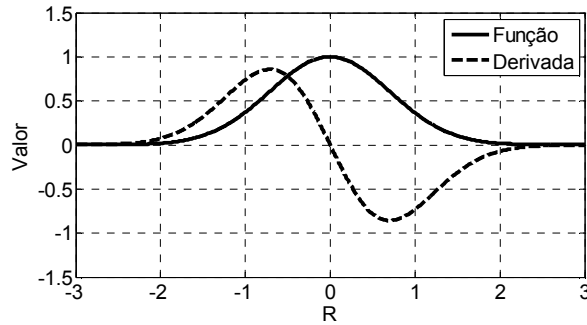
$$C(d) = \frac{1}{h^d \pi^{d/2}} \quad (4.29)$$

A função definida da EQ. 4.28 derivada em relação a  $R$  :

$$\frac{\partial W(R)}{\partial R} = -2RW(R) \quad (4.30)$$

A FIG. 4.1 apresenta o gráfico da função gaussiana e da primeira derivada, obtidas da EQs. 4.28 e 4.30, respectivamente. O eixo das ordenada apresenta o valor da função e da sua derivada divididos pelo coeficiente de ajuste.





**FIG. 4.1 Função gaussiana e primeira derivada**

Embora  $R$ , a rigor, apresente valor positivo é comum representar graficamente com valores negativos. Isto se deve ao centro do domínio de suporte estar localizado na posição  $R = 0$  e a função ser espelhada em relação a este ponto e a derivada com inversão de sinal. Desta forma, a faixa de valores de  $R$  pode ser ampliada para valores negativos e os valores da função e de sua derivada mantenham a coerência.

#### 4.2.2 “SPLINE” CÚBICA

Esta função é uma das mais utilizadas devido a apresentar um domínio compacto e as demais propriedades desejáveis. Introduzida por Monaghan e Lattanzio em 1985 (Børve et al., 2001), como uma alternativa para a função de interpolação gaussiana. A “*spline*” cúbica é definida na expressão abaixo:

$$W(R) = C(d) \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}R^2 + \frac{3}{4}R^3, & \text{se } 0 \leq R \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2 - R)^3, & \text{se } 1 \leq R < 2 \\ 0, & \text{se } R \geq 2 \end{cases} \quad (4.31)$$

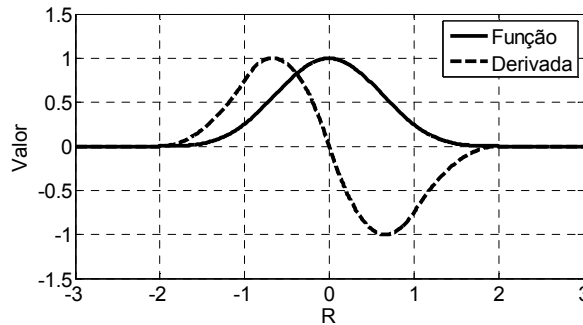
Onde o coeficiente de normalização é dado por:

$$C(d) = \frac{1}{h^d} \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{se } d = 1 \\ \frac{10}{7\pi}, & \text{se } d = 2 \\ \frac{1}{\pi}, & \text{se } d = 3 \end{cases} \quad (4.32)$$

Derivando a EQ. 4.31 em relação a  $R$ :

$$\frac{\partial W(R)}{\partial R} = C(d) \begin{cases} -3R + \frac{9}{4}R^2, \text{ se } 0 \leq R \leq 1 \\ \frac{3}{4}(2-R)^2, \text{ se } 1 \leq R < 2 \\ 0, \text{ se } R \geq 2 \end{cases} \quad (4.33)$$

Da definição da função, verifica-se que o fator de escala da função no domínio de suporte é  $k = 2$ . A FIG. 4.2 apresenta a representação gráfica da função e de sua derivada.



**FIG. 4.2** Função “spline” cúbica e primeira derivada

#### 4.2.3 QUADRÁTICA

A função quadrática definida na EQ. 4.34 foi introduzida por Johnson et al. em 1996 para simular impactos a altas velocidades.

$$W(R) = C(d) \begin{cases} \frac{1}{4}R^2 - R + 1, R < 2 \\ 0, R \geq 2 \end{cases} \quad (4.34)$$

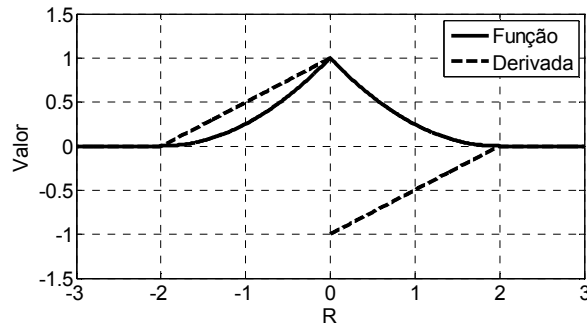
Onde o coeficiente de normalização é dado por:

$$C(d) = \frac{1}{h^d} \begin{cases} \frac{3}{4}, \text{ se } d = 1 \\ \frac{3}{2\pi}, \text{ se } d = 2 \\ \frac{5}{\pi}, \text{ se } d = 3 \end{cases} \quad (4.35)$$

A derivada da função é dada por:

$$W(R) = C(d) \begin{cases} \frac{1}{2}R - 1, R < 2 \\ 0, R \geq 2 \end{cases} \quad (4.36)$$

A função apresenta o fator de escala  $k = 2$  e o gráfico é mostrado na FIG. 4.3. Verifica-se que a da derivada é uma função linear, que atinge valor máximo em  $R = 0$  e decresce até o limite do domínio de suporte. Como os problemas físicos geralmente são governados por equações diferenciais, esta função resulta em um maior peso nas partículas mais próximas ao ponto de estudo se tornando uma boa opção para equações diferenciais de 1º ordem.



**FIG. 4.3 Função quadrática e primeira derivada**

### 4.3 APROXIMAÇÃO PARA PARTÍCULAS

Uma vez definida as bases matemáticas, pode-se estender o conceito para problemas com distribuição por elementos ou partículas.

O comprimento suavizante pode variar com o tempo e o espaço, desta forma a interação entre duas partículas será calculada considerando um valor médio deste parâmetro. Esta consideração garante que duas partículas exercerão ação uma sobre a outra com o mesmo valor da função de suavização. A escolha de uma função interpolativa par resulta em sua derivada ímpar, o que garante que a 3ª Lei de Newton não seja violada na equação de conservação de momentum. As duas expressões abaixo serão empregadas em todo o restante do trabalho, e representam a interação entre duas partículas quaisquer  $i$  e  $j$ , com o subscrito utilizado para indicar a partícula:

$$h_{ij} = \frac{h_i + h_j}{2} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \quad (4.38)$$

A função de suavização para a interação destas duas partículas será então representada por:

$$W_{ij} = W(\mathbf{x}_{ij}, h_{ij}) \quad (4.39)$$

O conceito de representação integral é aplicado a todo domínio de suporte para se aproximar o valor da função. Porém a função quando observada discretamente só apresentará valores não nulos nos pontos onde existam partículas. Substituindo o volume infinitesimal  $d\mathbf{x}'$  na EQ. 4.6 pelo volume finito  $\Delta V_j$  de uma partícula  $j$  das  $N$  que estão no domínio suporte de  $i$ , pode-se aproximar o valor da função em  $i$ :

$$\langle f(\mathbf{x}'_i) \rangle = \sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}'_j) W_{ij} \Delta V_j \quad (4.40)$$

Retirando o símbolo que indica aproximação e escrevendo o volume em função da massa específica e da massa de cada partícula  $j$ :

$$f(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) W_{ij} \quad (4.41)$$

O procedimento pode ser estendido para as derivadas das funções:

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} F(\mathbf{x}_j) \nabla W_{ij} \quad (4.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{F}(\mathbf{x}_j) \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.43)$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{F}(\mathbf{x}_j) \times \nabla W_{ij} \quad (4.44)$$

A utilização da notação tensorial é conveniente para a aproximação das equações da fluidodinâmica, uma vez que as expressões para cálculo de momentum e energia são mais simples nesta notação.

Igualmente podem ser representados os tensores taxa de deformação e taxa de rotação, respectivamente EQs. 3.108 e 3.110.

$$\dot{\hat{\epsilon}}_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \left( u_j^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\beta} + u_j^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (4.45)$$

$$\dot{\hat{\omega}}_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \left( u_j^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\beta} - u_j^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (4.46)$$

Utilizando o artifício matemático que o divergente da função vetorial constante igual a  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [1 \ 1 \ 1]^T$  vale 0 (zero):

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} = 0 \quad (4.47)$$

Logo:

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} = u_i^\beta \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} u_i^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} = 0 \quad (4.48)$$

As EQs. 4.45 e 4.46 podem ser reescritas como:

$$\dot{\varepsilon}_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \left( u_{ji}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\beta} + u_{ji}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (4.49)$$

$$\dot{\omega}_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \left( u_{ji}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\beta} - u_{ji}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (4.50)$$

Onde:

$$u_{ji}^\alpha = u_j^\alpha - u_i^\alpha \quad (4.51)$$

#### 4.4 VISCOSIDADE ARTIFICIAL

O termo viscosidade artificial foi introduzido para minimizar as oscilações numéricas que surgem nas simulações de choque. Estas oscilações não são físicas e surgem da hipótese da frente de onda ser considerada uma descontinuidade, o que provoca elevados gradientes de pressão tornando impossível a solução (Lee, 2006). Para se contornar este problema foi introduzido o termo viscosidade artificial na componente de pressão, difundindo estes valores para as partículas próximas. O modelo utilizado foi o proposto Monaghan e Pongracic em 1985:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{b\phi_{ij}^2 - ac_{ij}\phi_{ij}}{\rho_{ij}}, & \text{quando } \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 \\ 0 & , \text{ quando } \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

Onde:

$$\phi_{ij} = \frac{h_{ij} \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + (\zeta h_{ij})^2}, \quad (4.53)$$

$a$  e  $b$  são as constantes da viscosidade artificial, o termo  $\zeta$  foi introduzido no denominador para evitar singularidades quando a distância relativa entre as partículas  $i$  e  $j$  for pequena. Os termos  $c_{ij}$  e  $\rho_{ij}$  representam a velocidade média do som e a massa específica média entre as partículas  $i$  e  $j$ :

$$c_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2} \quad (4.54)$$

$$\rho_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2} \quad (4.55)$$

Da forma como foi proposta, a viscosidade só atuará quando as partículas estiverem se aproximando. Em 1983 Monaghan e Gingold em trabalho tratando de simulações que envolviam choque, demonstraram que o termo de viscosidade artificial acrescenta nas equações de movimento um termo artificial de compressibilidade que atenua oscilações após o choque e um termo da viscosidade artificial do tipo von Neumann-Richtmyer requerida em colisões com elevado número de Mach, para se evitar penetração de partículas (Brookshaw, 2003). A viscosidade artificial de von Neumann-Richtmyer é pioneira na estabilização numérica de códigos hidrodinâmicos (ver seção 1.2, página 23).

## 4.5 APROXIMAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE GOVERNO

Uma vez definida as aproximações para um sistema de partículas, as equações de governo desenvolvidas na subseção 3.1 (página 38) podem ser aproximadas pela formulação do SPH. Existem várias possibilidades de se escrever estas equações tomando por base este método numérico. Serão apresentadas nas próximas subseções as mais comuns encontradas na literatura.

### 4.5.1 MASSA ESPECÍFICA

A massa específica é o principal determinante para a configuração inicial do problema, pois está diretamente relacionada com a distribuição de massa e o comprimento suavizante de cada partícula. Com a evolução no tempo, a massa específica sofrerá alteração determinando

como o comprimento característico será alterado. Em geral, as EDE são escritas em função desta aproximação o que torna importante este cálculo.

Considerando a massa específica como uma função da posição para um dado tempo, a EQ. 4.41 pode ser empregada para  $\rho = f(\mathbf{x})$ , logo:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j W_{ij} \quad (4.56)$$

Simplificando:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (4.57)$$

A expressão acima é conhecida como aproximação da massa específica por somatório e corresponde a principal aproximação do SPH. Uma vez que a EQ. 4.57 representa uma aproximação, a ela está associada um erro que varia com a aproximação da função de interpolação. A equação acima pode ser normalizada pela aproximação da função unitária, com a finalidade de que estes erros de arredondamento sejam minimizados:

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^N m_j W_{ij}}{\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij}} \quad (4.58)$$

A aproximação por somatório representa uma interpolação da massa específica ao longo do domínio de suporte. Para a interface entre materiais diferentes, principalmente quando estão envolvidas espessuras relativamente finas ou diferenças muito elevadas de massa específica, esta suavização pode resultar em falta de precisão devido à diluição destes valores; problemas também são verificados nas condições de contorno, pois fora do domínio computacional não há partículas reais o que acarreta em queda na massa específica calculada nestas regiões. Como alternativa a derivada temporal da massa específica pode ser obtida aproximando a EQ. 3.10 pelo divergente do campo de velocidade:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} u_j^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (4.59)$$

Da EQ. 4.47:

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \rho_i u_i^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} = 0 \quad (4.60)$$

Somando a EQ. 4.59 e utilizando o artifício da EQ. 4.60:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} u_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (4.61)$$

Onde:

$$u_{ij}^\alpha = (u_i^\alpha - u_j^\alpha) \quad (4.62)$$

Uma alternativa é obtida da seguinte identidade do operador gradiente:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = -(\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \rho) \quad (4.63)$$

A equação acima escrita utilizando o SPH.

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = - \left( \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j u_j^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\alpha} - u_i^\alpha \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (4.64)$$

Após as simplificações:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j u_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\alpha} \quad (4.65)$$

#### 4.5.2 CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM

A equação de conservação de momentum desenvolvida na subseção 3.1.2 (página 41) pode ser aproximada diretamente pelas equações do SPH. A EQ. 3.22 para uma partícula  $i$  é escrita na equação abaixo:

$$\frac{Du_i^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \sigma_i^{\alpha\beta}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.66)$$

Aplicando a formulação para aproximar as derivadas do segundo membro da equação acima:

$$\frac{Du_i^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \sigma_j^{\alpha\beta} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.67)$$

Utilizando o mesmo artifício da EQ. 4.47:

$$\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i} \left( \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \right) = 0 \quad (4.68)$$

Somando as EQs. 4.66 e 4.68:



$$\frac{Du_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \frac{(\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta})}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.69)$$

Uma segunda expressão é obtida pela identidade:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \right) + \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x^\beta} \quad (4.70)$$

Aplicando as aproximações para os gradientes:

$$\frac{Du_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.71)$$

Escrevendo como apenas um somatório:

$$\frac{Du_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.72)$$

Acrescentado o termo de viscosidade artificial calculado para os pares de interação das partículas que estão no domínio de suporte, as EQs. 4.69 e 4.72 são reescritas para:

$$\frac{Du_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.73)$$

$$\frac{Du_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.74)$$

### 4.5.3 CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

A equação de conservação de energia, EQ. 3.34, escrita para uma partícula  $i$  assume a forma:

$$\frac{De_i}{Dt} = \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i} \frac{\partial u_i^\alpha}{\partial x_i^\beta} \quad (4.75)$$

Aproximando o segundo membro da equação acima:

$$\frac{De_i}{Dt} = \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} u_j^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.76)$$

Reescrevendo:

$$\frac{De_i}{Dt} = \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} u_j^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} - \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i} u_i^\alpha \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.77)$$

Logo:

$$\frac{De_i}{Dt} = \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} u_{ji}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.78)$$

Embora a expressão acima apresente uma forma de se representar à equação de conservação de energia, é comum realizar a separação do tensor nas componentes hidrostática e desviadora. Com esta divisão, o termo de viscosidade artificial é mais facilmente inserido na equação, uma vez que atua da mesma forma que a pressão hidrostática. Assim:

$$\frac{De_i}{Dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) u_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + \frac{1}{\rho_i} \tau_i^{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_i^{\alpha\beta} \quad (4.79)$$

$$\frac{De_i}{Dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) u_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + \frac{1}{\rho_i} \tau_i^{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_i^{\alpha\beta} \quad (4.80)$$

#### 4.6 PASSO DE TEMPO

Um dos principais integradores utilizados nos códigos SPH é o “*Leap Frog*” (LF), embora outros integradores possam ser empregados, como o predito-corretor ou Runge-Kutta. O LF é um dos mais utilizados devido a pouca necessidade de armazenamento de memória e a necessidade de apenas uma estimativa para avançar um passo de tempo, outros integradores necessitam de mais estimativas para se avançar um passo de tempo retardando o processamento.

O LF é condicionalmente estável, devendo atender as condições de estabilidade de Courant-Friedrichs-Levis com o passo de tempo ( $\Delta t$ ) proporcional ao comprimento característico da partícula ( $h_i$ ) e dado pela expressão (Liu e Liu, 2007):

$$\Delta t = \min \left[ \frac{\xi h_i}{h_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i + c_i + 1, 2(ac_i + b|\nabla \cdot \mathbf{u}_i|)} \right] \quad (4.81)$$

Onde  $a$  e  $b$  são as constantes de viscosidade artificial,  $c_i$  é a velocidade do som,  $\bar{u}$  é a velocidade da partícula e  $\xi$  é o número de Courant, situado em torno de 0,3.

## 5 DESENVOLVIMENTO

O objetivo deste capítulo é apresentar a abordagem empregada, as hipóteses simplificadoras adotadas e a estrutura computacional implementada nas simulações envolvendo cargas ocas.

### 5.1 SIMULAÇÕES NO PLANO

As cargas ocas são definidas como cilindros de explosivo com cavidade, podendo apresentar uma fina camada de revestimento sobre a superfície da cavidade (Walters e Zukas, 1989). Como o objetivo de se estimar numericamente o efeito da detonação do explosivo sobre o material do revestimento, foi realizado uma abordagem plana com um sistema de coordenadas cartesianas, aproximando as cargas ocas por cargas lineares, como as utilizadas para corte.

O eixo  $x$  foi posicionado ao longo do eixo de simetria da carga e define o lugar geométrico de formação do jato. O eixo  $y$  define o afastamento das partículas em relação a este eixo. Com o objetivo de se reduzir ainda mais o número de elementos utilizados nas simulações, as partículas são dispostas apenas ao longo dos valores positivos do eixo  $y$ , partículas reais, e a carga é espelhada em relação ao eixo de simetria.

Para efeitos de custo computacional, apenas uma porção das partículas espelhadas, denominadas partículas virtuais ou fantasmas (Liu e Liu, 2007), influencia no movimento das partículas reais. Esta abordagem pode ser efetuada devido à propriedade de domínio de suporte compacto utilizada nas simulações, a região que define as partículas virtuais necessária para a correta simulação é definida pelo fator de escala da função de interpolação ( $W$ ) e o comprimento característico da partícula ( $h$ ).

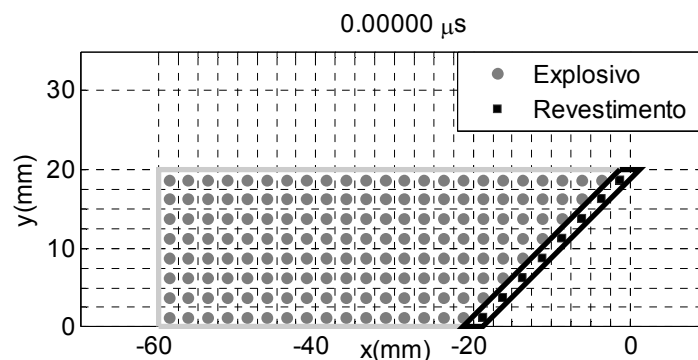
Como os pares de interações são computados com um comprimento característico médio ( $h_{ij}$ ), o conjunto das partículas virtuais utilizadas para cada passo de tempo pode ser obtido pelo espelhamento das partículas reais que apresenta a componente  $y$  menor do que o fator de escala da função multiplicado pelo maior comprimento característico da simulação. Esta condição é suficiente para se garantir que todas as partículas virtuais que influenciem as reais

estejam computadas. Uma partícula virtual é a cópia de uma real porém com a componente de posição e velocidade verticais com o sinal alternado; logo uma partícula virtual que apresente componente vertical de velocidade positiva é cópia de uma com componente negativa e indica que as partículas se aproximam do eixo da carga.

Uma descrição mais precisa pode ser obtida realizando simulações tridimensionais, entretanto, o custo computacional associado a estes tipos de simulações é consideravelmente superior. Este aumento no custo está associado ao significativo aumento do número de partículas empregadas. Como exemplo, um cilindro de 20 mm de comprimento e 10 mm de diâmetro seria representado por 101.120 ou 1.600 partículas, respectivamente no caso tridimensional e no plano, sendo representado por elementos de 0,25 mm. Tais simulações são necessárias para dispositivos sem simetria axial, sendo uma das sugestões para trabalhos futuros.

## 5.2 DISPOSIÇÃO INICIAL DE PARTÍCULAS

Como aproximação para a distribuição inicial das partículas, arbitrou-se o comprimento do lado de uma malha cartesiana quadrada que comparada com a carga, dispõem as partículas nos centros das células que estão no interior do perfil. Uma carga de 60 mm de comprimento e 40 mm de diâmetro seria representada pelas partículas conforme apresentado na FIG. 5.1, para um tamanho de malha arbitrado de 2,5 mm.



**FIG. 5.1 Configuração inicial de partículas**

A malha é idealizada apenas para a geração inicial de partículas, sendo abandonada após este ponto.

Uma vez definida a posição das partículas, as demais propriedades dependem dos dados tabelados dos materiais que compõem a carga. A velocidade e a pressão das partículas são definidas como 0 (zero); a energia interna é ajustada para 0 (zero) nos materiais inertes e para a energia de detonação por unidade de massa nos explosivos; a massa específica é a tabelada para cada substância; a massa atribuída a cada partícula é dada pela área da célula quadrada vezes a massa específica; a velocidade do som é aproximada pela constante  $c_0$  da EDE do material para materiais inertes e na velocidade de detonação ( $u_D$ ) para explosivos; o comprimento característico atribuído é proporcional ao comprimento do lado da malha arbitrada; o tipo de material é definido para relacionar a partícula com a EDE apropriada; e defini-se o material em questão.

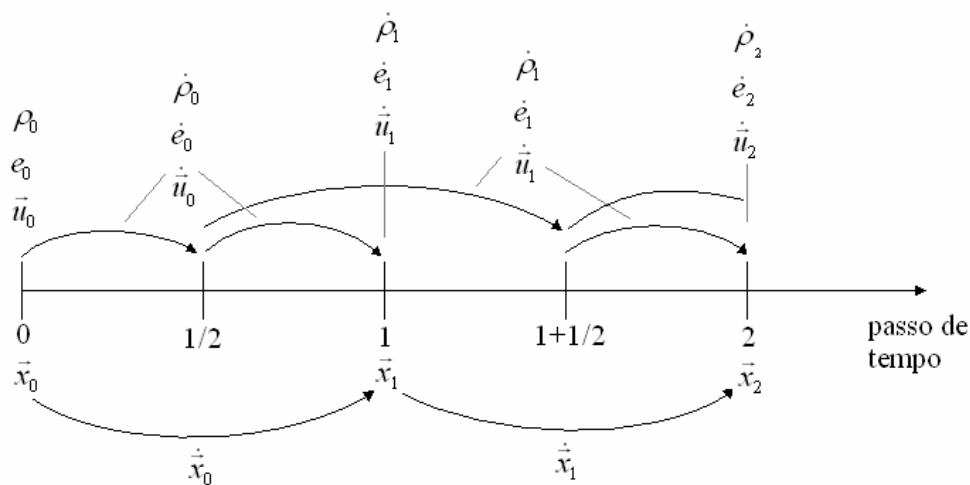
Desta forma, obtêm-se as informações iniciais para as partículas admitindo como hipótese simplificadora que a carga oca seja representada por uma carga linear hipotética de 1,0 m de comprimento sem deslocamento perpendicular ao plano definido da FIG. 5.1. O tipo de material é importante para que as propriedades de cada material sejam corretamente relacionadas com os seus correspondentes.

A aproximação para a velocidade do som de substâncias explosivas pode ser considerada grosseira, consideravelmente superior a real, porém o efeito só é observado enquanto o explosivo for considerado não detonado, onde a pressão será admitida como sendo 0 (zero). De acordo com o exposto no equacionamento do capítulo anterior, o resultado será um maior efeito de viscosidade artificial, EQ. 4.52, e um passo de tempo menor, EQ. 4.81, sendo assim, trata-se de uma aproximação conservativa, não desestabilizando o processamento e sem influência significativa no movimento das partículas. Após a detonação, a EDE empregada deve ser a JWL, pois relaciona as variáveis de estado para os produtos da detonação. A velocidade do som é obtida por derivação numérica, EQ. 3.59. Esta equação também é empregada para calcular a velocidade do som de materiais inertes pela derivação da EDE correspondente.

### 5.3 INTEGRADOR

O integrador “Leap Frog” (LF) é um dos integradores mais utilizados no SPH devido ao menor custo computacional. O processo de integração do LF é caracterizado em estimar massa específica, energia e velocidade na metade dos passos de tempo enquanto posição é

avaliada nos passos de tempo (Liu e Liu, 2007). A FIG. 5.2 apresenta esquematicamente o esquema de integração para os primeiros passos de tempo. No instante inicial “0”, com os valores de massa específica, energia interna, velocidade e posição, determinam-se as derivadas temporais destas grandezas, avança-se massa específica, energia e velocidade em meio passo de tempo e a posição em um passo de tempo. No próximo passo de tempo, armazena-se as variáveis avançadas em meio passo e tempo e avança-se mais meio passo de tempo com os mesmos valores das derivadas já calculadas, alcançando assim o passo “1”; determinam-se as novas derivadas temporais, avançam-se massa específica, a energia e velocidade em um passo tempo a partir dos valores armazenados e em um passo de tempo para a posição, a repetição do processo deve ser realizada até o ponto desejado.



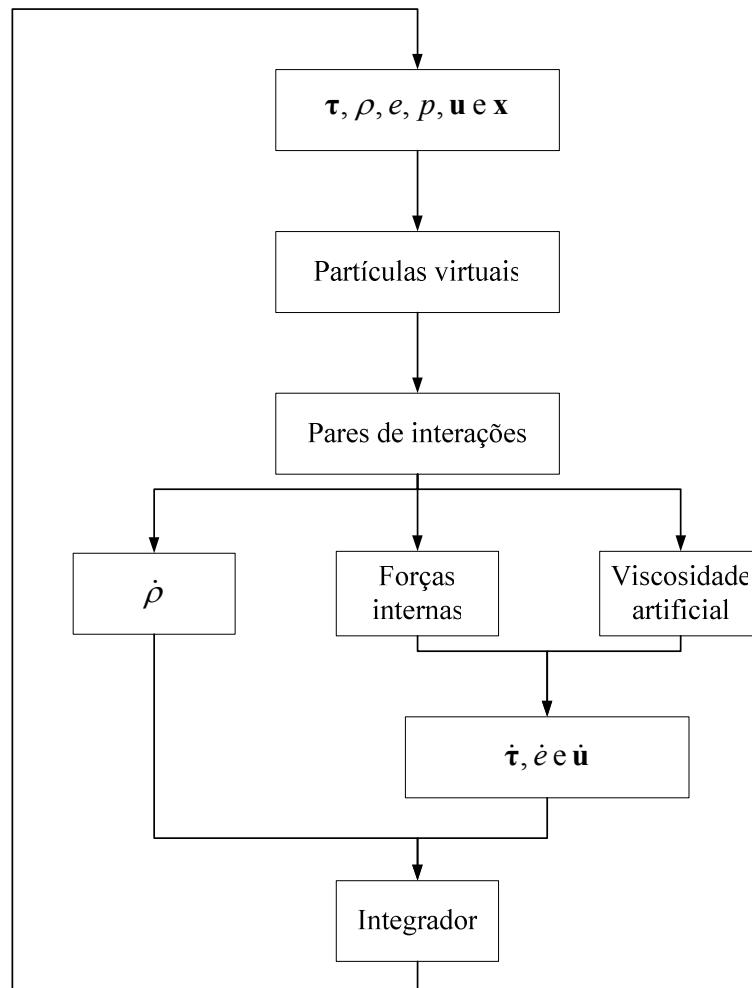
**FIG. 5.2 Esquema de integração**

#### 5.4 PROCEDIMENTO DE CÁLCULO

Uma vez definida a configuração inicial do sistema, a carga está em condições de ser simulada. As partículas iniciarão o movimento quando o gradiente de pressões não for mais nulo, esta condição será obtida com a detonação do explosivo. A massa de explosivo detonada depende da forma de iniciação escolhida, que pode ser plana ou pontual; a detonação plana pode ser idealizada por planos que representam as frentes da onda de detonação, alternado o explosivo de não-detonado para detonado; a detonação pontual é representada por superfícies circulares com centro no ponto de detonação. Estas superfícies percorrem o explosivo com a velocidade de detonação específica da substância explosiva, e como o código construído é explícito e marchante no tempo é possível determinar a posição das frentes de detonação.

Após o explosivo ser considerado detonado, o tipo de material é definitivamente alterado para um valor que direcionará para a EDE de JWL, caracterizando assim a mudança de fase. A energia interna inicial foi definida como a de detonação do explosivo por unidade de massa e a simulação transcorrerá como se esta energia fosse liberada na frente de onda proveniente da detonação.

O código construído utilizou como referência o código fornecido no livro de Liu e Liu, 2007. A estrutura de processamento segue o fluxograma apresentado na FIG. 5.3.



**FIG. 5.3 Fluxograma**

Dada uma configuração das partículas, podem-se estimar as propriedades após um ciclo.

1) A primeira etapa é a determinação das partículas virtuais utilizadas no processamento, caracterizando a região do espelhamento necessária à simulação do fenômeno da carga oca.

2) De posse de todas as partículas, reais e virtuais, defini-se uma lista com os pares de partículas em interação, não fazendo distinção entre reais ou virtuais, determinando, assim, quantas partículas influenciarão no cálculo de um determinado elemento.

3) O próximo passo é caracterizado pelas equações de conservação:

a) da conservação de massa determina-se a derivada total da massa específica, que pode ser efetuado pela EQs. 4.59, 4.61 ou 4.65;

b) da conservação de momentum determina-se a derivada do vetor velocidade, EQs. 4.73 ou 4.74;

c) da conservação da energia obtêm-se a derivada temporal da energia interna, EQs. 4.79 ou 4.80;

d) a derivada do tensor desviador é obtida pela EQ. 3.109, utilizando o tensor taxa de deformação, EQ. 4.45, e o tensor taxa de rotação, EQ. 4.46;

e) a viscosidade artificial deve ser incluída nas equações de conservação de momentum e energia, EQ. 4.52.

4) O último passo do cálculo do ciclo é a integração das derivadas obtidas, estimando os valores após este passo no tempo. Após a integração do desviador de tensões deve-se realizar a verificação pelo critério de escoamento adotado, (ver seção 3.7.2, página 61), e caso o material esteja no regime plástico a EQ. 3.122 deve ser empregada para que o tensor desviador continue na superfície de escoamento de Von Misses.

No decorrer dos cálculos, calcula-se o divergente do campo de velocidades e para se utilizado na determinação do novo passo de tempo, EQ. 4.81, que dará continuidade ao processamento para mais um avanço no tempo.

Para o cálculo dos valores de pressão, para materiais inertes definido pela EDE de Mie-Grüneisen (seção 3.6.3, página 54), foi utilizada a expressão apresentada no trabalho de Libersky et al. (1993):

$$p(\rho, e) = \left(1 - \frac{1}{2} \gamma_0 \eta_1\right) p_H(\rho) + \gamma_0 \rho e \quad (5.1)$$

Onde:

$$\eta_1 = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \quad (5.2)$$

A pressão ao longo da Hugoniot é dada por:

$$p_H = \begin{cases} A_0 \eta_1 + B_0 \eta_1^2 + C_0 \eta_1^3, \eta_1 \geq 0 \\ A_0 \eta_1, \eta_1 < 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Os parâmetros  $A_0$ ,  $B_0$  e  $C_0$  são definidos por:



$$\begin{aligned}
A_0 &= \rho_0 c_0^2 \\
B_0 &= A_0 [1 + 2(s_1 - 1)] \\
C_0 &= A_0 [2(s_1 - 1) + 3(s_1 - 1)^2]
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Onde  $c_0$  e  $s_1$  são os coeficientes da EDE do material (seção 3.6.1, página 50).

A fim de melhor representar as partículas, o comprimento característico pode variar com o tempo e o espaço. Este comprimento pode ser idealizado como o raio de uma circunferência que acompanha a variação de volume da partícula. A expressão abaixo foi introduzida no código, e atualiza o comprimento após o ciclo.

$$h = h_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \tag{5.5}$$

A expansão sem fronteiras do explosivo detonado provoca uma redução considerável da massa específica, o que faz com que esta se aproxime de 0 (zero) e aumente consideravelmente o comprimento característico. Este aumento resulta em mais pares de interações para estas partículas, e como a pressão obtida da EDE apresenta valores baixo resulta em um aumento do custo computacional com pouca influência na aproximação. Um outro problema é que o cálculo da velocidade do som apresenta valores próximos de 0 (zero), podendo resultar em uma divisão por 0 (zero) na expressão de cálculo do passo de tempo, EQ. 4.81. Para evitar que estes problemas numéricos insiram características não físicas nas simulações, foi imposto um valor mínimo para a massa específica e um máximo para o comprimento característico, apresentados na tabela TAB. 5.1.

O código foi implementado em linguagem Fortran 90. Após a geração das partículas, utilizando as constantes dos materiais envolvidos e os parâmetros de configuração do SPH escolhidos, inicia-se processo iterativo de cálculo até que a simulação atinja o tempo definido pelo usuário. Durante os cálculos, as informações de posição, velocidade, massa específica, pressão, energia interna, velocidade do som, desviador de tensões, comprimento característico e o identificador da EDE que deve ser empregada para cada partícula são salvas em arquivo de extensão *txt* no formato ASCII em intervalos de tempo pré-definidos, por exemplo: 1,0  $\mu$ s ou 2,5  $\mu$ s.

O pós-processamento apresentado nos resultados foi realizado utilizando o MatLab, conhecendo a posição e as propriedades físicas das partículas, construíram-se as curvas de solução utilizando uma interpolação entre estes pontos. Estas curvas podem representar

velocidade, massa específica, pressão, energia interna, velocidade do som, desviador de tensões e comprimento característico em qualquer instante de tempo salvo.

O computador utilizado foi notebook CCE modelo TCV-D5, processador Intel Celeron M530 com 1,73 GHz e 512 MB de memória RAM. O tempo total de execução do código para as simulações das cargas da seção 6.1 (página 90) com 21.357 partículas foi de aproximadamente 84 minutos (média dos tempos entre criação e modificação do arquivo com informações de posição); e para as cargas da seção 6.2 (página 112) com 46.220 partículas o tempo foi de 158 minutos para 1 (um) ponto e 206 minutos para 2 (dois) pontos de iniciação, esta diferença se deve aos maiores gradientes de pressão envolvidos na detonação convergente resultado em passos de tempo menores. As simulações da seção 6.3 (página 127) apresentaram custo computacional diferentes, devido à alteração nos materiais envolvidos e a variação do número de partícula pela mudança na geometria da carga.

Com a finalidade de se obter um padrão, foram utilizados nas simulações apresentadas no Capítulo 6 os valores e equações da tabela abaixo:

**TAB. 5.1 Parâmetros utilizados nas simulações**

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor ou equação</b>
Equação de conservação de massa	EQ. 4.65
Equação de conservação de momentum	EQ. 4.74
Equação de conservação de energia	EQ. 4.80
Numero de Courant	0,4
Comprimento característico inicial ( $h$ )	2,0 vezes o comprimento do lado da malha cartesiana quadrada que deu origem a distribuição inicial de partículas
Menor valor de massa específica admitida	5 % da massa específica do explosivo utilizado
Maior valor do comprimento característico	2,0 vezes o comprimento característico inicial
Constantes da viscosidade artificial $a$ e $b$	1,0
Parâmetro da viscosidade artificial para evitar penetração $\zeta$	0,01

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo tem a finalidade de exibir os resultados obtidos nas simulações de carga oca obtidas nesta dissertação. As duas primeiras seções apresentam os resultados comparados com trabalhos publicados na literatura, para validação do código construído. A terceira seção apresenta uma série de simulações onde foram alterados o ângulo do cone, o explosivo utilizado e o material do revestimento, atingindo assim o objetivo do trabalho de simular o jato de carga oca para diferentes configurações.

### 6.1 CARGA OCA DE TNT

Com o objetivo de se avaliar o código construído, optou-se pela simulação de uma carga oca de TNT com revestimento de cobre. O explosivo possui 60,0 mm de comprimento, 40,0 mm de diâmetro e uma cavidade cônica com ângulo de 90°. O revestimento apresenta espessura de 3,5 mm. Esta carga foi simulada no trabalho publicado por Qiang et al. em 2008, apresentando o gráfico da velocidade da ponta do jato em função do tempo para três simulações: uma com iniciação plana e duas com iniciação pontual. Qiang et al. utilizou uma abordagem puramente hidrodinâmica onde os desviadores de tensão foram desprezados.

O trabalho foca em outra abordagem para o cálculo da derivada total da massa específica. Utilizando uma aproximação que foi chamada de método SPH para fases múltiplas. Utilizando a equação abaixo:

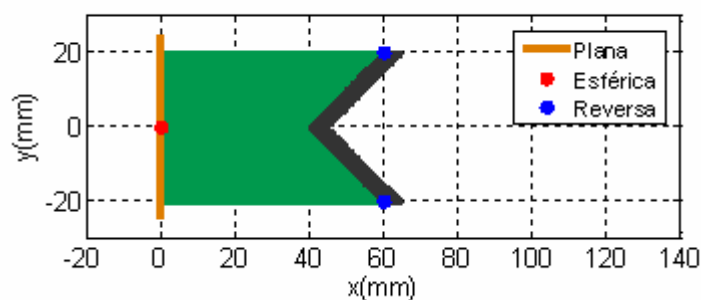
$$\frac{D\rho_i}{Dt} = m_i \sum_{j=1}^N u_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x^\alpha} \quad (6.1)$$

Esta aproximação foi proposta no trabalho de Ott e Schnetter (2008), e tem o objetivo de descrever o movimento de fluidos com grandes diferenças de massa específica, englobando assim materiais em diferentes fases e podendo ser estendido a diferentes materiais. As equações de momentum e energia utilizadas no trabalho de Qiang et al. foram, respectivamente, EQs. 4.73 e 4.79.

Os valores dos parâmetros apresentados na referência para o TNT e para o cobre são os da TAB. 3.1 (página 51) e da TAB. 3.2 (página 57), respectivamente. Exceto a massa específica do cobre que é apresentada como 8.530 kg/m<sup>3</sup>. Os valores dos parâmetros do cobre

utilizados nas simulações com o código desenvolvido neste trabalho são os apresentados na TAB. 3.1, acreditando tratar-se apenas de um erro de digitação no trabalho de referência. As simulações desta dissertação incluem o cálculo dos desviadores de tensão e o ajuste para a superfície de escoamento quando for o caso de deformação plástica. Os resultados do trabalho da literatura e da dissertação podem ser comparados a fim de se avaliar a inclusão dos efeitos desviadores na aproximação das soluções numéricas.

A configuração inicial da carga simulada é apresentada na FIG. 6.1. As três simulações diferem na iniciação do explosivo. Na primeira, uma onda de detonação plana inicia-se na extremidade esquerda da figura avançando contra o revestimento; na segunda, uma detonação pontual se origina na origem do sistema de referência, resultando assim em uma onda de circular atingindo o cobre; e na terceira, uma detonação pontual se inicia nos pontos de coordenadas  $x = 60,0$  mm e  $y = 20,0$  mm e  $x = 60,0$  mm e  $y = -20,0$  mm, no contato do revestimento com a região mais fina de explosivo, caracterizando uma detonação no sentido contrário ao normal que recebe a denominação de detonação reversa. As iniciações para cada simulação são mostradas na figura abaixo.



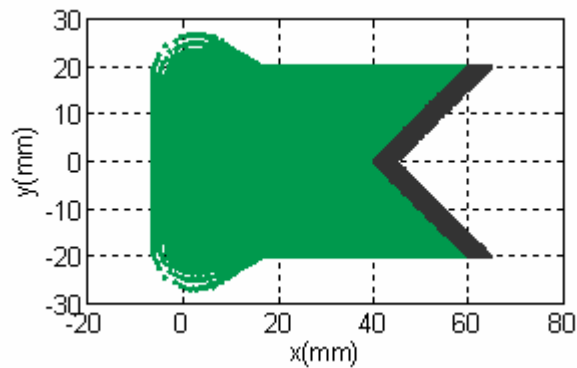
**FIG. 6.1 Configuração inicial da carga e formas de iniciação**

A diferença básica está na forma da onda ao interagir com o revestimento e na massa de explosivo detonada em função do tempo. O número de partículas utilizadas nas simulações foi de 19.509 para o explosivo e de 1.848 para o revestimento, totalizando 21.357. No trabalho de Qiang et al. a discretização foi realizada em toda a carga, totalizando 32.240 partículas para o explosivo e 3.220 para o revestimento, totalizando 35.460 partículas.

## 6.1.1 INICIAÇÃO PLANA

### 6.1.1.1 DETONAÇÃO DO EXPLOSIVO

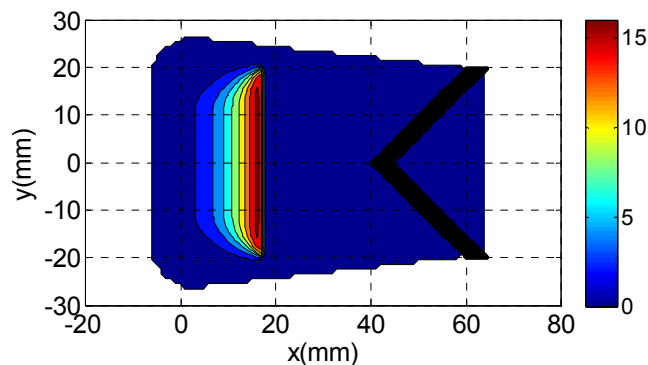
A superfície plana mostrada na FIG. 6.1 percorre o explosivo com a velocidade de detonação do TNT, 6,93 km/s. Após o tempo de 2,5  $\mu$ s, a frente da onda percorreu 17,325 mm no explosivo e marca a separação do explosivo detonado do não detonado. Na FIG. 6.2, verifica-se que as partículas do explosivo detonadas estão se deslocando da posição inicial. A frente de onda é marcada pela região onde as partículas estão iniciando o deslocamento, que é compatível com a calculada para este tempo.



**FIG. 6.2 Iniciação plana em  $t = 2,5 \mu$ s**

Devido à mudança de fase e à liberação de energia associada ao fenômeno da detonação, o valor de pressão sofre um considerável aumento provocando a compressão do explosivo não detonado na frente de onda, fornecendo assim a energia necessária para a continuidade da detonação.

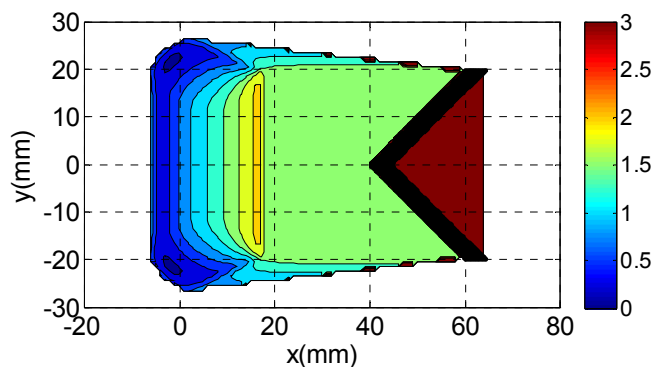
O contorno de pressão associado a este tempo é mostrado na FIG. 6.3. Verifica-se que a pressão assume o maior valor na frente de detonação. As partículas do explosivo foram retiradas da figura para uma melhor visualização e as do revestimento mantidas a título de referência.



**FIG. 6.3 Pressão (GPa) em  $t = 2,5 \mu\text{s}$**

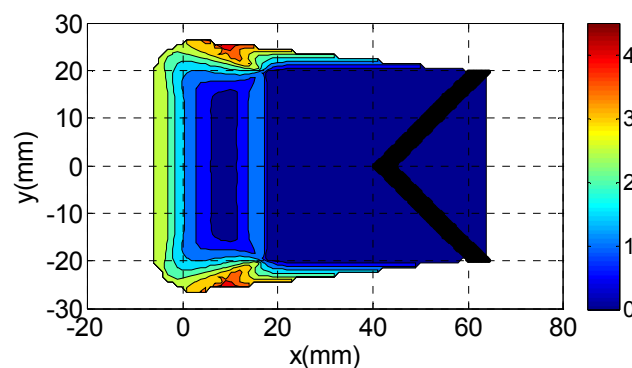
O valor experimental da pressão na frente de onda é de 21,0 GPa, no caso de regime permanente (ponto de Chapman-Jouguet). O valor máximo obtido na simulação neste passo foi de 17,429 GPa, na posição  $x = 16,5528 \text{ mm}$  e  $y = 0,1110 \text{ mm}$ . Esta redução se deve ao desenvolvimento da onda no tempo, e para instantes de tempo posteriores o explosivo apresentará uma maior compressão na zona de reação, se aproximando cada vez mais do previsto. Uma melhor aproximação de pressão pode ser obtida refinando a discretização do meio, aumentando o número de partículas e, por consequência, o custo computacional. Os elevados valores de pressão na frente de onda são responsáveis pela compressão do explosivo sólido, pela expansão dos produtos da detonação e o movimento de todo o sistema.

Os valores de pressão estão associados, principalmente, a compressão. O gráfico de massa específica é apresentado na FIG. 6.4. O maior valor de massa específica obtida no explosivo foi de  $2,0832 \text{ g/cm}^3$ . O contorno de massa específica está relacionado diretamente com o de pressão, sendo possível verificar a compressão na frente de detonação e a expansão dos produtos. Nos perfis de massa específica, a região compreendida entre as paredes internas do cone deve ser desconsiderada para fins de resultados. Devendo-se apenas apreciar os resultados na região de distribuição de partículas. A região desprezada é fruto de uma interpolação matemática entre as paredes opostas do cone em uma região isenta de material.

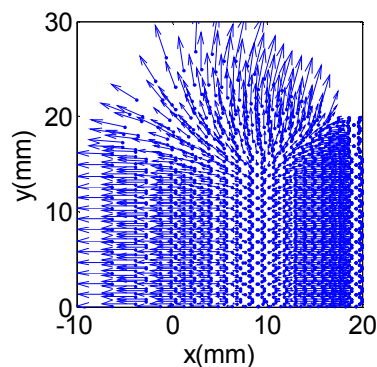


**FIG. 6.4 Massa específica ( $\text{g/cm}^3$ ) em  $t = 2,5 \mu\text{s}$**

A compressão é determinada pelo divergente do campo de velocidades, do modo como as partículas avançam umas sobre as outras. A FIG. 6.5 exibe o diagrama de velocidade neste tempo. Na frente de onda, os produtos da detonação apresentam velocidade que avançam contra o explosivo virgem, comprimindo-o; fora desta região, os valores de velocidade caracterizam a expansão dos produtos. A direção do vetor velocidade é mostrada na FIG. 6.6 nas proximidades da frente de onda. O maior valor de velocidade absoluta do explosivo foi de 4,7794 km/s na posição  $x = 6,2608$  mm e  $y = 26,4671$  mm, encontrado na região de expansão dos produtos. A componente vertical de valor 4,5620 km/s desta velocidade se deve a expansão em torno do eixo da simetria da carga e a componente horizontal de valor 1,4252 km/s se deve aos valores de pressão na zona de reação.

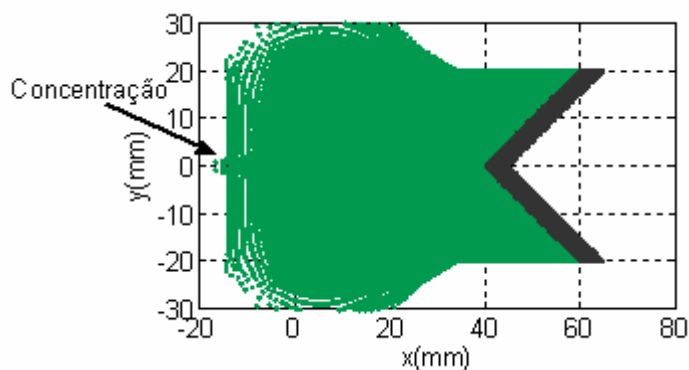


**FIG. 6.5 Velocidade (km/s) em  $t = 2,5 \mu\text{s}$**



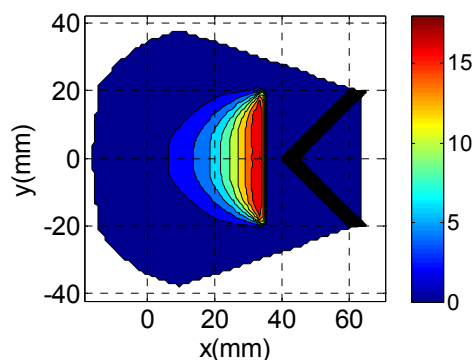
**FIG. 6.6 Vetor velocidade em  $t = 2,5 \mu\text{s}$**

A FIG. 6.7 apresenta a posição das partículas no tempo  $t = 5,0 \mu\text{s}$ , onde se observa que a onda de detonação percorreu o dobro da distância da situação anterior ( $t = 2,5 \mu\text{s}$ ). A frente de onda se encontra na posição 34,65 mm, como esperado. Verifica-se mais precisamente a expansão dos produtos em torno do eixo de simetria e, devido à concentração de efeitos, o deslocamento de uma pequena porção do explosivo na parte esquerda da figura abaixo, nas proximidades de  $y = 0,0$  mm.



**FIG. 6.7 Posição (mm) no tempo  $t = 5,0 \mu\text{s}$**

A curva de nível de pressões é mostrada na FIG. 6.8, onde níveis de pressão superiores ao da FIG. 6.3 são observados. O maior valor obtido neste tempo foi de 18,351 GPa, aproximando-se do valor experimental. O código computacional permite acompanhar e avaliar a mesma partícula que em  $t = 2,5 \mu\text{s}$  apresentava o maior valor de pressão ( $P = 17,429$  GPa). Neste instante,  $t = 5,0 \mu\text{s}$ , esta partícula possui um valor de pressão igual a 5,8334 GPa e a posição é de  $x = 18,2363$  mm e  $y = 0,1120$  mm, caracterizando uma queda de 11,5956 GPa. A massa específica desta partícula apresenta a redução de  $2,0832 \text{ g/cm}^3$  para  $1,4752 \text{ g/cm}^3$ . Comprova-se assim que a rápida expansão e a redução da massa específica associadas à explosão. A partícula sob investigação foi a de número 73 do explosivo



**FIG. 6.8 Pressão (GPa) no tempo  $t = 5,0 \mu\text{s}$**

Estes dados podem ser visualizados de uma maneira melhor na tabela abaixo, que apresenta informações sobre a frente de onda, a partícula acima citada (73) e valores significativos nos tempos  $t = 2,5 \mu\text{s}$  e  $t = 5,0 \mu\text{s}$ .

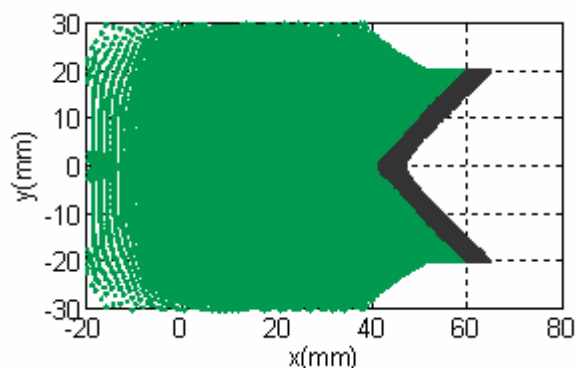


**TAB. 6.1 Propriedade no explosivo em diferentes instantes de tempo**

Propriedade	Tempo ( $\mu\text{s}$ )		
	2,5	5,0	
Distância percorrida pela detonação (mm)	17,325	34,650	
Massa específica da partícula 73 ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )	2,0832	1,4752	
Pressão da partícula 73 (GPa)	17,429	5,8334	
Velocidade da partícula 73 (m/s)	$u_x$	1.538,6	54,7243
	$u_y$	14,611	- 0,5620
	$ \mathbf{u} $	1.538,7	54,7272
Posição $x/y$ da partícula 73 (mm)	16, 5528	18,2363	
	0,1110	0,1120	
Maior massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )	2,0832	2,122	
Maior pressão (GPa)	17,429	18,351	
Maior velocidade (km/s)	$u_x$	1,4252	1,9118
	$u_y$	4,5620	4,7715
	$ \mathbf{u} $	4,7794	5,1403
Menor massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )	0,2003	0,0916	

### 6.1.1.2 INTERAÇÃO COM O REVESTIMENTO METÁLICO

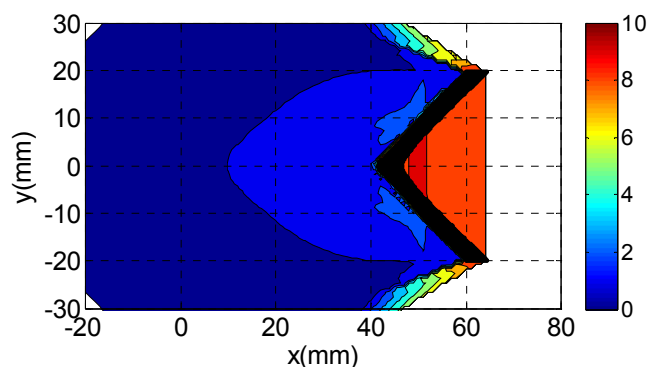
A onda de detonação precisa percorrer 40,0 mm no explosivo para atingir o revestimento metálico. Este fato se dará após 5,772  $\mu\text{s}$  de simulação. A próxima análise de tempo foi efetuada no tempo de 7,5  $\mu\text{s}$ , tendo a onda percorrido 11,975 mm da altura do cone, a fim de se avaliar a interação da detonação com o revestimento, caracterizando a interação explosivo-metal. A FIG. 6.9 apresenta a posição das partículas no tempo citado.



**FIG. 6.9 Posição (mm) no tempo  $t = 7,5 \mu s$**

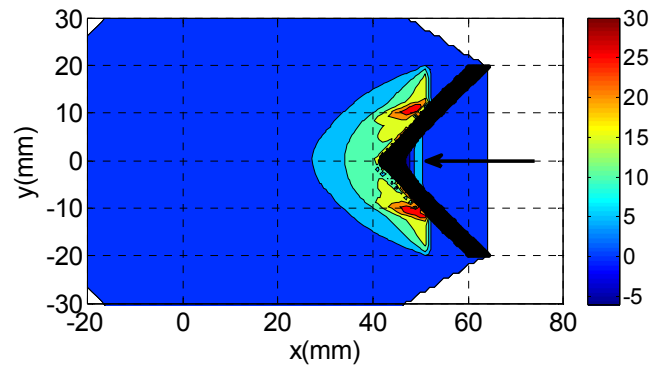
A inércia do revestimento tende a impedir a expansão dos produtos da detonação, provocando um aumento considerável da massa específica do explosivo na interface entre os materiais. O maior valor de massa específica do explosivo obtido neste passo de tempo foi de  $2,5990 \text{ g/cm}^3$  para uma partícula localizada nas proximidades da intersecção da frente de onda com o revestimento, na posição  $x = 50,8244 \text{ mm}$  e  $y = 11,5883 \text{ mm}$ . A pressão associada a esta partícula foi calculada em  $31,370 \text{ GPa}$ .

A FIG. 6.10 apresenta o contorno de massa específica. Pode-se verificar uma região de maior compressão no contato entre o revestimento e a frente de onda. O explosivo reagido já sofreu parte do processo de expansão e uma parte considerável das partículas atingiu o valor imposto numericamente,  $0,0815 \text{ g/cm}^3$ , isto é, 5 % da massa específica do explosivo utilizado (TNT:  $\rho_0 = 1,630 \text{ g/cm}^3$ , ver subseção 5.4, página 85).



**FIG. 6.10 Massa específica ( $\text{g/cm}^3$ ) no tempo  $t = 7,5 \mu s$**

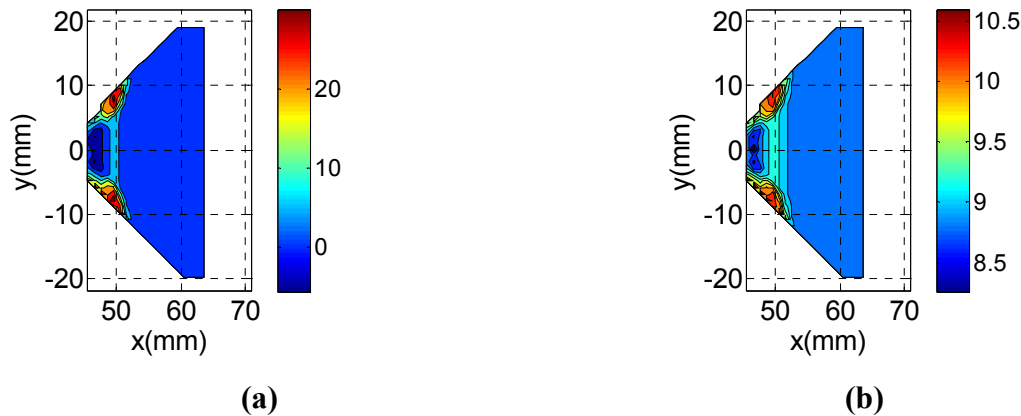
O aumento da massa específica provoca a elevação dos valores de pressão, cujo contorno é mostrado na FIG. 6.11 caracterizando a interação entre a onda de detonação e a sua transmissão para o revestimento. Observa-se a concentração de pressões elevadas na interface com o revestimento o que dará início ao efeito de convergência do material metálico, característica da carga oca, no eixo de simetria. Verifica-se igualmente a relação esperada entre as curvas de pressão e massa específica, FIG. 6.10.



**FIG. 6.11 Pressão (GPa) no tempo  $t = 7,5 \mu\text{s}$**

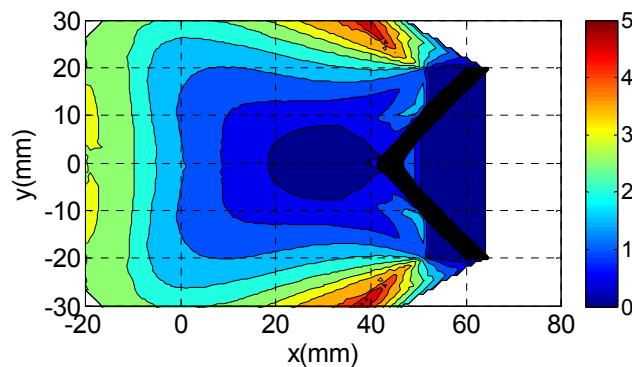
Na legenda da FIG. 6.11 observam-se valores de pressão negativos, verificado no revestimento marcando o início da formação do jato. Após a compressão inicial, o metal tende a se alongar devido aos elevados valores de pressão alcançados na simetria. A FIG. 6.12 exhibe os resultados de pressão (a) e massa específica (b) somente para o revestimento. A pressão de 35,403 GPa é o maior valor obtido no revestimento, e localiza-se na interação do explosivo com o revestimento, na posição  $x = 49,3018 \text{ mm}$  e  $y = 8,8412 \text{ mm}$ . O valor de pressão teórico na interface deve ser igual nos dois materiais para meios contínuos. A diferença encontrada é fruto da discretização por partículas e a distância entre elas, afetando a interpolação das soluções nos dois materiais.

Verifica-se a transmissão da onda de detonação para o material metálico na reta  $x = 50,063 \text{ mm}$ , média entre os maiores valores de pressão no explosivo e no revestimento, e localizado ligeiramente atrás da frente de onda como esperado (Davis, 1981). Isto caracteriza a transmissão da onda de detonação para o material inerte. A região de pressão negativa é verificada no eixo de simetria, e se deve a diminuição da massa específica igualmente observada nesta região. O maior valor de massa específica no revestimento, no ponto de pressão máxima, é de  $10,858 \text{ g/cm}^3$  e o de menor valor é de  $8,1688 \text{ g/cm}^3$  ao longo do jato em formação, na posição  $x = 46,5993 \text{ mm}$  e  $y = 0,0949 \text{ mm}$ , respectivamente 21,5901 % maior e 8,5240 % menor que o valor tabelar (cobre:  $\rho_0 = 8,930 \text{ g/cm}^3$ ).



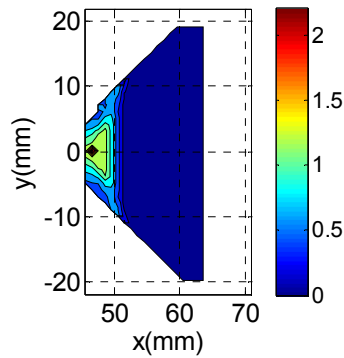
**FIG. 6.12 Revestimento em  $t = 7,5 \mu\text{s}$ : (a) pressão (GPa) e (b) massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )**

As curvas de velocidade são exibidas na FIG. 6.13 e marca nitidamente a expansão gasosa dos produtos. Nas proximidades do revestimento, a velocidade imposta pela dinâmica do fenômeno às partículas do explosivo e a resistência ao movimento provocada pelo revestimento, provocam a compressão na interface como acima mencionado. Verifica-se que o ápice do cone já se deslocou da posição inicial ( $x = 40,0 \text{ mm}$ ), evidenciando que já ocorreu a formação inicial do jato.



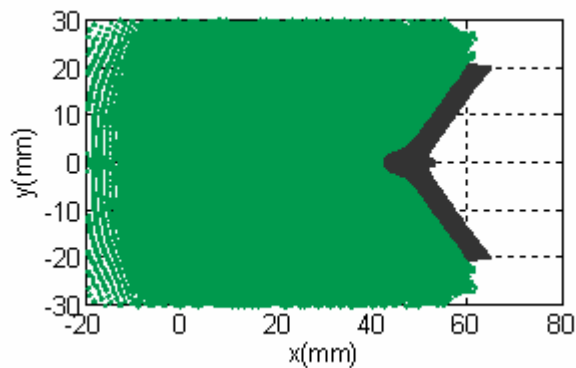
**FIG. 6.13 Velocidade ( $\text{km}/\text{s}$ ) no tempo  $t = 7,5 \mu\text{s}$**

A FIG. 6.14 apresenta o diagrama de velocidades apenas do metal acelerado. Como acima mencionado, já se verifica o início do jato. Os maiores valores de velocidade estão localizados ao longo do eixo de simetria da carga, como esperado. O maior valor encontrado neste passo de tempo é de  $2,539 \text{ km}/\text{s}$ , na posição  $x = 46,5993 \text{ mm}$  e  $y = 0,0949 \text{ mm}$ , evidenciando a proximidade do eixo de simetria. Embora a formação do jato já tenha se iniciado, a porção do revestimento com velocidade elevada ainda é pequena, aumentando com o transcorrer da simulação no tempo.



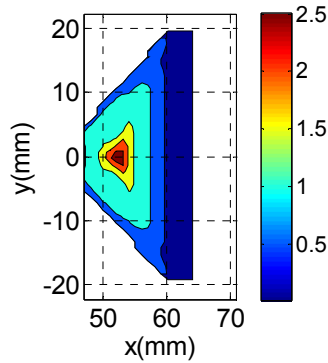
**FIG. 6.14 Velocidade (km/s) do revestimento no tempo  $t = 7,5 \mu\text{s}$**

A detonação se encerra no tempo de  $8,658 \mu\text{s}$ , quando a frente de onda atinge a base do cone. No tempo de  $10,0 \mu\text{s}$ , com a detonação encerrada, os produtos estão sujeitos apenas à expansão em torno do eixo de simetria e do colapso do revestimento metálico. A detonação impôs ao revestimento um estado de tensões que continuará a atuar até que os valores de pressão sejam diminuídos pela expansão do revestimento, conforme indicado na FIG. 6.15. Nesta figura, pode-se igualmente verificar que o revestimento começou o alongamento.



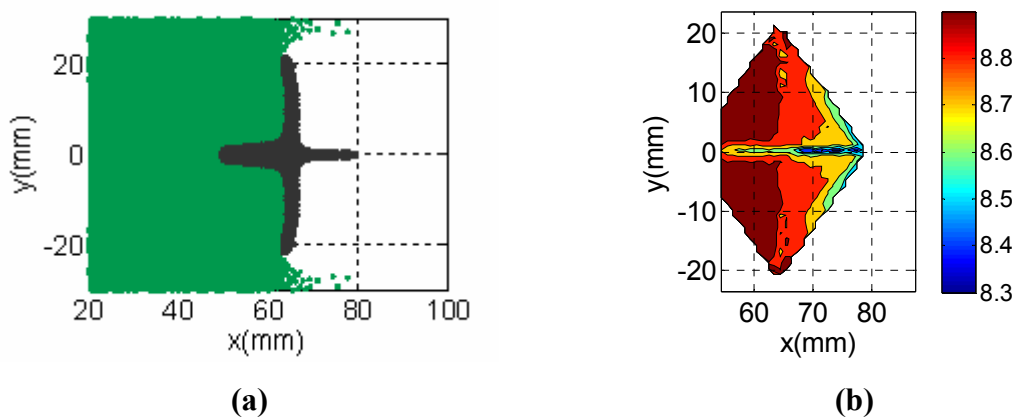
**FIG. 6.15 Partículas (mm) no tempo  $t = 10,0 \mu\text{s}$**

As curvas de velocidade do revestimento são mostradas na FIG. 6.16, onde se verifica o aumento da velocidade ao longo do eixo  $x$ . O aumento da região de maior velocidade, quando comparada com a FIG. 6.14, indica que mais partículas foram aceleradas no transcorrer destes  $2,5 \mu\text{s}$ , caracterizando que, embora a detonação já esteja encerrada, o material que compõem o jato continua sendo acelerado, já que se verificou o aumento na legenda de  $2,0 \text{ km/s}$  para  $2,5 \text{ km/s}$  nas curvas de velocidade. Embora as curvas sejam importantes para a comparação, elas não são capazes de exibir informações pontuais. O maior valor obtido pelo código foi de  $2,8547 \text{ km/s}$ , na posição  $x = 52,1686 \text{ mm}$  e  $y = 0,3268 \text{ mm}$ . Os maiores valores são observados, em algumas circunstâncias, atrás da ponta do jato, já que são responsáveis pela aceleração ou desaceleração desta porção do jato.



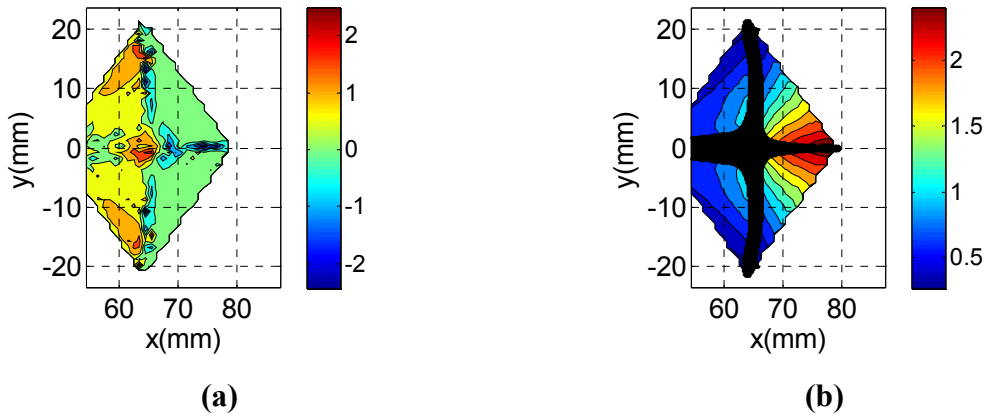
**FIG. 6.16 Velocidade (km/s) no tempo  $t = 10,0 \mu\text{s}$**

No tempo de  $20,0 \mu\text{s}$ , o gráfico da posição das partículas, FIG. 6.17 (a), exibe o jato de carga oca. O jato ainda está em processo de desenvolvimento, continuando o alongamento. Após a concentração de massa, e em consequência aumento de pressão, imposta pela configuração geométrica do problema em uma pequena região do colapso, o revestimento fica sujeito a acelerações que provocam o alongamento ocasionando o jato com massa específica menor que a do material inicial, conforme observado na FIG. 6.17 (b). Nesta figura, encontra-se, em  $x = 77,1829 \text{ mm}$  e  $y = 0,0758 \text{ mm}$ , o menor valor de massa específica igual a  $8,1333 \text{ g/cm}^3$ , que é  $8,9216 \%$  menor que o valor inicial.



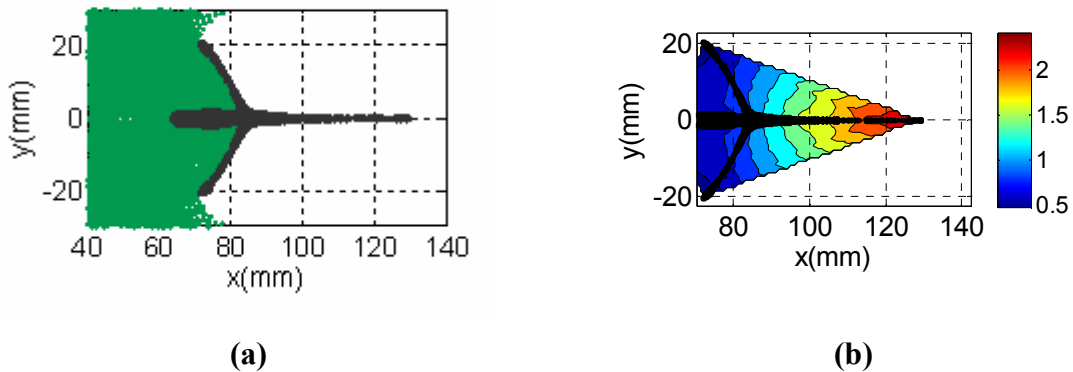
**FIG. 6.17 Tempo  $t = 20,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) massa específica ( $\text{g/cm}^3$ )**

Os valores de massa específica menores do que as condições tabelares são importantes para manter a coerência do jato, pois se gera um estado de tração entre as partículas mantendo a integridade do jato. A FIG. 6.18 (a) apresenta as curvas de pressões, enquanto que a FIG. 6.18 (b) exibe as de velocidades no jato. Verifica-se que a ponta do jato apresenta velocidades consideravelmente superiores as demais. Dos resultados da simulação, obtém-se o valor de  $2,5888 \text{ km/s}$  para a maior velocidade no jato, na posição  $x = 78,6360 \text{ mm}$  e  $y = 0,0264 \text{ mm}$ , enquanto que na escória obteve-se o um valor em torno de  $0,70 \text{ km/s}$ , o que caracteriza que o processo de alongamento não está encerrado.



**FIG. 6.18 Tempo  $t = 20,0 \mu\text{s}$ : (a) pressão (GPa) e (b) velocidade (km/s)**

No tempo de  $40,0 \mu\text{s}$ , observa-se que jato se encontra bem desenvolvido. O efeito de concentração de massa ao longo da simetria é observado bem como o alongamento. A FIG. 6.19 (a) apresenta as partículas neste passo de tempo e exibe o jato propriamente dito. A partícula do revestimento mais avançada, ocupa a posição  $x = 129,4030 \text{ mm}$  e  $y = 0,0930 \text{ mm}$ , caracterizando a posição da ponta do jato.



**FIG. 6.19 Jato no tempo  $t = 40,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) velocidade (km/s)**

A FIG. 6.19 (b) apresenta o diagrama de velocidades ao longo do jato, onde se pode verificar velocidades elevadas na ponta do jato decaindo para a escória. A maior velocidade calculada foi de  $2,4240 \text{ km/s}$ , na posição  $x = 128,6347 \text{ mm}$  e  $y = 0,0473 \text{ mm}$ , enquanto que para a partícula mais avançada obteve-se  $2,4234 \text{ km/s}$ .

A TAB. 6.7 sumariza os resultados encontrados para o revestimento nos tempo  $t = 7,5 \mu\text{s}$ ,  $t = 10,0 \mu\text{s}$ ,  $t = 20,0 \mu\text{s}$  e  $t = 40,0 \mu\text{s}$ :

**TAB. 6.2 Propriedade no cone em diferentes instantes de tempo**

Propriedade	Tempo ( $\mu$ s)			
	7,5	10,0	20,0	40,0
Distância percorrida pela detonação (mm)	51,975	60,0*	60,0*	60,0*
Altura do cone percorrido pela onda (mm)	11,975	40,0*	40,0*	40,0*
Maior massa específica ( $\text{g/cm}^3$ )	10,858	9,3976	9,1063	9,1619
x (mm)	49,3018	42,8759	64,0924	93,1410
y (mm)	8,8412	0,1024	16,1396	0,5425
Menor massa específica ( $\text{g/cm}^3$ )	8,1688	7,8975	8,1333	8,0021
x (mm)	46,5993	52,0034	77,1829	126,8172
y (mm)	0,0949	0,0169	0,0758	0,0628
Maior pressão (GPa)	35,403	8,9055	9,4342	6,0842
x (mm)	49,3018	57,0668	65,8537	93,1210
y (mm)	8,8412	13,3385	0,0146	0,5425
Menor pressão (GPa)	- 6,4954	- 8,2003	- 4,4845	- 4,2533
x (mm)	46,1001	61,1774	64,0943	96,2096
y (mm)	0,2916	18,0200	15,5461	0,4149
Maior velocidade (km/s)	2,5390	2,8547	2,5888	2,4220
x (mm)	46,5993	52,1686	78,6360	128,6347
y (mm)	0,0949	0,3268	0,0264	0,0473
Velocidade da ponta (km/s)	2,3629	2,7801	2,5859	2,4234
x (mm)	46,6012	52,7812	79,4204	129,4030
y (mm)	0,2223	0,0837	0,0934	0,0930

\* Detonação encerrada

## 6.1.2 INICIAÇÃO PONTUAL

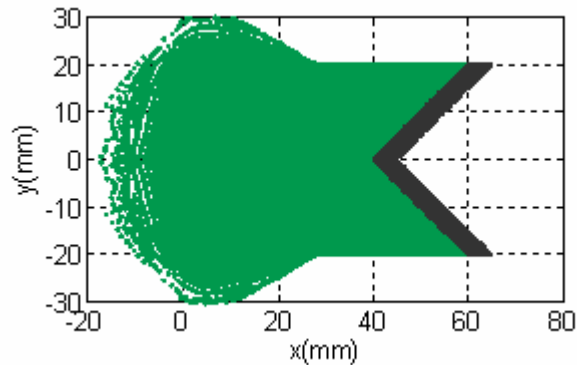
### 6.1.2.1 DETONAÇÃO DO EXPLOSIVO

A iniciação pontual difere da plana pela massa de explosivo detonada ao longo do tempo e a forma com que a onda de detonação interage no revestimento da carga. A fim de se evitar repetição, os focos desta subseção e da próxima são o jato e as curvas de velocidade,



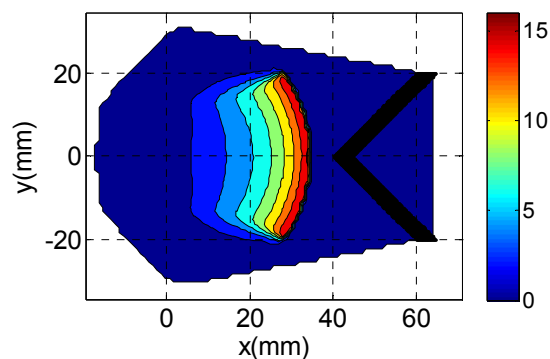
principalmente em instantes de tempo onde se possa avaliar o jato e, por consequência, os efeitos da forma de iniciação.

No instante de  $5,0 \mu\text{s}$ , a massa de explosivo contida no círculo de raio  $34,65 \text{ mm}$  e centro na origem encontra-se na fase gasosa e sofre o processo de expansão conforme verificado na FIG. 6.20. A figura abaixo quando comparada com a FIG. 6.7, referente à detonação plana, apresenta as diferenças devido à forma de iniciação do explosivo apresentando uma dispersão mais circular dos produtos da detonação.



**FIG. 6.20 Posição no tempo  $t = 5,0 \mu\text{s}$**

As curvas de pressão da FIG. 6.21 exibem mais claramente a forma da onda de detonação que percorre o explosivo. O maior valor de pressão obtido foi de  $16,503 \text{ GPa}$ , na posição  $x = 33,8658 \text{ mm}$  e  $y = 0,1115 \text{ mm}$ . Este valor é menor que o obtido na detonação plana, e isto se deve aos mesmos motivos citados e acrescidos da massa de explosivo e da disposição inicial das partículas. Esta disposição segue um padrão cartesiano e constante, que apresenta melhores resultados nas simulações com detonações planas, tendo como consequência uma estimativa de massa específica seguindo um padrão de distribuição mais favorável devido ao movimento relativo das partículas.



**FIG. 6.21 Pressão (GPa) no tempo  $t = 5,0 \mu\text{s}$**

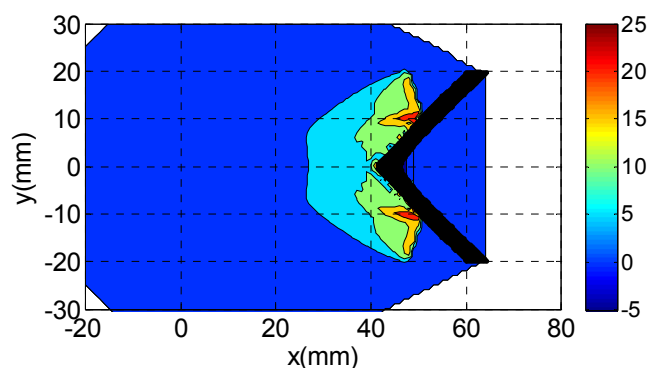
A TAB. 6.3 sintetiza a comparação entre a iniciação plana e a pontual no tempo  $t = 5,0 \mu\text{s}$  para a detonação do explosivo.

**TAB. 6.3 Comparação entre a detonação plana e a esférica do explosivo**

Detonação	Tempo $t = 5,0 \mu s$	
	Plana	Pontual
Maior massa específica ( $g/cm^3$ )	2,1220	2,0442
x (mm)	33,8904	34,0422
y (mm)	0,1108	0,1110
Maior pressão (GPa)	18,351	16,503
x (mm)	33,8904	33,8658
y (mm)	0,1108	0,1115

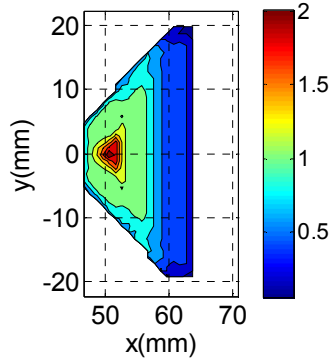
### 6.1.2.2 INTERAÇÃO COM O REVESTIMENTO

No instante  $t = 7,5 \mu s$  a onda de detonação interage com o revestimento conforme mostrado na FIG. 6.22. O maior valor de pressão para o explosivo foi de 26,559 GPa, na posição  $x = 49,6978 \text{ mm}$  e  $y = 10,5177 \text{ mm}$ , e para o revestimento de 27,412 GPa, em  $x = 49,3177 \text{ mm}$  e  $y = 8,4998 \text{ mm}$ .



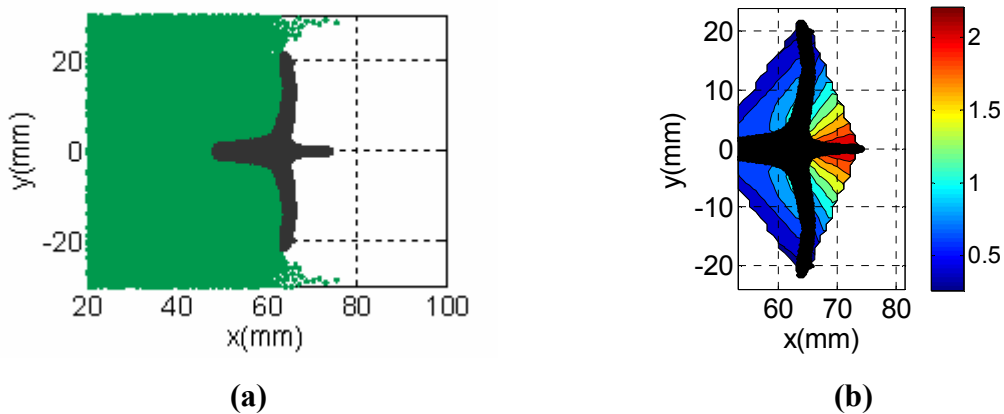
**FIG. 6.22 Pressões (GPa) no tempo  $t = 7,5 \mu s$**

As curvas de velocidade do de revestimento no tempo de  $10,0 \mu s$  são apresentadas na FIG. 6.23. Os maiores valores de velocidade estão localizados na simetria da carga da mesma forma que na iniciação plana.



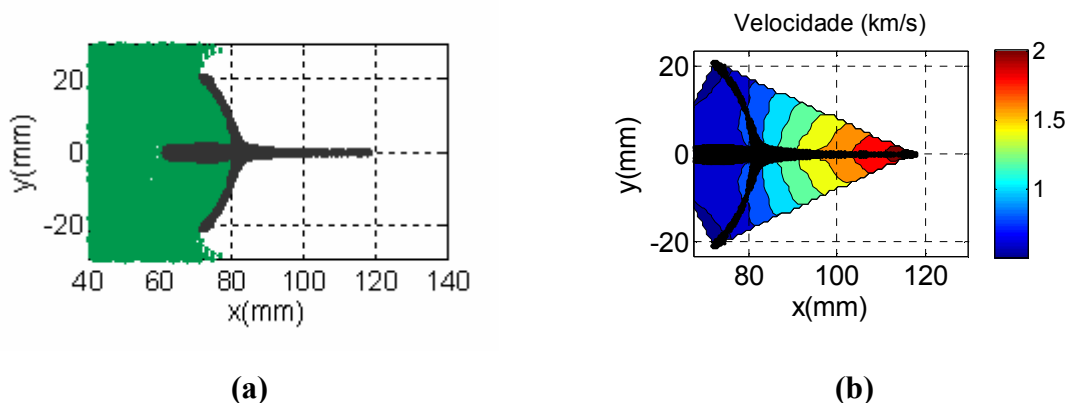
**FIG. 6.23 Velocidade (km/s) no tempo  $t = 10,0 \mu\text{s}$**

No tempo  $t = 20,0 \mu\text{s}$ , o jato proveniente desta forma de iniciação é observado na FIG. 6.24 (a). Verifica-se que o revestimento apresenta uma maior curvatura quando comparada com a FIG. 6.17 (a) da detonação plana, que é explicável pelo formato da onda que interage com o material metálico. A FIG. 6.24 (b) apresenta os contornos de velocidades do jato neste ponto da simulação, quando comparado a FIG. 6.17 (b) da detonação plana. É possível verificar que esta forma de iniciação diminui a velocidade do jato.



**FIG. 6.24 Jato no tempo  $t = 20,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) velocidade (km/s)**

A FIG. 6.25 apresenta os resultados das simulações no tempo  $t = 40,0 \mu\text{s}$ . A FIG. 6.25 (a) apresenta o jato e (b) a velocidade. Verifica-se na figura que, a escória ocupa uma área maior do que a ocupada na FIG. 6.19 (a) da detonação plana, sendo assim a massa da escória é maior na iniciação esférica do que na plana.



**FIG. 6.25** Jato no tempo  $t = 40,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) velocidade (km/s)

A tabela abaixo mostra os resultados de posição ( $x_{jato}$ ) e velocidade ( $u_{jato}$ ) do jato em comparação com a iniciação plana:

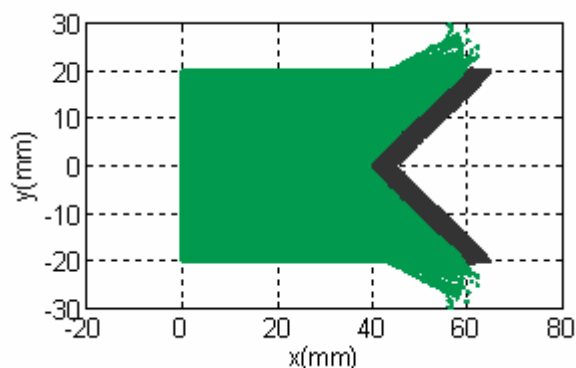
**TAB. 6.4** Comparação entre a interação da iniciação plana e da esférica

Inic.	Tempo ( $\mu\text{s}$ )							
	7,5		10,0		20,0		40,0	
	$x_{jato}$ (mm)	$u_{jato}$ (km/s)	$x_{jato}$ (mm)	$u_{jato}$ (km/s)	$x_{jato}$ (mm)	$u_{jato}$ (km/s)	$x_{jato}$ (mm)	$u_{jato}$ (km/s)
Plana	46,6012	2,3629	52,7812	2,7801	79,4204	2,5859	129,4030	2,4234
Pontual	46,3062	1,5855	51,2128	2,2656	74,1944	2,2737	117,8663	2,1202

### 6.1.3 INICIAÇÃO REVERSA

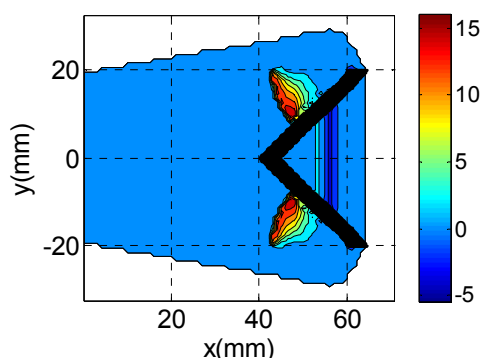
Apenas com fins ilustrativos e comparativos, estudou-se o comportamento da carga e do revestimento no caso de iniciação reversa. O processo de iniciação reversa caracteriza-se pela detonação iniciada na parte mais avançada da carga. Logo no início da simulação ocorre à interação da onda de detonação com o revestimento, sendo assim a aceleração do revestimento é iniciada com pouca energia devido a pouca massa de explosivo detonada. No transcurso das simulações, verifica-se a onda percorrendo o explosivo e a ação sobre o revestimento impulsionando-o na direção do jato, como nas demais simulações.

A FIG. 6.26 exibe a posição das partículas no tempo  $t = 2,5 \mu\text{s}$ . Observa-se a expansão das partículas iniciando no contanto com o revestimento. Nesta fase, as partículas do revestimento originárias da base do cone estão sendo aceleradas pela onda de detonação.



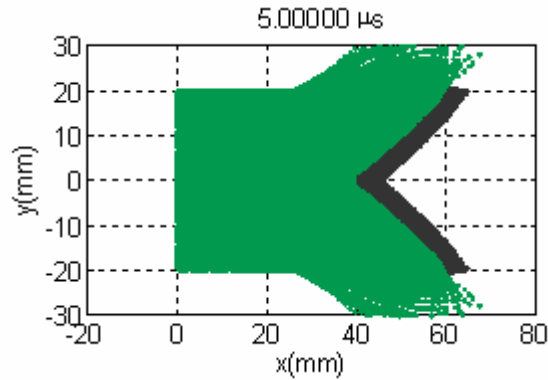
**FIG. 6.26 Partículas no tempo  $t = 2,5 \mu\text{s}$**

As curvas de pressões associadas a esta forma de iniciação é apresentada na FIG. 6.27. Verifica-se uma concentração de efeitos na região de interface entre metal e explosivo, característico da transmissão de onda. O valor de pressão máxima obtida numericamente para o explosivo e o revestimento, respectivamente, são 17,268 GPa, na posição  $x = 47,7473 \text{ mm}$  e  $y = 9,6652 \text{ mm}$ , e 16,735 GPa, em  $x = 49,6167 \text{ mm}$  e  $y = 8,8870 \text{ mm}$ . A pressão associada à onda transmitida não assume valores tão elevados como nos casos anteriores devido a pouca massa de material explosivo detonada até este ponto detonado e o sentido em que ocorre a detonação, que provoca menores compressões dos produtos da detonação.



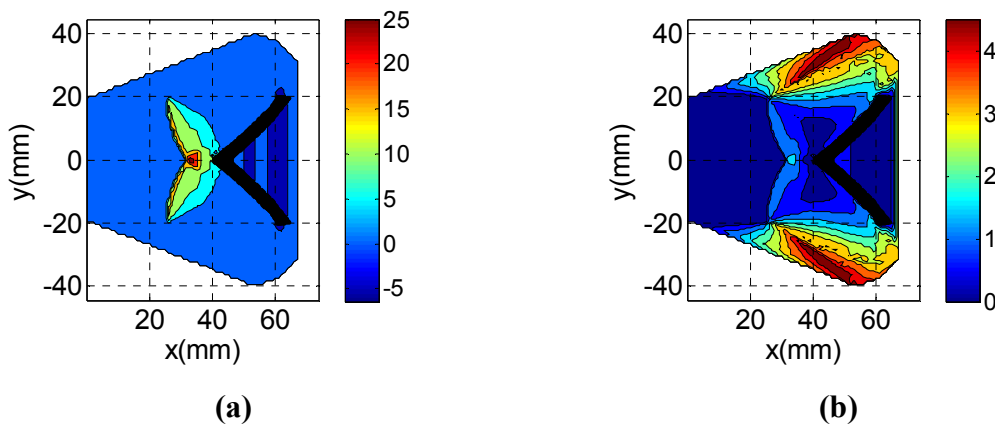
**FIG. 6.27 Pressões (GPa) no tempo  $t = 2,5 \mu\text{s}$**

A onda de detonação atinge ápice do cone no tempo  $t = 2,886 \mu\text{s}$ , a partir do qual todo explosivo em contato com o cone foi detonado. No instante  $t = 5,0 \mu\text{s}$  a onda de detonação percorreu 34,65 mm, resta ainda explosivo sólido na extremidade oposta à iniciação, conforme observado na FIG. 6.28. A principal diferença está na expansão gasosa ocasionada pela iniciação. Nos casos anteriores, o explosivo fora do cone metálico sofria um processo de expansão livre; enquanto que neste caso parte dos produtos da reação interagem na aceleração do revestimento.



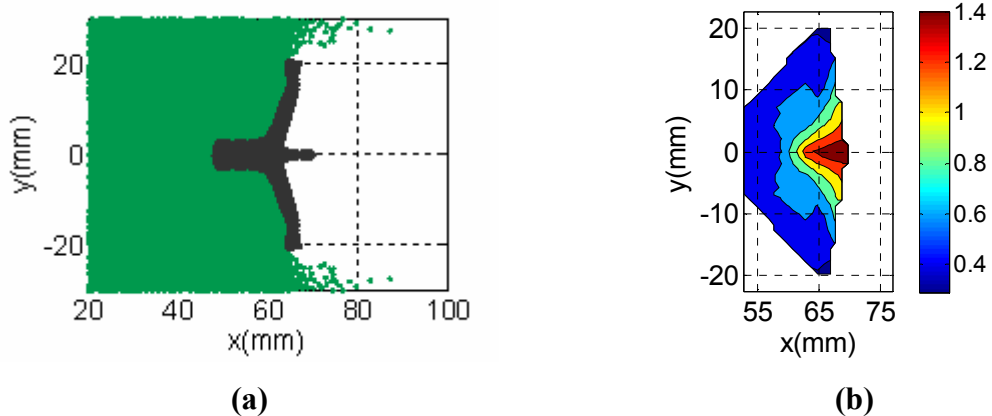
**FIG. 6.28 Posição (mm) no tempo  $t = 5,0 \mu\text{s}$**

Os perfis de pressão e velocidade são exibidos nas FIG. 6.29 (a) e (b), respectivamente, da FIG. 6.29. Verifica-se a convergência do pulso de pressão na simetria da carga e a rápida expansão dos produtos gasosos ao redor do revestimento devido aos efeitos de inércia do cobre. Verifica-se a superposição de efeitos das ondas de detonação no eixo de simetria nas curvas de pressão. Neste caso, a pressão máxima no explosivo calculada foi de 28,424 GPa, na posição  $x = 32,6459 \text{ mm}$  e  $y = 0,0894 \text{ mm}$ , gerado pela detonação convergente.



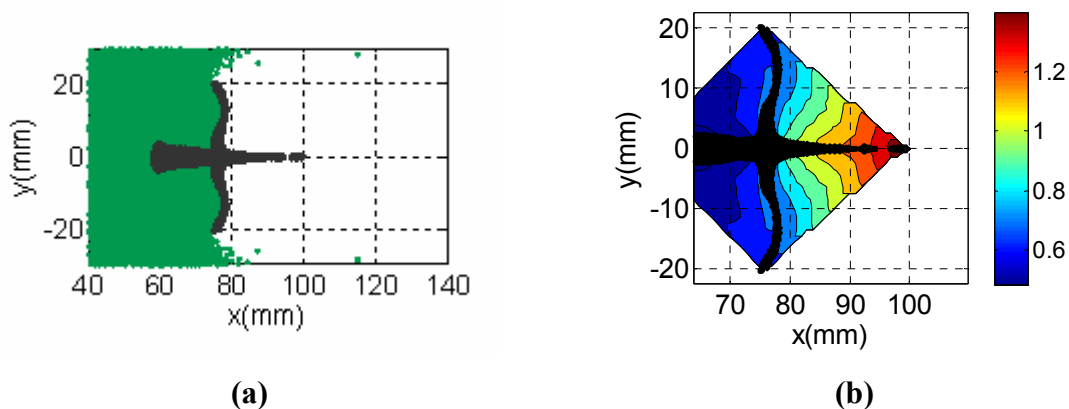
**FIG. 6.29 Tempo  $t = 5,0 \mu\text{s}$ : (a) pressão (GPa) e (b) velocidade (km/s)**

O jato no tempo de  $20,0 \mu\text{s}$  é apresentado na FIG. 6.30 (a). Pode-se verificar que a massa da escória é consideravelmente maior que nos casos anteriores, resultando em menos massa no jato. As velocidades obtidas apresentam valores significativamente menores que os obtidos nas subseções acima, principalmente quando comparado à detonação plana.



**FIG. 6.30** Tempo  $t = 20,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) velocidade (km/s)

A configuração do jato e a velocidade no tempo de  $40,0 \mu\text{s}$  são apresentadas na FIG. 6.31 (a) e (b), respectivamente. O fator marcante nesta simulação está associado ao aumento da escória e à redução da velocidade do jato.



**FIG. 6.31** Tempo  $t = 40,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) velocidade (km/s)

A TAB. 6.5 apresenta a comparação entre a iniciação plana e a reversa:

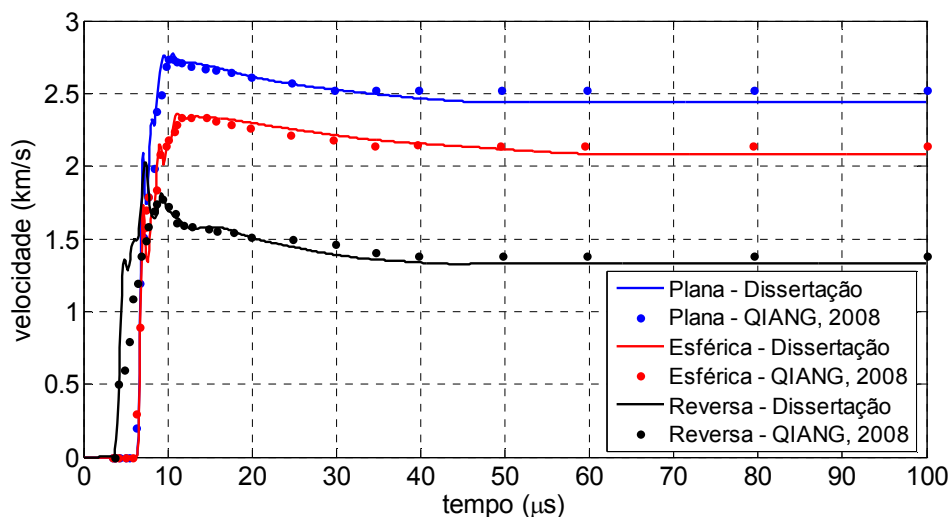
**TAB. 6.5** Comparação entre a interação da iniciação plana com a reversa

Inic.	Tempo ( $\mu\text{s}$ )							
	7,5		10,0		20,0		40,0	
	$x_{jato}$ (mm)	$u_{jato}$ (km/s)	$x_{jato}$ (mm)	$u_{jato}$ (km/s)	$x_{jato}$ (mm)	$u_{jato}$ (km/s)	$x_{jato}$ (mm)	$u_{jato}$ (km/s)
Plana	46,6012	2,3629	52,7812	2,7801	79,4204	2,5859	129,4030	2,4234
Reversa	49,8026	1,9472	54,1140	1,6472	70,0699	1,5071	99,6655	1,3372

#### 6.1.4 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DA LITERATURA

O processo de colapso do cone metálico pode ser dividido em três fases distintas: compressão, aceleração e alongamento. A primeira é definida pela interação metal-explosivo; a segunda é consequência dos níveis de pressão impostos na primeira fase; e a terceira é definida pelas velocidades com as acelerações obtidas na segunda fase. A evolução da velocidade no tempo apresenta uma aceleração inicial que impõem elevadas velocidades em curto espaço de tempo, devido à configuração geométrica convergente da carga. O jato assume uma velocidade máxima, e logo após apresenta uma pequena queda de valor absoluto, pois o jato fica sujeito a um estado de tração conforme já abordado. Devido ao alongamento, o jato tende a romper e a apresentar um valor constante para a ponta.

O resultado apresentado no trabalho de referência (Qiang et al., 2008) foi a evolução da velocidade da ponta do jato ao longo do tempo para as diferentes formas de iniciação simuladas. A FIG. 6.32 apresenta os resultados desta dissertação e os do trabalho de Qiang et al., respectivamente, linha sólida e pontos. As diferentes cores correspondem as forma de iniciação: azul para a plana, vermelha para a esférica e preta para a reversa.



**FIG. 6.32 Velocidade da ponta do jato (km/s) ao longo do tempo**

Os valores em que as velocidades se estabilizam no trabalho da literatura são de 2,52 km/s, 2,14 km/s e 1,38 km/s, respectivamente para as formas de iniciação plana, esférica e reversa. Nas simulações com o código construído nesta dissertação, os valores obtidos, respectivamente, são 2,44 km/s, 2,08 km/s e 1,33 km/s. Os valores encontrados são 3,18 %, 2,80 % e 3,62 % menores que os obtidos na referência. Esta redução se deve aos efeitos dos desviadores de tensão introduzidos no código computacional construído nesta dissertação e,



como esperado, a solução de Qiang et al. sendo mais conservativa apresenta valores maiores de velocidade.

Em alguns códigos hidrodinâmicos desprezam-se os desviadores de tensão. Esta abordagem simplifica os cálculos e não apresenta resultados muito diferentes para ondas de choque de valores muito elevados, comum no colapso das cargas ocas, como verificado nos resultados acima. Do ponto de vista prático, estes efeitos introduzidos nas simulações apresentam pouca influência na aproximação numérica. Do ponto de vista científico, representa melhor o fenômeno físico com uma formulação mais completa.

Em situações que envolvam propagação de ondas, as curvas de velocidade apresentam uma oscilação, devido aos efeitos de reflexão e transmissão. Embora os resultados estejam compatíveis, os resultados das simulações apresentam na fase de aceleração estes efeitos, como esperado.

As diferentes abordagens para o cálculo da massa específica não apresentaram influência significativa na solução, pois em ambos os trabalhos os valores convergiram aproximadamente a mesma solução. Um outro fator é que no trabalho de Qiang et al. o coeficiente de viscosidade artificial linear foi tomado como 2 ( $a = 2$ ), o que obriga o código numérico a atenuar mais as oscilações pós-choque. Neste trabalho foi adotado  $a = 1$  (TAB. 5.1, página 89).

## 6.2 CARGA OCA DE COMPOSTO B

Como segundo exemplo para se verificar a viabilidade do código, optou-se por simular a carga apresentada no trabalho de Yang et al. publicado em 2011. A carga possui comprimento de 97,0 mm, diâmetro de 80,0 mm, espessura do revestimento de 2,25 mm e ângulo de cone de 120°. Cabe aqui uma observação, visto que o ângulo no trabalho de referência é apresentado como sendo de 102°, porém, a configuração da carga não assume a configuração geométrica apresentada nas figuras, podendo caracterizar um erro de digitação, já que com o ângulo de 120° as figuras se tornam compatíveis. O explosivo utilizado foi o Comp-B e o revestimento de cobre. Duas simulações com iniciação pontual foram apresentadas: a primeira com um ponto e a segunda com dois pontos.

O objetivo do trabalho de Yang et al. foi avaliar a viabilidade do SPH para a simulação de cargas ocas. O código foi comparado com métodos tradicionais com base em malhas,

simuladas no LS-DYNA utilizando os enfoques Lagrangeano e o Euleriano. Estão introduzidos no código em SPH os modelos constitutivos de Steinberg-Guinan e de Johnson-Cook.

Um dos principais problemas do SPH é a aproximação excessiva das partículas, que pode ocorrer em algumas simulações gerando erro de aproximação na massa específica. Este problema é mais recorrente quando a discretização é muito refinada. Para se prevenir esta situação, foi introduzida uma força de repulsão que só aparece nos cálculos quando as partículas estão próximas e satisfazem a um critério. Esta força introduzida recebe o nome de força de penalização (Liu e Liu, 2007) e está relacionada com a distância e o comprimento característico das partículas. O modelo de penalização foi o da força de repulsão proposto por Leonard-Jones para interações moleculares. No código desta dissertação, a não penetração é imposta apenas pela função de interpolação e a viscosidade artificial. A expressão do critério utilizada por Yang et al. é mostrada abaixo:

$$F_p = \begin{cases} 10^6 (P_e^6 + P_e^4) \frac{x_{ij}^\alpha}{|x_{ij}|}, & \text{se } P_e < 1 \\ 0, & \text{se } P_e \geq 1 \end{cases} \quad (6.2)$$

Onde:

$$P_e = \frac{3(h_i + h_j)}{2|x_{ij}|} \quad (6.3)$$

Os parâmetros dos materiais utilizados no trabalho de referência são diferentes dos valores apresentados nas tabelas anteriormente. Estes valores foram ajustados conforme os apresentados no trabalho de referência, cujos valores são listados nas duas tabelas a seguir:

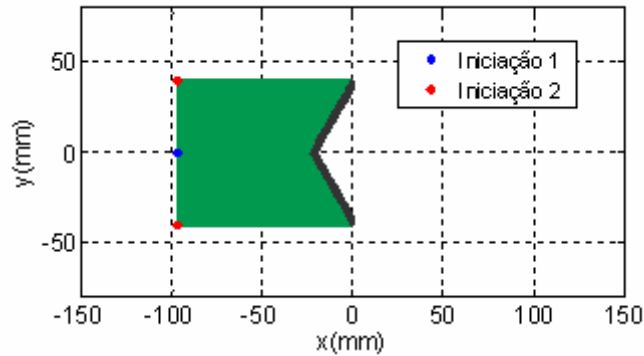
**TAB. 6.6 Parâmetros da equação de JWL do Comp B das simulações de Yang et al.**

Explosivo	$\rho_0$ (g/cm <sup>3</sup> )	$u_D$ (km/s)	$e_D$ (MJ/kg)	$A$ (GPa)	$B$ (GPa)	$R_1$	$R_2$	$w$
Comp B	1,710	7,79	4,86	524,3	7,67	4,2	1,10	0,34

**TAB. 6.7 Parâmetros de choque do Cobre utilizados nas simulações de Yang et al.**

Material	$\rho_0$ (g/cm <sup>3</sup> )	$c_0$ (km/s)	$s_1$	$\gamma_0$
Cobre	8,960	3,940	1,489	2,00

A configuração da carga é mostrada na FIG. 6.33, bem como os pontos de iniciação do explosivo utilizados nas duas simulações.



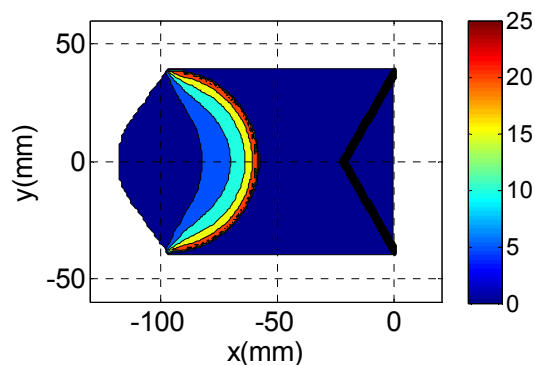
**FIG. 6.33 Configuração inicial da carga de Comp B**

O número total de partículas empregadas nas simulações desta dissertação foi de 44.985 para representar o explosivo e 1.235 para o revestimento, totalizando 46.220 partículas. Nas simulações de Yang et al., foram utilizadas 81.185 partículas para o explosivo e 8.316 para o revestimento, totalizando 89.501 partículas na representação de toda a carga.

### 6.2.1 INICIAÇÃO EM 1 PONTO

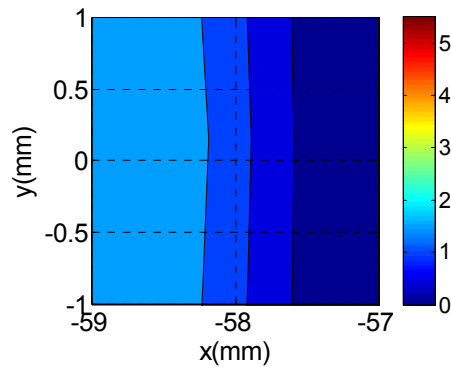
A iniciação em um ponto segue os mesmos moldes da simulada na subseção 6.1.2 (página 103). O Comp B apresenta pressão no ponto de Chapman-Jouguet de 28,3 GPa. Esta alteração no tipo de explosivo modifica a interação metal-explosivo devido à diferença de pressão, modificando o colapso.

Os contornos de pressões no tempo de 5,0  $\mu\text{s}$  são apresentados na FIG. 6.34. A onda percorreu 38,95 mm no explosivo, verifica-se a região circular e os valores de pressão próximos a 25,0 GPa na frente de onda. O maior valor obtido foi de 26,716 GPa, em  $x = -58,8703$  mm e  $y = 0,1351$  mm, 1,584 GPa a menos que o previsto. Este valor se aproximou do esperado devido ao refinamento inicial das partículas nesta simulação.



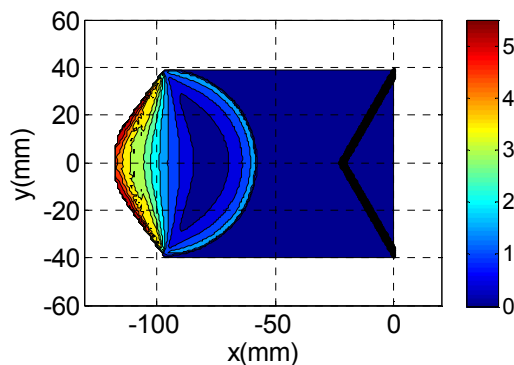
**FIG. 6.34 Pressões (GPa) no tempo  $t = 5,0 \mu\text{s}$**

A frente de onda pode ser observada na posição de  $-58,05$  mm, conforme apresentado na FIG. 6.35.



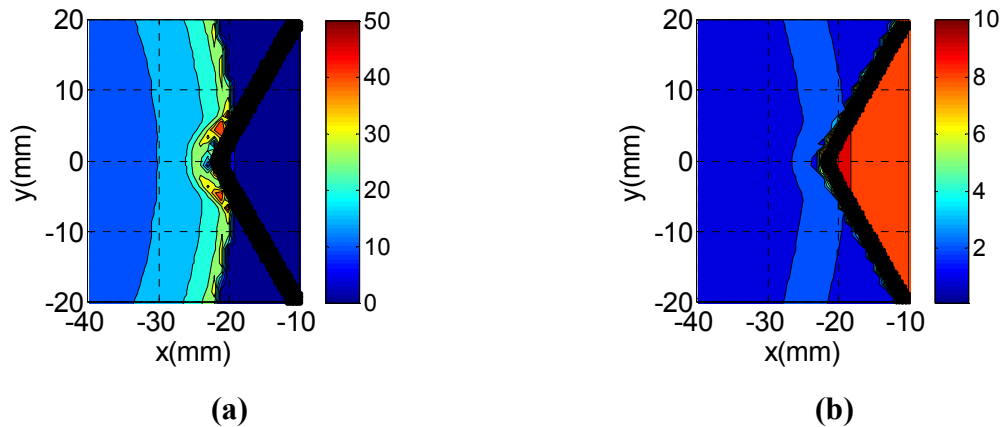
**FIG. 6.35 Posição da frente de onda no tempo  $t = 5,0 \mu\text{s}$**

Os contornos de velocidade associados a esta detonação são apresentados na FIG. 6.36. Observa-se a rápida expansão gasosa com velocidade das partículas do explosivo que atingem  $5,8306$  km/s, na posição  $x = -108,0184$  mm e  $y = 23,1659$  mm. O explosivo detonado avança contra o explosivo virgem com velocidade de  $2,03$  km/s, na posição  $x = -58,6682$  mm e  $y = 0,1346$  mm, causando a compressão responsável pelos elevados valores de pressão quando relacionadas pela EDE do material.



**FIG. 6.36 Velocidades (km/s) em  $t = 5,0 \mu\text{s}$**

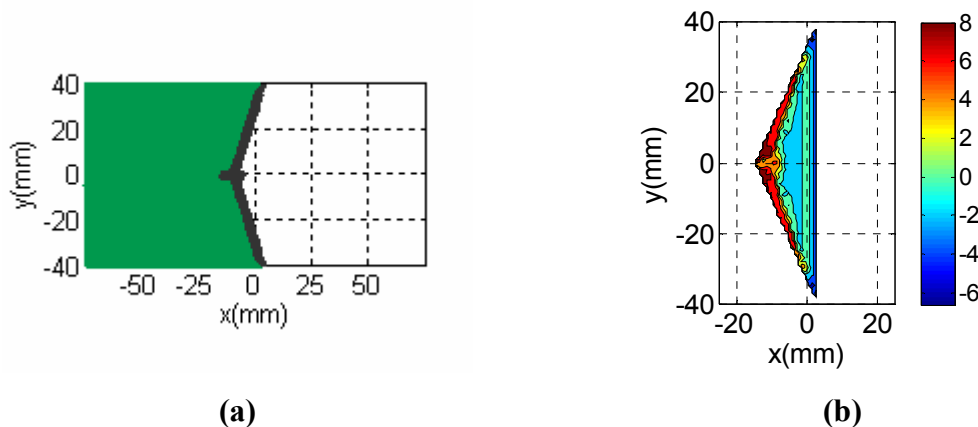
Considerando a configuração geométrica do problema e a velocidade de detonação do Comp B, a onda de detonação atinge o cone metálico no tempo de  $9,487 \mu\text{s}$ . No tempo de  $10,0 \mu\text{s}$ , é possível verificar as altas pressões no explosivo devido à interação com o revestimento, que restringe o movimento dos produtos da reação. As curvas de pressão nas proximidades do ápice do cone são mostradas na FIG. 6.37 (a).



**FIG. 6.37 Interação em  $t = 10,0 \mu\text{s}$ : (a) pressões (GPa) e (b) massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )**

A onda ao interagir com o revestimento metálico comprime-o provocando o aumento de pressões no sólido, o contorno de massa específica é apresentado na FIG. 6.37 (b). Neste passo de tempo os maiores valores de pressão e massa específica aproximados numericamente são de 60,309 GPa e 3,1718  $\text{g}/\text{cm}^3$ , na posição  $x = -20,3152 \text{ mm}$  e  $y = 5,7841 \text{ mm}$ ; e 54,5 GPa,  $x = -20,5054 \text{ mm}$  e  $y = 3,1560$ , e 11,54  $\text{g}/\text{cm}^3$ ,  $x = -21,3033 \text{ mm}$  e  $y = 2,2424 \text{ mm}$ , respectivamente para o explosivo e o revestimento. Estes valores estão localizados na região de interação entre a frente de onda e o revestimento, e são os responsáveis por acelerar o revestimento contra o eixo de simetria colapsando a carga.

A detonação foi encerrada no tempo de 13,469  $\mu\text{s}$ . Avaliando a configuração do sistema no tempo de 15,0  $\mu\text{s}$ , a posição das partículas já evidencia a formação do jato de carga oca, conforme verificado na FIG. 6.38 (a).

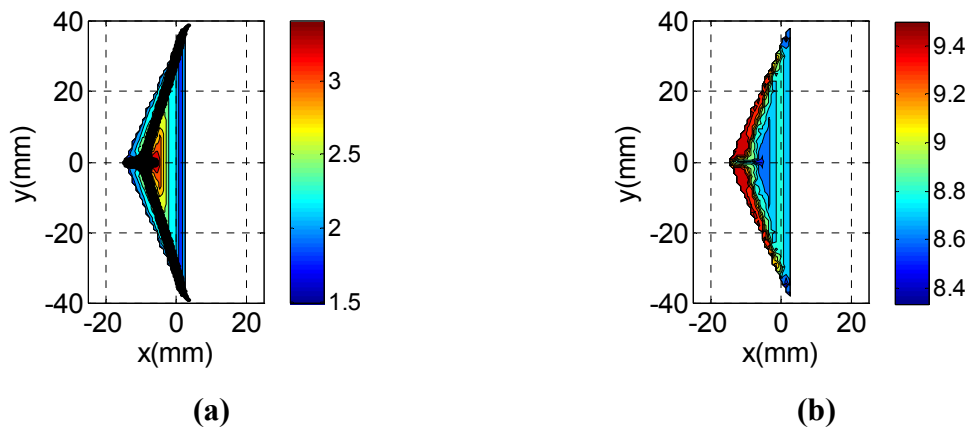


**FIG. 6.38 Formação do jato em  $t = 15,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) pressão (GPa)**

O diagrama de pressões é apresentado na FIG. 6.38 (b). Verifica-se que o revestimento apresenta os maiores valores de pressão próximos ao eixo de simetria, decrescendo para as extremidades do cone. Embora a legenda da FIG. 6.38 (b) apresente curvas para valores de pressão em torno de 8,0 GPa, valores pontuais de pressão alcançam 10,081 GPa, na posição

$x = -10,8166$  mm e  $y = 1,6987$  mm, na interação do explosivo com o metal, o que garante que o material metálico continua sendo acelerado.

Os perfis de pressões e velocidade, apenas para o revestimento, são apresentados na FIG. 6.39 (a) e (b), respectivamente. Observa-se a elevação da velocidade na região da ponta do jato, evidenciando o início do alongamento. A massa específica decresce no eixo de simetria, devido ao contínuo aumento do comprimento do jato.



**FIG. 6.39 Contornos em  $t = 15,0 \mu\text{s}$ : (a) velocidade (km/s) e (b) massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )**

Focando apenas no jato, pode-se acompanhar a evolução ao longo do tempo. A FIG. 6.40 (a) – (e) apresenta o desenvolvimento do jato nos instantes indicados. As curvas de velocidade associadas a cada instante da figura FIG. 6.40 é apresentado na FIG. 6.41 (a) – (e).

Os resultados apresentados na FIG. 6.40 e na FIG. 6.41, estão em concordância com os resultados esperados. O jato após iniciar a sua formação, passa por um processo de alongamento, com estabilização da velocidade da ponta, como observado no exemplo anterior. A escória apresenta velocidade da ordem de 2,15 km/s enquanto que a da ponta está em torno de 3,80 km/s. Esta diferença é responsável pelo desenvolvimento do jato de carga oca. Isto ocorre porque o colapso apresenta elevados valores de pressão em uma região de pequenas proporções ao longo do eixo da carga, recebendo o nome de ponto de estagnação (Birkhoff et al., 1948), e se localiza na convergência de material no eixo x. A ponta do jato é acelerada mais intensamente na direção do jato, enquanto que sobre a escória também age, diretamente, os produtos da detonação, o balanço de forças na escória resulta em uma aceleração de menor intensidade, e em conseqüência, uma menor velocidade.

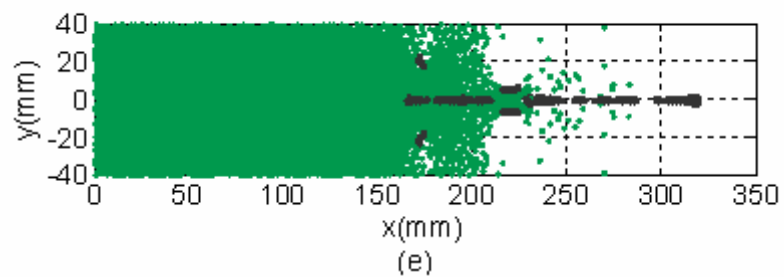
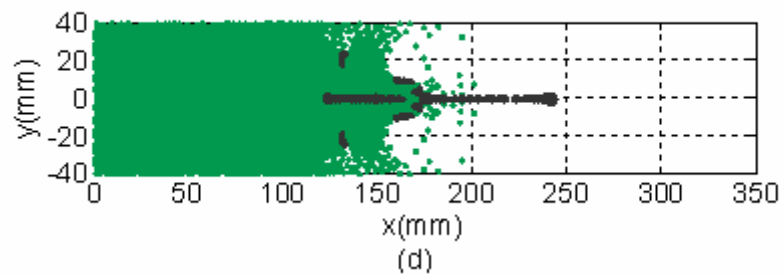
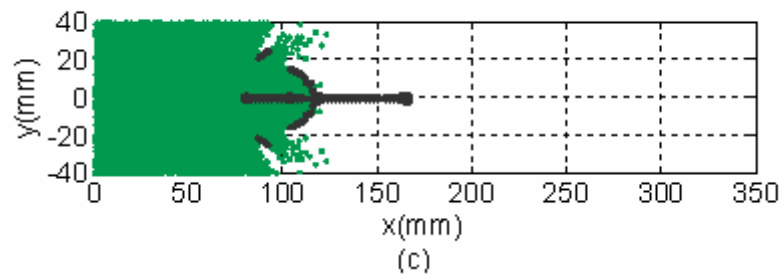
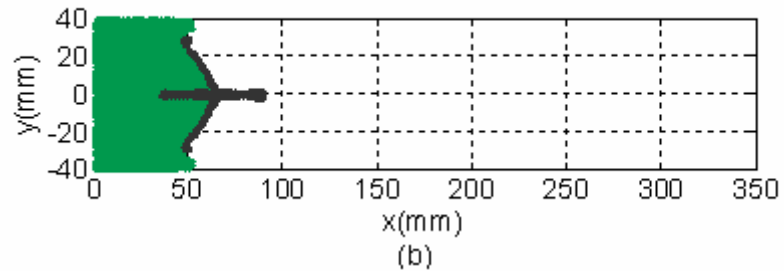
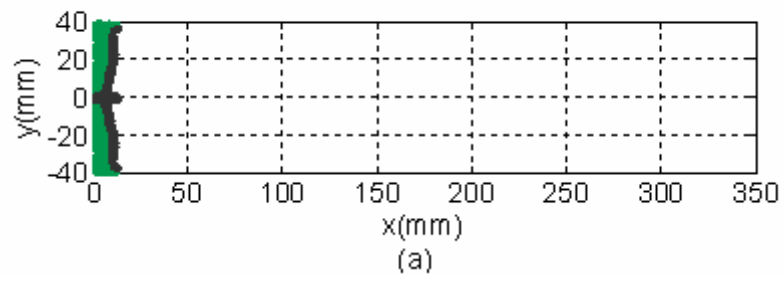


FIG. 6.40 Evolução (mm) em  $t =$  (a) 20,0, (b) 40,0, (c) 60,0, (d) 80,0 e (e) 100,0 ( $\mu\text{s}$ )

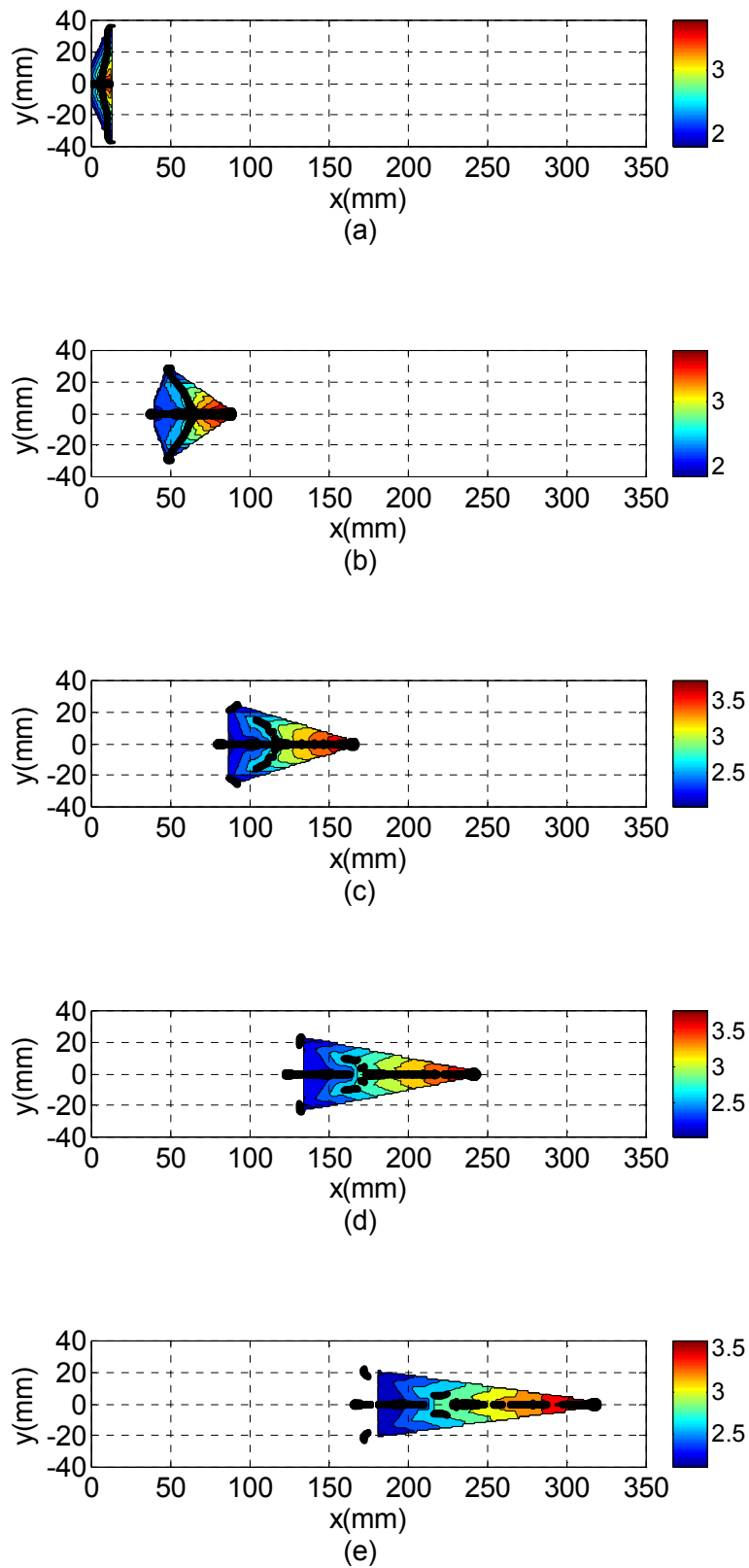


FIG. 6.41 Velocidade (km/s) em  $t =$  (a) 20,0, (b) 40,0, (c) 60,0, (d) 80,0 e (e) 100,0 ( $\mu\text{s}$ )



A tabela a seguir apresenta os resultados da posição e velocidade do jato em diferentes tempos:

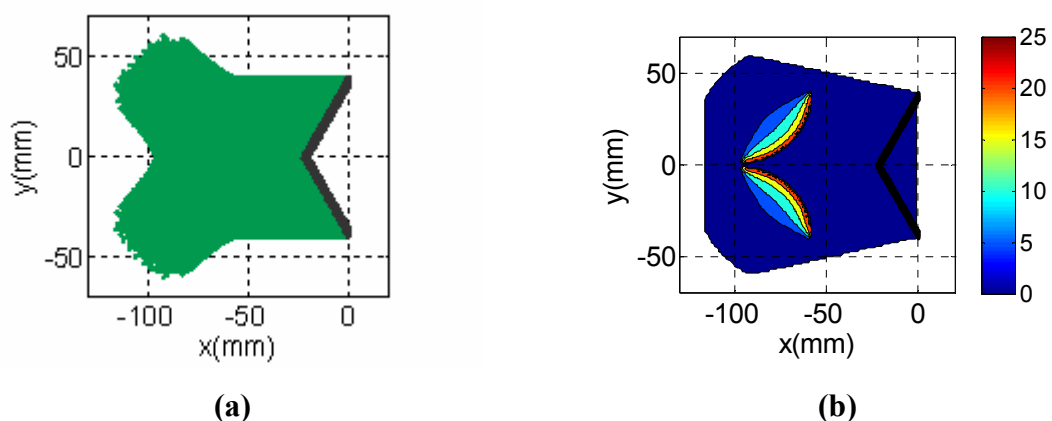
**TAB. 6.8 Posição e velocidade do jato na iniciação em 1 ponto**

Tempo ( $\mu\text{s}$ )	$x_{\text{jato}}$ (mm)	$u_{\text{jato}}$ (km/s)
20,0	12,7299	3,7115
40,0	89,6804	3,8844
60,0	167,0090	3,8466
80,0	243,5860	3,8135
100,0	319,6598	3,7975

## 6.2.2 INICIAÇÃO EM 2 PONTOS

O processo de iniciação em dois pontos conforme idealizado no trabalho de referência, difere da anterior pela superposição de efeitos das ondas de detonação no eixo da carga. Dois pulsos de pressão compressivos interagem ao longo do eixo x, e devido à superposição, os níveis de pressão locais ultrapassam as do ponto de Chapman-Jouguet.

No tempo de 5,0  $\mu\text{s}$ , as ondas iniciada nos pontos indicados na FIG. 6.33 estão prestes a se sobrepôr. O tempo previsto para que isto ocorra é de 5,135  $\mu\text{s}$ , logo a análise está sendo efetuada na iminência desta superposição.

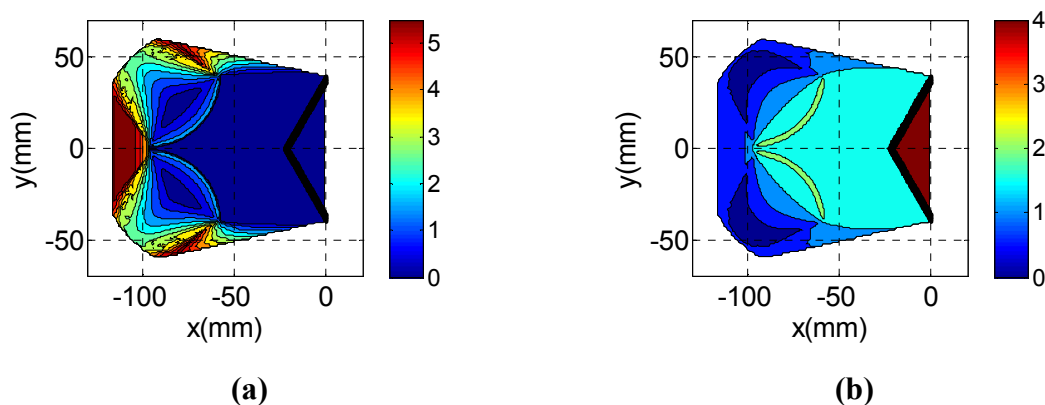


**FIG. 6.42 Tempo  $t = 5,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) pressão (GPa)**

Na FIG. 6.42 (a) observa-se o deslocamento das partículas caracterizando uma região circular ao redor de cada ponto de iniciação. Os produtos da detonação estão sujeitos às pressões apresentadas na FIG. 6.42 (b), o maior valor de pressão obtido foi de 25,874 GPa, na

posição  $x = -62,2278$  mm e  $y = 24,2977$  mm. Este valor é um pouco menor do que a do caso anterior, devido à massa detonada, que é maior no caso da subseção anterior do que em cada uma das detonações desta simulação.

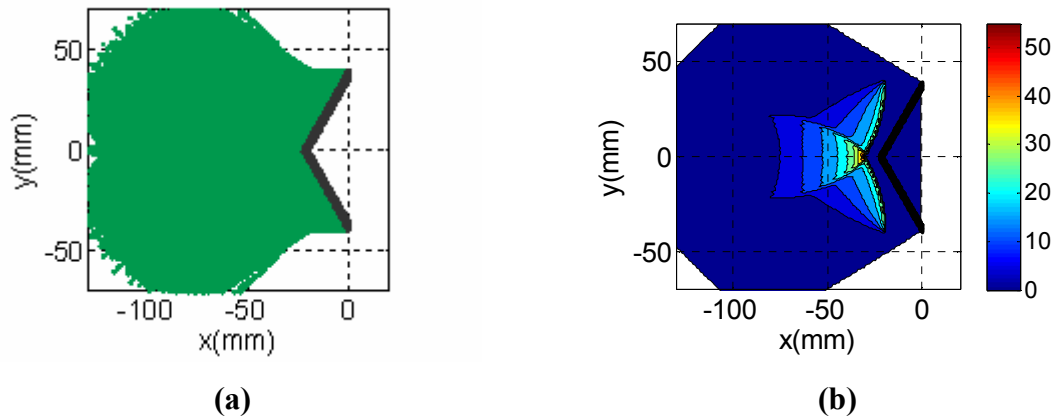
Os perfis de velocidade e massa específica são apresentados na FIG. 6.43 (a) e (b). Verifica-se que as partículas do explosivo ao se encontrarem com velocidades opostas verticalmente provocarão uma compressão superior aos níveis da subseção anterior, onde o explosivo avança sobre material em repouso. O contorno de massa específica neste tempo é apresentado, e exibe os contornos de compressão na frente de onda e de expansão na região detonada, como esperado.



**FIG. 6.43 Tempo  $t = 5,0 \mu\text{s}$ : (a) velocidade (km/s) e (b) massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )**

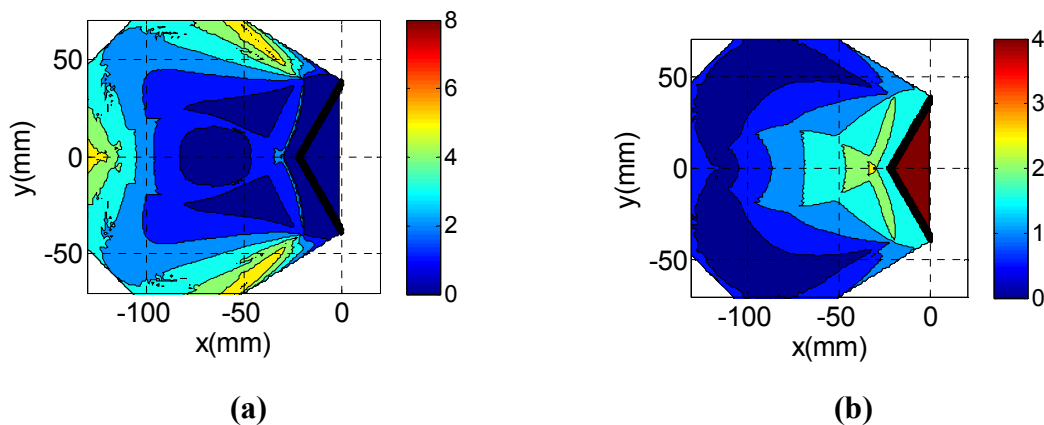
Até este ponto, as ondas de detonação se propagam sem interação. Representam isoladamente o caso de uma detonação pontual, como nos exemplos anteriores.

No tempo de  $10,0 \mu\text{s}$ , as ondas de detonação já se superpuseram. A FIG. 6.44 (a) exibe a posição das partículas neste instante. A FIG. 6.44 (b) exibe as curvas de pressão. Observa-se que os níveis de pressão aumentaram consideravelmente na interseção das ondas de detonação. O maior valor obtido foi de  $84,819$  GPa, na posição  $x = -30,3546$  mm e  $y = 0,1047$  mm, caracterizando a concentração de efeitos no eixo de simetria. Este valor tende a aumentar enquanto houver explosivo, pois níveis elevados de pressão aceleram cada vez mais o explosivo, e em consequência aumentam a compressão. Afastando-se da simetria, os pulsos de pressão tendem a se aproximar dos obtidos em uma detonação pontual isolada.



**FIG. 6.44 Tempo  $t = 10,0 \mu\text{s}$ : (a) posição (mm) e (b) pressão (GPa)**

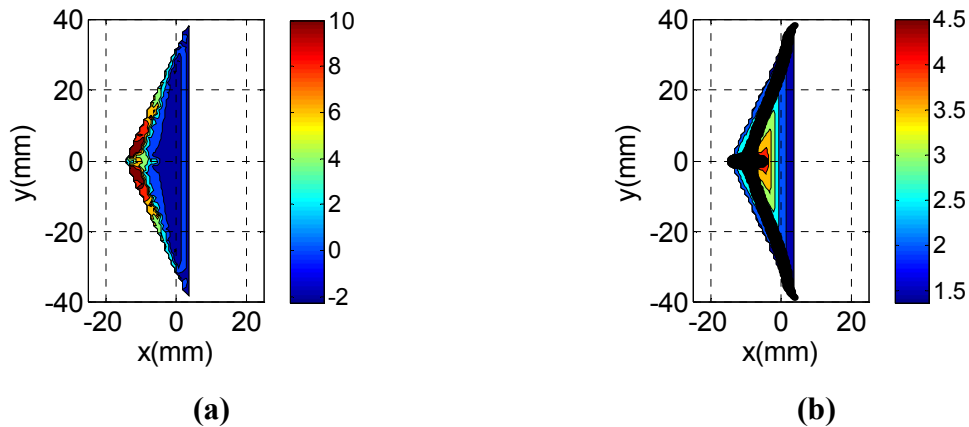
As curvas de velocidades da FIG. 6.45 (a) apresenta a interação das ondas na simetria da carga. A FIG. 6.45 (b) exhibe as curvas de massa específica. Em ambas as figuras, observa-se efeitos centralizados no eixo da carga, nas proximidades das frentes de detonação. Estes efeitos de superposição caracterizam a detonação convergente.



**FIG. 6.45 Tempo  $t = 10,0 \mu\text{s}$ : (a) velocidade (km/s) e (b) massa específica ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )**

A interação com o revestimento é marcada por uma região de maior pressão no ápice do cone, decrescendo para as extremidades do revestimento. Deve-se ressaltar que o ângulo de incidência é menor do que a avaliada na subseção 6.2.1 (página 114), provocando o colapso completamente diferente. O metal será acelerado com maior intensidade, gerando maiores valores de pressão na convergência da parte superior com a inferior do revestimento, e como resultado obtém-se maior velocidade do material metálico acelerado contra a simetria.

A onda de detonação atinge o cone no tempo  $t = 10,787 \mu\text{s}$ . No tempo de  $15,0 \mu\text{s}$  o pulso de pressão interage o revestimento impondo o estado de pressões apresentado na FIG. 6.46 (a). Os valores obtidos são superiores aos da FIG. 6.38 (b) como consequência da soma de efeitos no eixo da carga. Os valores de velocidade são apresentados na FIG. 6.46 (b), igualmente mais elevados do que os exibidos na FIG. 6.39 (a).



**FIG. 6.46 Tempo  $t = 15,0 \mu\text{s}$ : (a) pressões (GPa) e (b) velocidade (km/s)**

A seqüência de figuras apresentadas na FIG. 6.47, exibe a evolução do jato para esta forma de iniciação. A evolução da velocidade no tempo é apresentada na seqüência da FIG. 6.48.

Embora os valores de velocidade obtidos para a iniciação em 2 (dois) pontos sejam superiores aos da iniciação em 1 (um), verifica-se comparando a FIG. 6.47 com a FIG. 6.40, que o jato apresenta uma melhor integridade na iniciação em apenas 1 (um) ponto. Quanto maior a velocidade, maior o alongamento; podendo apresentar um jato com vários pontos de quebra. A penetração depende diretamente da interação de cada porção do jato com o alvo, e capacidade de perfuração não é definida unicamente pela velocidade.

As velocidades da ponta do jato e da escória obtidas foram de 4,5320 km/s e 2,31 km/s, respectivamente. Assim, o jato sofrerá um alongamento maior do que na iniciação em apenas 1 (um) ponto, já que os valores obtidos foram de 3,7875 km/s e 2,15 km/s, respectivamente. Isto explica o fato do jato apresentar uma configuração mais contínua de material metálico na primeira simulação e com mais vazios na segunda.

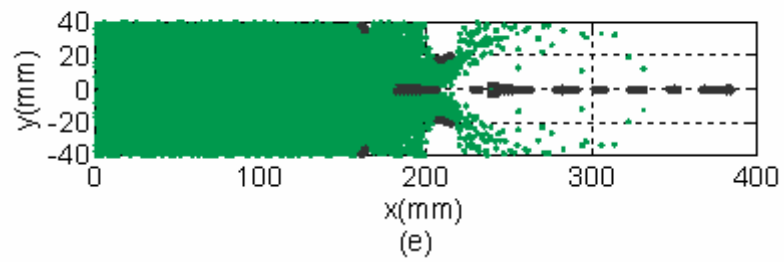
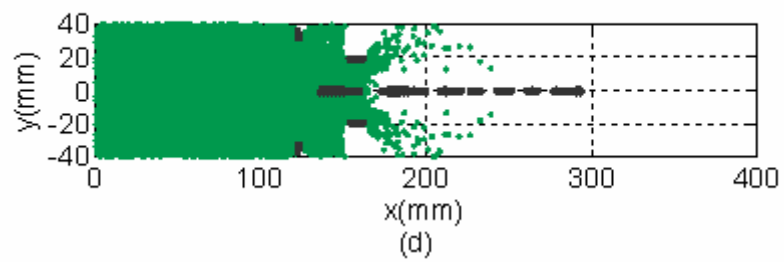
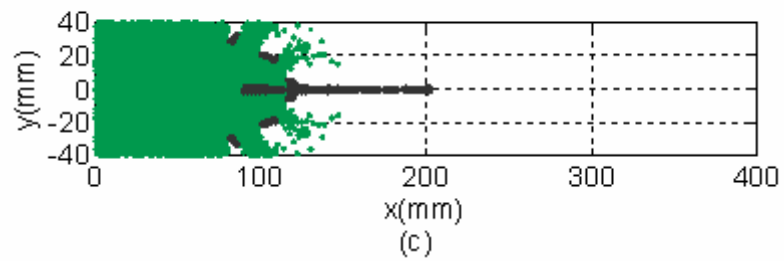
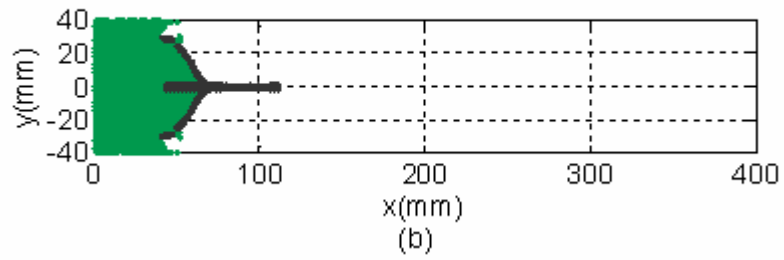
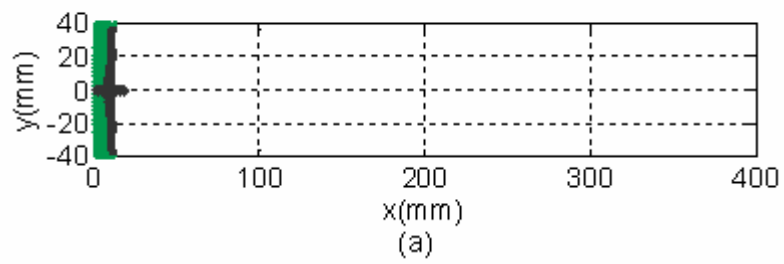


FIG. 6.47 Evolução (mm) em  $t =$  (a) 20,0, (b) 40,0, (c) 60,0, (d) 80,0 e (e) 100,0 ( $\mu\text{s}$ )

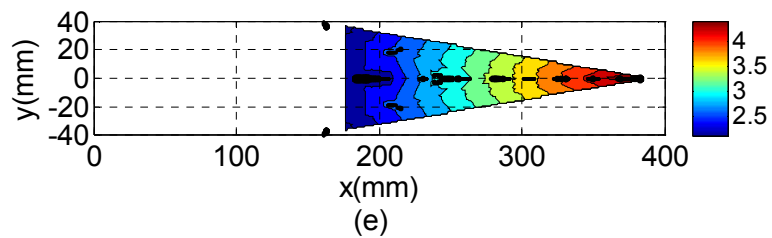
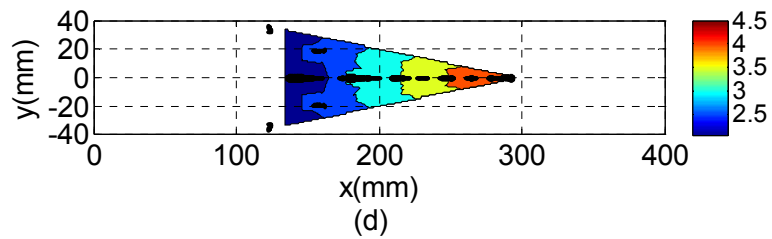
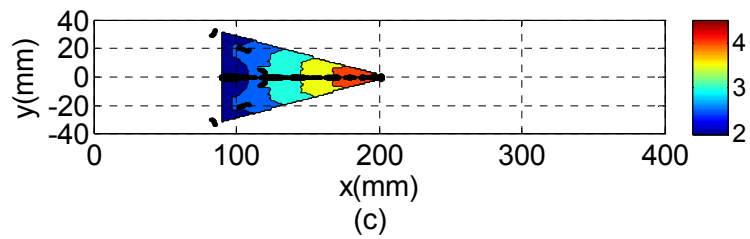
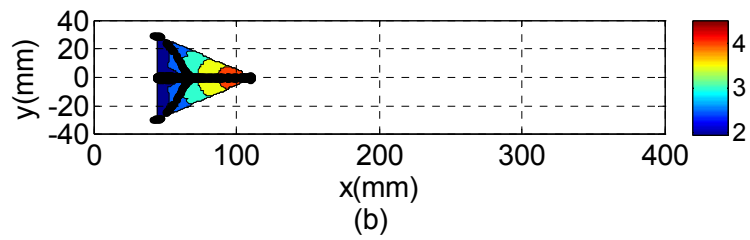
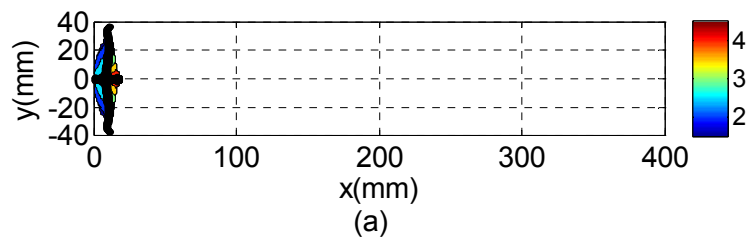


FIG. 6.48 Velocidade (km/s) em  $t =$  (a) 20,0, (b) 40,0, (c) 60,0, (d) 80,0 e (e) 100,0 ( $\mu\text{s}$ )

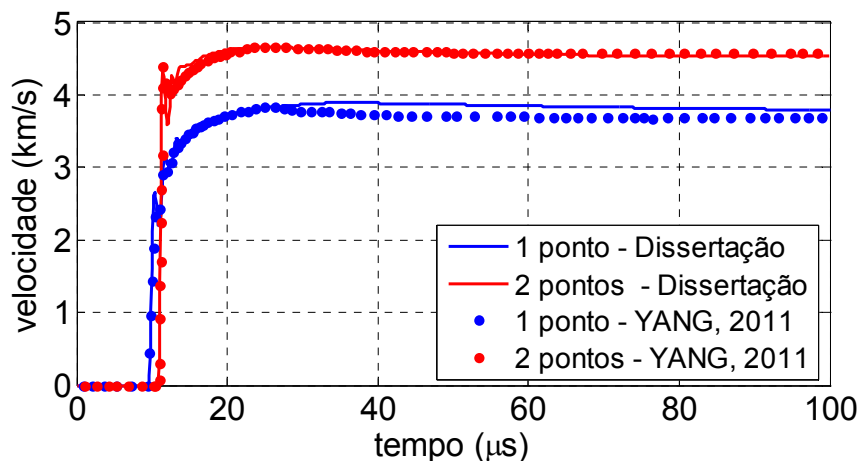
A tabela a seguir apresenta os resultados da posição e velocidade do jato em diferentes tempos:

**TAB. 6.9 Posição e velocidade do jato na iniciação em 2 pontos**

Tempo ( $\mu\text{s}$ )	$x_{jato}$ (mm)	$u_{jato}$ (km/s)
20,0	18,3312	4,6169
40,0	111,0929	4,6076
60,0	202,7191	4,5591
80,0	293,5855	4,5315
100,0	384,2272	4,5320

### 6.2.3 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DA LITERATURA

O trabalho publicado de Yang et al. apresenta em sua parte final, o gráfico da velocidade da ponta do jato em função do tempo utilizando o modelo constitutivo de Steinberg-Guinan. Como comparação, a evolução da velocidade da ponta do jato obtida nas simulações desta dissertação foram exibidos no mesmo gráfico em que os resultados do trabalho de referência foram transcritos. A FIG. 6.49 apresenta os resultados desta dissertação e os da literatura.



**FIG. 6.49 Comparação dos resultados**

Verifica-se a concordância dos valores entre os dois trabalhos. O modelo apresentado na literatura é menos conservativo do que o utilizado nesta dissertação, já que o modelo de Steinberg-Guinan avalia o endurecimento do material sujeito a altas taxas de deformação (Steinberg et al., 1980).

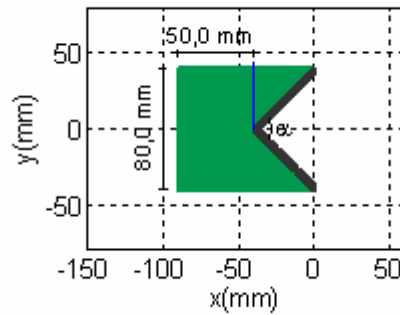
Yang et al. obteve a velocidade da ponta de 3,68 km/s e 4,57 km/s, respectivamente para iniciação em 1 (um) ponto e 2 (dois) pontos. Os valores obtidos nesta dissertação foram de 3,7975 km/s e 4,5320 km/s, respectivamente + 3,1929 % e - 0,8315 %. Na primeira simulação os valores obtidos são compatíveis, visto que os resultados obtidos foram ligeiramente superiores ao da literatura. Em contrapartida, esperava-se uma velocidade superior nas duas iniciações. O valor obtido na segunda simulação foi um pouco abaixo do apresentado no trabalho de referência, isto se deve ao comprimento característico inicial utilizado nas duas simulações. O comprimento utilizado no trabalho publicado propiciou que a ponta do jato se separasse um pouco antes da verificada nesta dissertação. E como, neste trabalho, a ponta do jato interagiu por mais tempo, resultou em velocidades menores devido ao estado de tração no jato provocado pela redução da massa específica. A queda da diferença percentual era esperada, pois as ondas de choque envolvidas apresentaram maior intensidade, e quanto maior o nível do choque mais as soluções se aproximam do modelo puramente hidrodinâmico.

### 6.3 VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Os resultados obtidos com o código construído apresentaram boa concordância com os resultados da literatura, fornecendo a confiança necessária para se utilizar em simulações de cargas ocas. Um dos objetivos desta dissertação foi avaliar a alteração de parâmetros nas cargas ocas.

A fim de poder comparar os resultados das simulações de diversas cargas, optou-se por utilizar um padrão de configuração geométrica: diâmetro utilizado de 80,0 mm; comprimento de explosivo antes do cone de 50,0 mm; revestimento com 2,0 mm de espessura; e iniciação plana. A FIG. 6.50 apresenta a carga com as dimensões especificadas. O objetivo em se definir o comprimento de explosivo antes do cone foi o de garantir que as ondas de detonação incidam da mesma forma no cone metálico para cada explosivo utilizado.



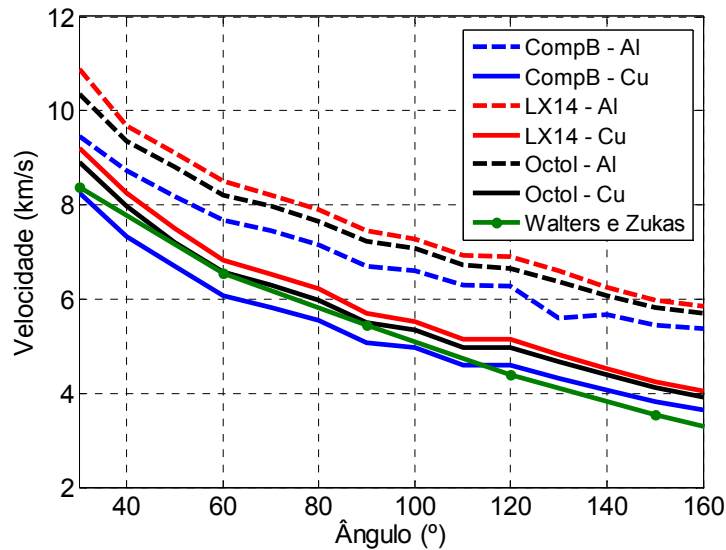


**FIG. 6.50 Carga padrão**

As simulações foram avaliadas variando o ângulo do cone ( $\alpha$ ) de  $30^\circ$  até  $160^\circ$ , com incremento de  $10^\circ$ . Ângulos muito pequenos geram uma carga muito alongada, inviável de serem fabricadas, enquanto ângulo próximos de  $180^\circ$  não apresenta revestimento, pela forma como foi concebida a carga neste trabalho. A carga foi gerada com a base do cone em  $x = 0$  e gerada para  $x < 0$ . As simulações foram realizadas com 3 (três) explosivo: Comp B, Octol e LX-14-0; os materiais utilizados no revestimento foram: Cobre OFHC  $\frac{1}{2}$  duro e Al 2024-T4. Todas as simulações foram encerradas no tempo de  $50,0 \mu\text{s}$ , onde foram comparadas. A configuração inicial das partículas foi obtida utilizando uma malha quadrada de comprimento arbitrado de  $0,4 \text{ mm}$  (subseção 5.2, página 83).

A FIG. 6.51 apresenta os resultados obtidos nas simulações, estão incluídos nos gráficos para fins qualitativos de comparação os resultados experimentais que constam no livro de Walters e Zukas (1989), onde se utilizou uma carga de diâmetro de  $32,0 \text{ mm}$  e revestimento de cobre de  $1,5 \text{ mm}$ , no livro não é feita menção sobre o explosivo utilizado, provavelmente Octol ou Comp B, comuns em cargas ocas.

O LX-14-0 apresenta maior energia e velocidade de detonação, seguido do Octol e depois do Comp B; conforme se verifica nos resultados, as velocidades dos jatos seguem igualmente este padrão. Com relação ao revestimento o cobre por ser mais denso apresenta uma velocidade menor do que a do alumínio, também verificado.

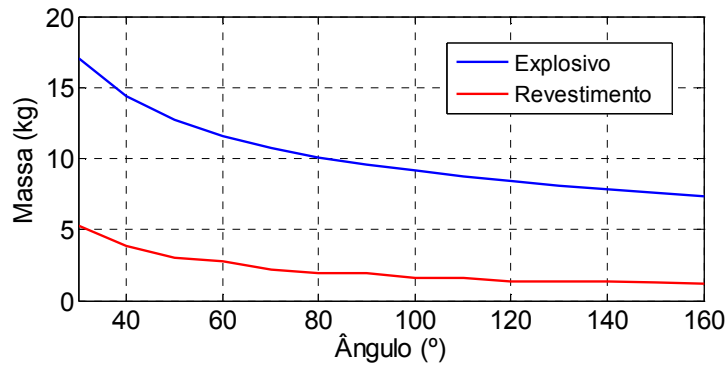


**FIG. 6.51 Velocidade do jato em função da variação de parâmetros (km/s)**

Observa-se que quanto menor o ângulo da carga maior a velocidade obtida, este fato se deve a concentração de massa específica; pois ângulos pequenos provocam maiores compressões do revestimento no eixo de simetria, e como consequência valores mais elevados de pressão. Como a região a frente da carga não está submetida aos níveis de pressão dos produtos e do próprio revestimento, parte do material do revestimento avança ao longo do eixo de simetria dando origem ao jato. O ângulo do cone determina a porção do revestimento que origina o jato.

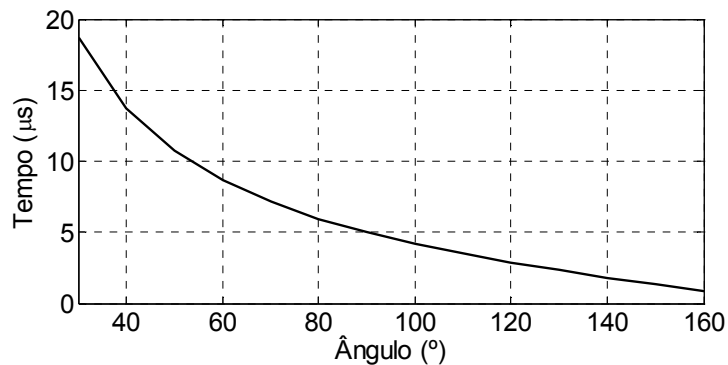
Para se avaliar melhor a influência do ângulo do cone, foi utilizada a simulação da carga de Comp B com revestimento de cobre. As demais cargas seguem o mesmo padrão, com as respectivas quantidades alteradas dependendo apenas dos materiais envolvidos, evitando assim repetições das discussões.

A FIG. 6.52 apresenta a massa de explosivo e de revestimento em função do ângulo da carga. Como mencionado, ângulos menores geram cargas maiores, com maior massa de explosivo e de revestimento. Esta figura é importante na comparação com a massa de revestimento que irá compor o jato.



**FIG. 6.52 Massa de explosivo e revestimento (kg)**

Como o ângulo define a altura do cone, estará determinando igualmente o tempo de interação entre a onda de detonação e o revestimento. Estes resultados são apresentados na FIG. 6.53 e representam o tempo de exposição aos elevados valores de frente de detonação. Como observado nos exemplos anteriores, o intervalo de tempo é muito curto onde os valores de pressão no explosivo são bastante elevados (rápida expansão). Assim, expor o revestimento por mais tempo à frente de onda é uma justificativa para obter jatos mais velozes.



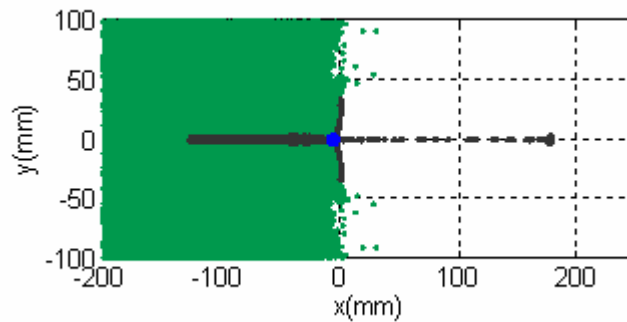
**FIG. 6.53 Tempo de interação (μs)**

Por outro lado, quanto menor o ângulo da carga maior será o ângulo entre a normal à superfície do revestimento e a velocidade de detonação. A incidência normal de uma onda de detonação com um material inerte é capaz de impor uma velocidade mais elevada do que se a incidência fosse oblíqua. Nesta situação, entretanto, a carga teria o ângulo teórico de 180°, não havendo possibilidade de convergência de material no eixo de simetria.

As incidências oblíquas são determinantes na formação do jato de carga oca. Onde para pequenos ângulos de carga, o material é mais direcionado para o eixo de simetria, comprimindo-o mais. Com o aumento do ângulo, o material inerte não é tão intensamente direcionado para o eixo, tendo como consequência valores de pressão mais moderados, gerando jatos mais lentos e espessos. É por esta razão que os projetis formados por explosão,

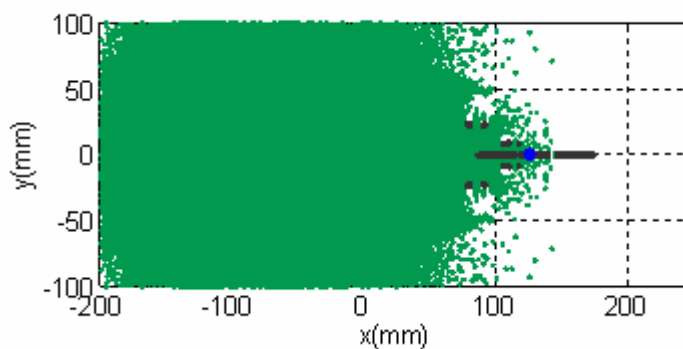
um caso particular da carga oca, apresentam ângulos elevados e sofrem o mesmo processo de colapso.

O ponto de colapso na teoria tradicional define a divisão entre o jato e o resíduo. É marcado pelo maior valor de pressão, e está presente enquanto o revestimento estiver sendo impulsionado contra o eixo de simetria. A FIG. 6.54 apresenta o ponto de colapso na cor azul para a carga de ângulo 30°.



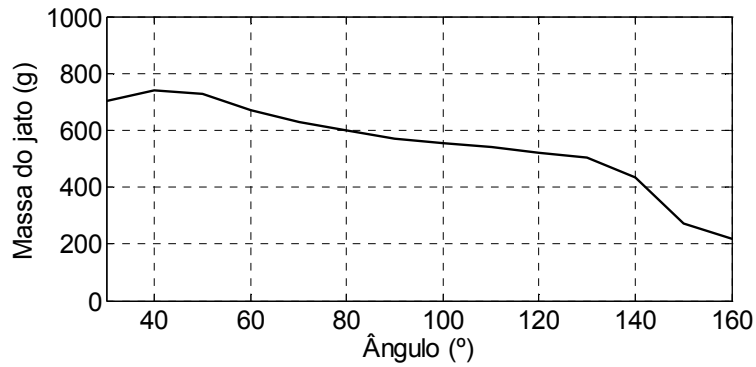
**FIG. 6.54 Ponto de colapso na carga de 30°**

Para cargas com ângulos maiores, onde o ponto de colapso não é mais definido neste passo de tempo, e a partícula com maior valor de pressão pode estar em qualquer ponto das partículas do revestimento, tendo em vista a dinâmica do conjunto, optou-se por um ponto no prolongamento do material inerte que foi espalhado pela detonação, oriundo das paredes do cone. A FIG. 6.55 apresenta esta situação para a carga de 120°.



**FIG. 6.55 Ponto de colapso na carga de 120°**

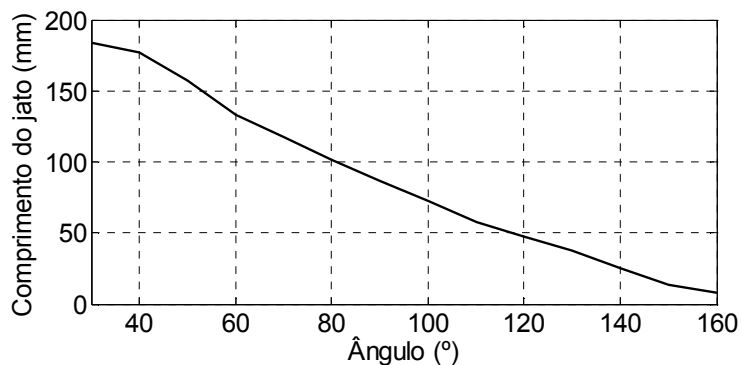
Uma vez definido o ponto inicial do jato, pode-se definir a massa de material contida no jato, bem como o comprimento do jato. A FIG. 6.56 exibe a massa do jato em função do ângulo da carga.



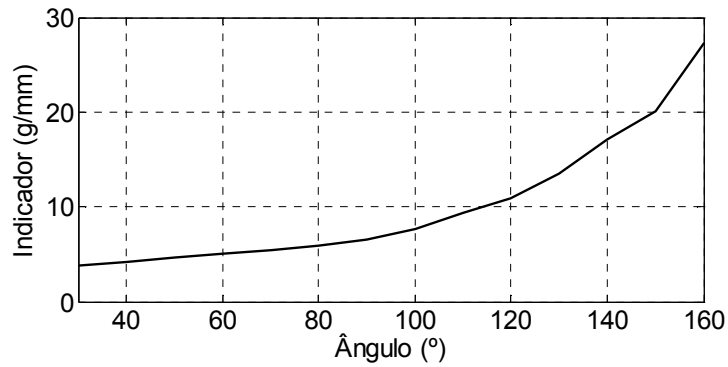
**FIG. 6.56 Massa do jato (g)**

É importante notar que as massas dos jatos para ângulos pequenos apresentaram os maiores valores, exceto no início. A simulação de 30° apresentou massa de 703,0 g enquanto que a de 40° foi de 740,1 g. Este fato é explicável devido às partículas serem mais aceleradas na componente vertical, ocasionando maiores níveis de compressão, que serão responsáveis por provocar uma aceleração maior em um menor número de partículas, reduzindo assim a massa do jato. Com o aumento do ângulo e da contribuição horizontal, uma porção maior do revestimento é acelerada ao longo do jato, reduzindo a massa específica na região do colapso, diminuindo os níveis de pressão e obtendo menores velocidades, porém um pouco mais de massa. Continuando o aumento do ângulo, se verifica novamente uma queda na massa do jato, como consequência direta da massa total do revestimento apresentada na FIG. 6.52.

A FIG. 6.57 exhibe o comprimento do jato para cada ângulo. Associando este gráfico com o da massa do jato, FIG. 6.56, comprova-se que ângulos menores originam jatos menos densos. A razão entre a massa e o comprimento do jato é um indicador da distribuição de massa no jato. Esta razão é apresentada na FIG. 6.58.

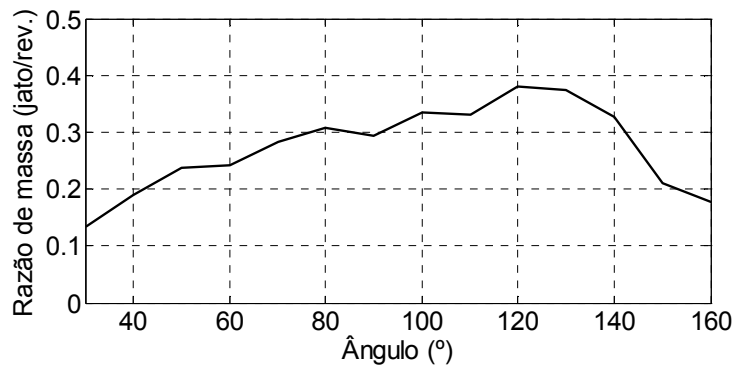


**FIG. 6.57 Comprimento do jato (mm)**



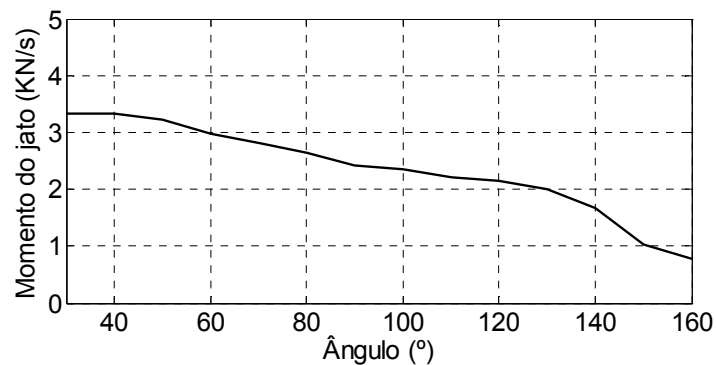
**FIG. 6.58 indicador de densidade do jato (g/mm)**

A FIG. 6.59 apresenta a razão entre a massa do jato e a do revestimento. Conclui-se que a massa do jato representa apenas uma porção da massa do revestimento original. Para a faixa de trabalho usual das cargas ocas (40° - 60°), a fração de massa do jato está em torno de 25 % do revestimento original.

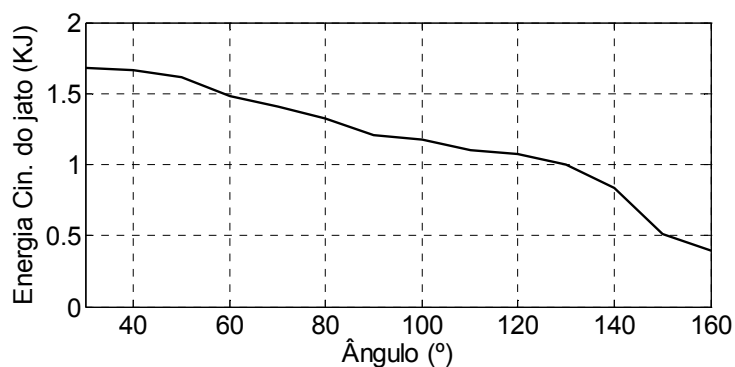


**FIG. 6.59 Razão de massa do jato pelo revestimento**

A FIG. 6.60 apresenta o gráfico da quantidade de movimento do jato, verifica-se que este valor decresce com o ângulo devido à redução da massa e da velocidade do jato. A FIG. 6.61 exibe as informações de energia cinética, observa-se igualmente a redução devido à redução de massa e velocidade.



**FIG. 6.60 Quantidade de movimento do jato (KN/s)**



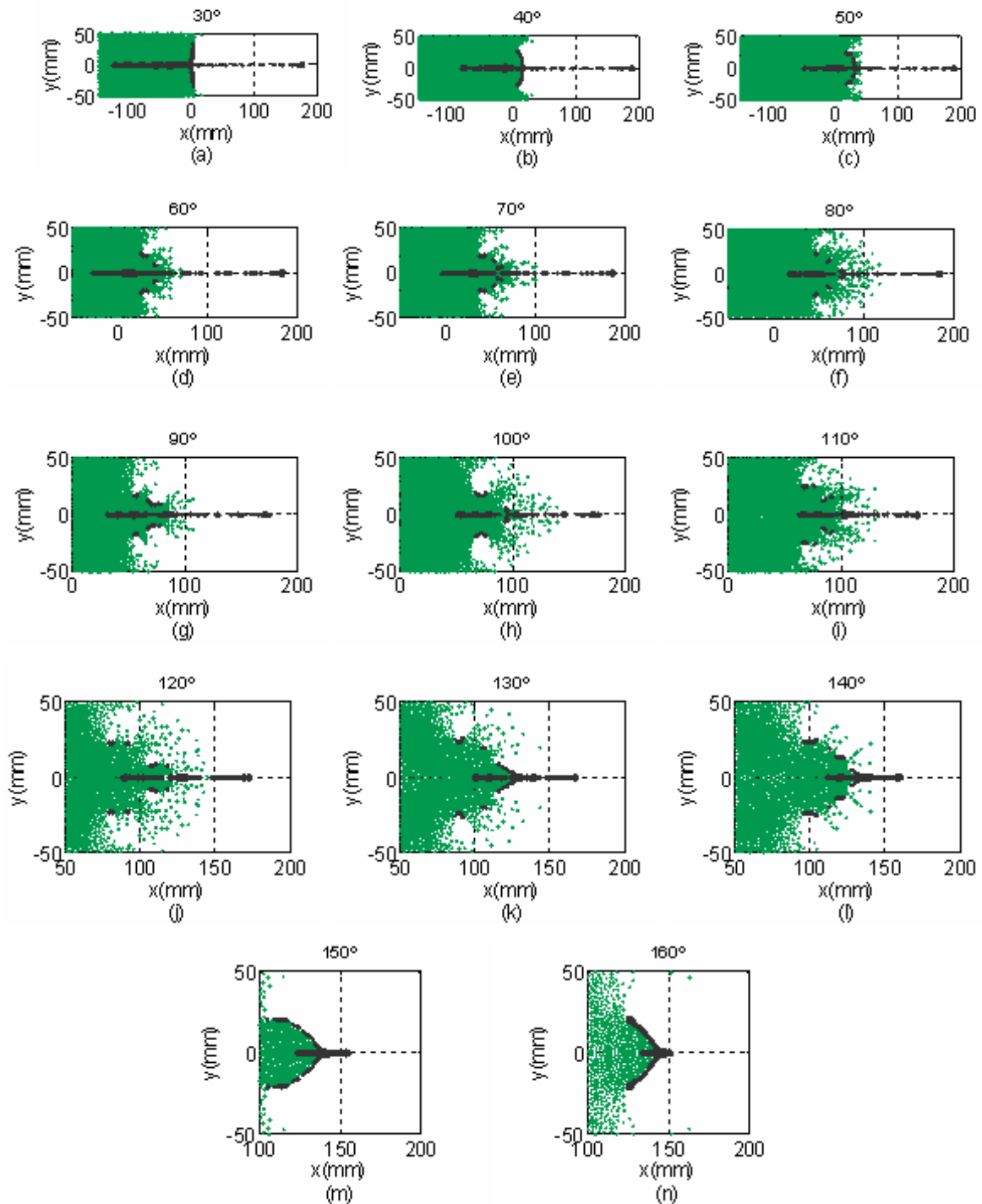
**FIG. 6.61 Energia do jato (KJ)**

O jato para fins de amplificação da capacidade de penetração deve possuir momentum e energia elevados para transmitir ao alvo. Por este motivo, o ângulo nas aplicações militares está situado em torno de 45°, visto apresentar os maiores valores destas grandezas, conforme FIG. 6.60 e FIG. 6.61. O jato deve apresentar velocidade elevada para amplificar a perfuração, o que confirma a faixa dos menores ângulos apresentados na FIG. 6.51. Desta forma, os resultados obtidos apontam para valores “ótimos” na faixa de 40° a 50°, considerando inclusive que quanto menor o ângulo, mais difícil será o processo de fabricação, e que a massa do jato é a maior para esta faixa, conforme FIG. 6.56, convergindo para os valores usuais.

Jatos muito espessos possuirão capacidade de perfuração reduzida, devido ao aumento da área de transmissão de onda de choque do jato para o alvo; jatos excessivamente finos tenderam a empilhar e, por conseqüência, desviar ao atingir o alvo, reduzindo igualmente a capacidade de penetração.

A fim de melhor verificar a penetração, é recomendável que simulações que envolvam o alvo sejam realizadas a fim de se definir o ângulo “ótimo” da carga. O procedimento numérico segue a mesma abordagem adotada para o colapso, devendo-se acrescentar as partículas para simular o alvo. O inconveniente é que o número de partículas utilizadas na simulação sofre um aumento considerável, aumentando significativamente o custo computacional. Cada ângulo, explosivo e revestimento correspondem a uma simulação, o que torna muito demorado a obtenção destes resultados.

O resultado das simulações no tempo de 50,0  $\mu$ s é apresentado na FIG. 6.62 (a) até (n), exibindo o jato para os ângulos de 30° até 160°. Verifica-se, que embora a velocidade da ponta do jato seja superior na carga de 30°, a posição da ponta do jato não é a maior, isto se deve a aceleração dependente do tempo imposta às partículas da ponta, que é resultado da interação de todo o conjunto e não se dá ao mesmo tempo para todas as configurações.



**FIG. 6.62** Configuração do jato  $t = 50,0 \mu\text{s}$ : (a)  $30^\circ$  até (n)  $160^\circ$

É possível verificar nos resultados das simulações que as características dos projetis formados pro detonação são obtidas para os maiores ângulos de carga.



## 7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 7.1 CONCLUSÕES

Com base no trabalho desenvolvido, considerando as hipóteses adotadas e os resultados obtidos, pode-se concluir que:

1. O método SPH (“*Smoothed Particle Hydrodynamics*”) permite modelar o fenômeno do colapso do revestimento metálico da carga oca de modo bastante satisfatório;
2. O código desenvolvido foi avaliado e apresentou resultados em concordância com aqueles disponíveis na literatura, conforme indicado nas seções 6.1 e 6.2 (páginas 90 e 112), respectivamente;
3. A velocidade da ponta do jato, em função do tempo, apresentou resultados coerentes com a dinâmica do colapso do revestimento metálico, sendo acelerado e retardado até que a velocidade se estabilizasse (página 112);
4. Os resultados do equacionamento utilizado neste trabalho convergiram quando comparadas à solução das equações desprezando o desviador (subseção 6.1.4, página 111) e ao equacionamento mais complexo com o modelo constitutivo de Steinberg-Guinan incorporado (subseção 6.2.3, página 126);
5. O tensor desviador empregado nas simulações apresentou pouca influência no resultado final. Indicando que o processo de colapso é hidrodinâmico e, caso desejado, as tensões desviadoras podem ser desprezadas em fenômenos de ondas de choque com pressões elevada (página 127);
6. O método de detonação plana é mais eficiente quando comparado à detonação pontual no eixo de simetria da carga, permitindo jatos mais velozes (página 104);
7. Os explosivos com maior energia de detonação são capazes de produzir jatos mais velozes, o que permite maior poder de penetração (página 128);
8. Materiais do revestimento com maior massa específica produzem jatos mais lentos, porque apresentam maior inércia e em consequência uma menor aceleração (página 128);
9. O ângulo do cone tem forte influência no colapso. Ângulos ótimos se situam em torno de 45°. Ângulos mais fechados produzem jatos mais finos e perdem a capacidade de

penetração, enquanto que à medida que o ângulo aumente diminuem a capacidade de produzir jatos uniformes (página 134);

10. As características do jato envolvem a escolha do material do revestimento e do explosivo, afetando as curvas de energia cinética, momentum e velocidade do jato (página 128);

11. O resultado permite acompanhar o movimento das partículas, operando com um sistema de coordenadas Lagrangeanas, ultrapassando os problemas de distorção da malha devido às elevadas deformações a que o sistema é submetido (página 34);

12. O código computacional desenvolvido permite incluir novas equações constitutivas que possam melhor descrever o fenômeno em estudo; e

13. O espelhamento em relação ao eixo de simetria se mostrou eficaz, reduzindo quase que a metade o número de partículas envolvidas na simulação.

## 7.2 SUGESTÕES

A fim de se dar continuidade a este trabalho, deve-se buscar a implementação de modelos mais completos que representem com maior fidelidade o colapso do cone de carga oca. A seguir são apresentadas propostas a serem estudadas visando dar continuidade aos trabalhos até aqui desenvolvidos:

1. Equacionar o SPH para o sistema de coordenadas cilíndricas com simetria axial;
2. Adaptar o código para simulações tridimensionais, com a finalidade de se avaliar efeitos de falta de simetria como: alinhamento do cone, imperfeições de fabricação etc;
3. Aprimorar o mecanismo de busca de pares de interações do SPH, a fim de que o custo computacional seja reduzido;
4. Realizar uma análise de convergência em função do número de partículas envolvidas nas simulações;
5. Incorporar o material que envolve o explosivo nas cargas reais;
6. Introduzir os alvos nas simulações;
7. Avaliar os efeitos do diâmetro da carga oca nas perfurações em alvos;
8. Acrescentar modelos constitutivos como o Steinberg-Guinan ou Johnson-Cook, para descrever mais realisticamente o comportamento dos materiais;

9. Introduzir os efeitos da compressão dinâmica do explosivo não detonado pela EDE de Mie-Grüneisen; e

10. Alterar a configuração do revestimento a fim de se buscar um perfil melhor que o cônico para uma aplicação específica.

## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKHAVAN, Jacqueline. **The Chemistry of Explosives**. 2. ed. Cambridge(mass). The Royal Society Of Chemistry, 2004. 180p. ISBN 0854046402.

AZEVEDO, Ricardo L. e Alves, Marcílio. **Numerical simulation of soft-body impact on GFRP laminate composites: mixed SPH-FE and pure SPH approaches**. Symposium on Solid Mechanics, Mechanics of Solids in Brazil, Vol. 2, p. 15 – 30, 2009.

BARBOUR, Richard T.. **Pyrotechnics in Industry**. New York, Mac Graw Hill, 1981, 190p.

BARROSO, Dalton Ellery Girão. **Energia Nuclear em Microsegundos: a Matéria sob Condições Extremas de Temperatura e Pressão**, Rio de Janeiro, Brasil: IME, Fundação Ricardo Franco, 2004. 430p. ISBN: 8598014021

BIRKHOFF G., MCDOUGALL D. P., PUGH E. M. e Taylor G.. **Explosives with lined cavities**, Journal of Applied Physics, Vol.19, p. 563 – 582, Junho de 1948.

BORTOLAN NETO, Luiz. **Análise Numérica de Dutos Sujeito à Flambagem**. 2009. 141p. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná, 2009.

BØRVE S., OMANG M. e TRULSEN J., **Regularized Smoothed Particle Hydrodynamics: A New Approach to Simulationg Magnetohydrodynamic Shocks**, The Astrophysical Journal, Vol.561, p. 82 – 93, 2001.

BROOKSHAW, Leigh. **Smooth Particle Hydrodynamics in cylindrical coordenates**. Anzian Journal, Vol.44, p. C114 – C139, 2003.

COOPER, Paul W.. **Explosives engineering**. New York, Wiley-VCH, 1997. 460p. ISBN 0471186368.

DAVIS, T. L.. **Chemistry of Powder and Explosives**. New York, 1950. 490 p.

DAVIS, Willian C.. **High Explosives: The Interaction of Chemistry and Mechanics**. Los Alamos Science, Vol. 2, Nr. 1, 1981.

GUIMARÃES, Roméro. **Estudo do Comportamento de Carga Oca Cônica Utilizando Cone Moldado a Partir de Pós Metálicos**. 2009. 107p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2009.

GÜREL, Eser. **Modeling and Simulation of Shaped Charges**. 2009, 150p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Middle East Technical University, 2009.

JOHNSON, W. e MELLOR, P. B.. **Engineering Plasticity**. Halsted Press, 1983. ISBN 0-470-20012-X

JOHNSON, Gordon R., STRYK, Robert A. e Beissel, Stephen R.. **SPH for High Velocity Impact Computations**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, Nr 1, p. 347 – 373, 1996

LEE, Wen Ho. **Computer Simulation of Shaped Charge Problems**. New Jersey, World Scientific, 2006. 380p. ISBN 9812566236

LIBERSKY, L. D., PETSCHKE, A. G., CARNEY, T. C., HIPPI, J. R. e ALLAHADADI, F. A.. **High Strain Lagrangian Hydrodynamics: A Three-Dimensional SPH Code for Dynamic Material Response**. Journal of Computational Physics, Vol. 109, p. 67 – 75, 1993.

LIU, G. R. e LIU, M. B.. **Smoothed Participle Hydrodynamics: a Meshfree Participle Method**. New Jersey, World Scientific, 2007. 449p. ISBN 9-81238-456-1

LIU, M. B., LIU, G. R., LAM, K. Y. e ZONG, Z.. **Smoothed Particle Hydrodynamics for Numerical Simulation of Underwater Explosion**. Computational Mechanics, Vol. 30, p. 106 – 118, 2003a.

LIU, M. B., LIU, G. R., LAM, K. Y. e ZONG, Z.. **Meshfree Particle Simulation of the Detonation Process for High Explosives in Shaped Charge Unlined Cavity Configurations**. Shock Waves, Vol. 12, p. 509 – 520, 2003b.

LIU, G. R. e LIU, M. B.. **Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments**. Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 17, Nr 1, p. 25 – 76, 2010.

LUCY, L. B. **A numerical approach to testing of fission hypothesis**. Astronomical Journal, Vol. 82, p. 1013 – 1024, 1977.

MASE, George E.. **Theory and Problems of Continuum Mechanics**. Schaum's outline series, McGraw-Hill, 1970. ISBN 07-040663-4

MENDELSON, Alexander. **Plasticity: Theory and Application**. Malabar, Florida: Robert e Krieger Publishing Company, 1983. 353p. ISBN 0-89874-582-9

MEYERS, Marc A.. **Dynamic Behavior of Materials**. John Wiley & Sons, Inc., 1994.

MONAGHAN, J. J. e GINGOLD, R. A.. **Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and applications to non-spherical stars**. Monthly Notice of the Royal Astronomical Society, Vol. 181, p. 375 – 389, 1977.

MONAGHAN, J. J. e GINGOLD, R. A.. **Shock Simulation by the particle method SPH**. Journal of Comp. Physics, Vol. 52, p. 374 – 383, 1983.

MONAGHAN, J. J.. **Particle Methods for Hydrodynamics**. Computer Physics Reports, Vol. 3, Nr. 2, p. 71 – 124, 1985.

MONAGHAN, J. J. e PONGRACIC, H.. **Artificial Viscosity for Particle Methods**, Journal of Applied Numerical Mathematics, Vol.1, p. 187 – 194, 1985.

MONAGHAN, J. J.. **An Introduction to SPH**. Computer Physics Communications, Vol.48, p. 89 – 96, 1988.

OTT, Frank e SCHNETTER, Erik. **A Modified SPH Approach for Fluids with Large Density Differences**, Arxiv Preprint Physics 0303112v3, 2008.

QIANG, Hongfu, WANG, Kunpeng e GAO Weiran. **Numerical Simulation of Shaped Charge Using Multi-Phase SPH Method**, Trans. Tianjin University, Vol.14, p. 495 – 499, 2008.

RINEHART, J. S.. **Stress Transient in Solids**, Santa Fé, New Mexico, Hyperdynamics, 1975, ISBN 0-913270-48-2

STEINBERG, D. J., Cochran, S. G. e Guinan, M. W.. **A Constitutive Model For Metals Applicable at High-Strain Rate**, Journal of Applied Physics, Vol.51, Nr 3, p. 1498 – 1504, março de 1980.

SWEGLE, J. W. e ATTAWAY, S. W.. **On the Feasibility of Using Smoothed Particle Hydrodynamics for Underwater Explosion Calculation**. Computational Mechanics, Vol. 17, p. 151 – 168, 1995.

TIMOSHENKO, S. P. e GOODIER, J. N.. **Teoria da Elasticidade**. 3 ed. Rio de Janeiro, Guanabara dois, 1980. 545p

WALTERS, W. P. e ZUKAS, J. A.. **Fundamentals of shaped charges**. Nova York: John Wiley & Sons, 1989. 398 p

WALTERS, W. P.. **The Shaped Charge Concept, Part I. Introduction**. Aberdeen Proving Ground, Maryland, Ballistic Research Laboratory, Technical Report BRL-TR-3142, agosto de 1990.

WALTERS, W. P.. **A Brief History of Shaped Charges**. Aberdeen Proving Ground, Army Research Laboratory, Technical Report ARL-RP-232, dezembro de 2008.

WILKINS, Mark L., **Calculation of Elastic-plastic flow**. Livermore, California, Lawrence Radiation Laboratory, University of California. Contract No. W-7405-eng-48, 1963.

YANG, Gang, HAN, Xu e HU De'na. **Computer Simulation of two-dimensional linear-shaped charge jet using smoothed particle hydrodynamics**, Engineering Computations, Vol.28, Nr 1, p. 58 – 75, 2011.

ZEL'DOVICH, Ya. B. e RAIZER, Yu. P.. **Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamics Phenomena**. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2002. 944p. ISBN 0486420027.

ZUKAS, J. A., NICHOLAS, T., SWIFT, H. F., GRESZCZUK, L. B. e CURRAN, D. R.. **Impact dynamics**. New York 1982. 452 p. ISBN 0471086770.

ZUKAS, Jonas A.. **Introduction to Hydrocodes**. Baltimore Elsevier, 2004. 313p. ISBN 0080443486.



## 9 APÊNDICES

## 9.1 APÊNDICE 1: PARÂMETROS DE DIVERSOS MATERIAIS

Valores de referência dos parâmetros de Hugoniot e do coeficiente de Mie-Grüneisen para alguns materiais. EDE do material dada pela EQ. 3.60:

**TAB. 9.1 Parâmetros de diversos materiais**

Nr	Material	$\rho_0$ (g/cm <sup>3</sup> )	$c_0$ (km/s)	$s_1$	$s_2$ (s/km)	$\gamma_0$	$G$ (GPa)	$\sigma_y$ (GPa)
<b>ELEMENTOS</b>								
01	Antimônio	6,700	1,983	1,652	-	0,60	-	-
02	Bário <sup>1</sup>	3,705	0,700	1,600	-	0,55	-	-
03	Bérblio	1,851	7,998	1,124	-	1,16	151,0	0,33
04	Bismuto	9,836	1,826	1,473	-	1,10	-	-
05	Cadmo	8,639	2,434	1,684	-	2,27	-	-
06	Cálcio	1,547	3,602	0,948	-	1,20	-	-
07	Césio	1,826	1,048	1,043	0,051	1,62	-	-
08	Chumbo	11,350	2,051	1,460	-	2,77	8,6	0,008
09	Cobalto	8,820	4,752	1,315	-	1,97	-	-
10	Cobre	8,930	3,940	1,489	-	1,99	47,7	0,12
11	Cobre OFHC ½ duro	8,930	3,940	1,489	-	1,96	47,7	0,12
12	Cromo	7,117	5,173	1,473	-	1,19	-	-
13	Enxofre	2,020	3,223	0,959	-	-	-	-
14	Estanho	7,287	2,608	1,486	-	2,11	-	-
15	Estrôncio <sup>2</sup>	2,628	1,700	1,230	-	0,41	-	-
16	Ferro <sup>3</sup>	7,850	3,574	1,920	-0,068	1,69	-	-
17	Germânio <sup>4</sup>	5,328	1,750	1,750	-	0,56	-	-
18a	Háfnio <sup>5</sup>	12,885	2,954	1,121	-	0,98	-	-
18b	Háfnio <sup>6</sup>	12,885	2,453	1,353	-	0,98	-	-
19	Índio	7,279	2,419	1,536	-	1,80	-	-
20	Iródio	22,484	3,916	1,457	-	1,97	-	-
21	Lítio	0,530	4,645	1,133	-	0,81	-	-
22	Magnésio	1,740	4,492	1,263	-	1,42	16,5	0,19
23	Mercúrio	13,540	1,490	2,047	-	1,96	-	-

<sup>1</sup> Pressão superior a 115 GPa e velocidade de 2,54 km/s;

<sup>2</sup> Pressão superior a 150 GPa e velocidade de 3,63 km/s;

<sup>3</sup> Velocidade de partícula acima de 5,0Km/s;

<sup>4</sup> Pressão superior a 300 GPa e velocidade de 4,2 km/s;

<sup>5</sup> Pressão abaixo de 400 GPa e velocidade de 3,86 km/s;

<sup>6</sup> Após transição;

Nr	Material	$\rho_0$ (g/cm <sup>3</sup> )	$c_0$ (km/s)	$s_1$	$s_2$ (s/km)	$\gamma_0$	$G$ (GPa)	$\sigma_y$ (GPa)
24	Molibdênio	10,206	5,124	1,233	-	1,52	-	-
25	Nióbio	8,586	4,438	1,207	-	1,47	37,7	0,70
26	Níquel	8,874	4,602	1,437	-	1,93	85,5	0,14
27	Ouro	19,224	3,056	1,572	-	2,97	28,0	0,02
28	Paládio	11,991	3,948	1,588	-	2,26	-	-
29	Platina	21,419	3,598	1,544	-	2,40	63,7	0,03
30	Potássio	0,860	1,974	1,179	-	1,23	-	-
31	Prata	10,490	3,329	1,596	-	2,38	-	-
32	Rênio	21,021	4,184	1,367	-	2,44	-	-
33	Ródio	12,428	4,807	1,376	-	1,88	-	-
34	Rubídio	1,530	1,134	1,272	-	1,06	-	-
35	Sódio	0,968	2,629	1,223	-	1,17	-	-
36	Tálio	11,840	1,862	1,523	-	2,25	-	-
37	Tântalo	16,654	3,414	1,201	-	1,60	69,0	0,77
38a	Titânio <sup>7</sup>	4,528	5,220	0,767	-	1,09	43,4	0,71
38b	Titânio <sup>8</sup>	4,528	4,877	1,049	-	1,09	-	-
39	Tório	11,680	2,133	1,263	-	1,26	-	-
40	Tungstênio	19,224	4,029	1,237	-	1,54	160,0	2,2
41	Urânio	18,950	2,487	2,200	-	1,56	86,7	0,40
42	Vanádio	6,100	5,077	1,201	-	1,29	-	-
43	Zinco	7,138	3,005	1,581	-	1,96	-	-
44a	Zircônio <sup>9</sup>	6,505	3,757	1,018	-	1,09	-	-
44b	Zircônio <sup>10</sup>	6,505	3,296	1,271	-	1,09	-	-
<b>LIGAS</b>								
45	Aço inoxidável	7,896	4,569	1,490	-	2,17	77,0	0,34
46	Aço V250	8,129	3,98	1,58	-	1,60	-	-
47	Alumínio 2024	2,785	5,328	1,338	-	2,00	-	-
48	Alumínio 6061-T6	2,703	5,24	1,40	-	1,97	27,6	0,29
49	Alumínio 7075-T6	2,804	5,20	1,36	-	2,20	-	-
50	Alumínio T-921	2,833	5,041	1,420	-	2,10	-	-
51	Bronze	8,450	3,726	1,434	-	2,04	-	-
52	Liga de lítio e magnésio	1,403	4,247	1,284	-	1,45	-	-
53	Liga de magnésio	1,775	4,516	1,256	-	1,43	-	-

<sup>7</sup> Pressão abaixo de 175 GPa e velocidade de 5,74 km/s;

<sup>8</sup> Após transição;

<sup>9</sup> Pressão abaixo de 260 GPa e velocidade de 4,63 km/s;

<sup>10</sup> Após transição;

Nr	Material	$\rho_0$ (g/cm <sup>3</sup> )	$c_0$ (km/s)	$s_1$	$s_2$ (s/km)	$\gamma_0$	$G$ (GPa)	$\sigma_y$ (GPa)
54	U 3% em peso de Mo	18,450	2,565	2,20	-	2,03	-	-
<b>SINTÉTICOS</b>								
55	Adiprene	0,927	2,332	1,536	-	1,48	-	-
56	Acrílico (plexiglass)	1,186	2,598	1,516	-	0,97	-	-
57	Borracha (polyrubber)	1,010	0,852	1,865	-	1,50	-	-
58	Epóxi <sup>11</sup>	1,186	2,730	1,443	-	1,13	-	-
59	Epóxi <sup>12</sup>	1,186	3,234	1,225	-	1,13	-	-
60	Fenoxi	1,178	2,266	1,698	-	0,55	-	-
61	Lucite	1,181	2,260	1,186	-	0,75	-	-
62	Náilon	1,140	2,570	1,849	0,081	1,07	-	-
63	Neoprene	1,439	2,2785	1,419	-	1,39	-	-
64	Parafina	0,918	2,908	1,506	-	1,18	-	-
65	Poliestireno	1,044	2,746	1,319	-	1,18	-	-
66	Polietileno	0,915	2,901	1,481	-	1,64	-	-
67	Poliuretano	1,265	2,486	1,577	-	1,55	-	-
68	Silicone silastic RTV521	1,372	0,218	2,694	- 0,208	1,40	-	-
69	Teflon	2,153	1,841	1,707	-	0,59	-	-

Valores obtidos nas referências: Meyers (1994), Lee (2006), Steinberg et al. (1980)

<sup>11</sup> Pressão abaixo de 240 GPa e velocidade de 7,0Km/s

<sup>12</sup> Após transição;

## 9.2 APÊNDICE 2: PARÂMETROS DE AJUSTE DA EQUAÇÃO JWL

Valores de referência para ajuste da EDE. Na tabela  $\rho_0$  é a massa específica do explosivo não reagido,  $u_D$  é a velocidade de detonação,  $e_D$  é a energia de detonação e  $A, B, R_1, R_2$  e  $w$  são parâmetros de ajuste.

**TAB. 9.2 Parâmetros de ajuste da equação de estado de JWL**

Explosivo	$\rho_0$ (g/cm <sup>3</sup> )	$u_D$ (km/s)	$e_D$ (MJ/kg)	$A$ (GPa)	$B$ (GPa)	$R_1$	$R_2$	$w$
Comp B	1,717	7,98	4,95	524,2	7,678	4,20	1,10	0,34
Comp C4	1,601	8,19	5,62	609,8	12,95	4,50	1,40	0,25
Ciclotol 77/23	1,754	8,25	5,24	603,4	9,924	4,30	1,10	0,35
H-6	1,760	7,47	5,85	758,1	8,513	4,90	1,10	0,20
HMX	1,891	9,11	5,55	778,3	7,071	4,20	1,00	0,30
LX-04-1	1,865	8,47	5,09	849,8	15,277	4,65	1,30	0,35
LX-07	1,865	8,64	5,36	871,0	13,896	4,60	1,15	0,30
LX-09	1,838	8,84	5,71	868,4	18,711	4,60	1,25	0,25
LX-10	1,875	8,82	5,54	880,2	17,437	4,60	1,20	0,30
LX-11	1,875	8,32	4,80	779,1	10,668	4,50	1,15	0,30
LX-13	1,540	7,35	4,20	2714,0	17,930	7,00	1,60	0,35
LX-14-0	1,835	8,80	5,56	826,1	17,240	4,55	1,32	0,36
LX-17-0	1,900	7,60	3,63	446,0	13,399	3,85	1,30	0,46
Nitro-metano	1,128	6,28	4,52	209,2	5,689	4,40	1,20	0,30
Octol	1,821	8,48	5,27	748,6	13,380	4,50	1,20	0,38
PBX-9010	1,787	8,39	5,03	581,4	6,801	4,10	1,00	0,35
PBX-9011	1,777	8,50	5,01	634,7	7,998	4,20	1,00	0,30
PBX-9404-3	1,840	8,80	5,50	852,4	20,493	4,60	1,35	0,25
PBX-9407	1,600	7,91	5,37	573,19	14,639	4,60	1,40	0,32
PBX-9501	1,840	8,80	5,50	852,40	18,02	4,60	1,30	0,38
PBX-9502	1,895	7,62	4,06	460,3	9,544	4,00	1,70	0,48
PETN	1,770	8,30	5,71	617,0	16,926	4,40	1,20	0,25
Tetril	1,730	7,91	4,74	586,8	10,671	4,40	1,20	0,28

Explosivo	$\rho_0$ (g/cm <sup>3</sup> )	$u_D$ (km/s)	$e_D$ (MJ/kg)	$A$ (GPa)	$B$ (GPa)	$R_1$	$R_2$	$w$
TNT	1,630	6,93	4,29	371,2	3,231	4,10	1,20	0,30
Deta Sheet C	1,480	7,00	3,69	349,0	4,524	4,10	1,20	0,30

Lee, 2006