

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

OBERDAN MIGUEL RODRIGUES DE SOUZA

**ANÁLISE DE INSTABILIDADES LINEARES EM
CAMADAS DE MISTURA PLANAS DUPLAS E COMPRESSÍVEIS**

**Rio de Janeiro
2011**

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

OBERDAN MIGUEL RODRIGUES DE SOUZA

**ANÁLISE DE INSTABILIDADES LINEARES EM CAMADAS DE MISTURAS
PLANAS DUPLAS E COMPRESSÍVEIS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Leonardo S. de B. Alves, Ph.D

Rio de Janeiro
2011

c2011

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmар ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

620.107 Souza, Oberdan Miguel Rodrigues de
5729a Análise de Instabilidades Lineares em Camadas de Misturas Planas Duplas e Compressíveis/ Oberdan Miguel Rodrigues de Souza. - Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2011.
68p.: il.

Dissertação: (mestrado) - Instituto Militar de Engenharia-
Rio de Janeiro, 2011.

1. Engenharia Mecânica. 2. Mecânica dos Fluidos. 3. Métodos Numéricos 4. Estabilidade Hidrodinâmica
I. Alves, Leonardo S. de B. II. Título III. Instituto Militar de Engenharia

620.107

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

OBERDAN MIGUEL RODRIGUES DE SOUZA

**ANÁLISE DE INSTABILIDADES LINEARES EM CAMADAS DE MISTURAS
PLANAS DUPLAS E COMPRESSÍVEIS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Leonardo S. de B. Alves, Ph.D

Aprovada em 18 de maio de 2011 pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Leonardo S. de B. Alves, Ph.D do IME - Presidente

Prof. Marcio T. de Mendonça, Ph.D. do ITA

Prof. José da R. M. Pontes, Ph.D. da UFRJ

Prof. Rodrigo O. de C. Guedes, Ph.D. do IME

Rio de Janeiro
2011

A minha família que sempre me apoiou incondicionalmente em todas as etapas da minha vida. Aos meus amigos Leandro, Rômulo, Maj Eduardo, Renan, Vanessa e Flávio, que sempre estiveram comigo em todas as etapas do mestrado e sem os quais nunca poderia ter concluído essa dissertação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que me motivou a tornar o sonho em realidade. Meus orientadores pela dedicação e apoio em todas as etapas da pesquisa. Meus amigos da pós-graduação do IME que sempre me apoiaram. Meus familiares, que acreditaram sempre no meu potencial de lutar pelos meus sonhos.

"Aqui, no entanto, nós não olhamos para trás por muito tempo, nós continuamos seguindo em frente, abrindo novas portas e fazendo coisas novas, e sabe por quê? Porque somos curiosos... e a curiosidade continua nos conduzindo por novos caminhos. Siga em frente..."

Walt Disney

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	11
1 INTRODUÇÃO	20
1.1 Motivação	20
1.2 Camada de Mistura Plana Simples	22
1.3 Camada de Mistura Plana Dupla	22
1.4 Estabilidade de Escoamento Cisalhante	23
1.5 Revisão Bibliográfica	25
1.5.1 Trabalhos Experimentais	25
1.5.2 Trabalhos de Simulação numérica e Teóricos	26
1.6 Objetivo	30
2 FORMULAÇÃO	31
2.1 Equações de Conservação	31
2.2 Escoamento Base	31
2.2.1 Aproximação de Camada Limite	31
2.2.2 Solução Similar	33
2.3 Estabilidade do Escoamento Base	36
2.3.1 Conceitos Preliminares	36
2.3.2 Equações de Perturbações	37
2.3.3 Solução Linear por Modos Normais	39
2.3.4 Equação de Rayleigh Modificada	41
3 RESULTADOS PARA A CAMADA DE MISTURA SIMPLES	43
3.1 Solução Numérica das Equações Similares do Escoamento Base	43
3.2 Validação do Escoamento Base	45
3.3 Solução Numérica da Equação de Rayleigh	50
3.4 Validação da Análise de Estabilidade	52
3.5 Análise da Transição de Instabilidades	53
4 RESULTADOS PARA A CAMADA DE MISTURA DUPLA	57
4.1 Solução Assintótica Casada para o Escoamento Base	57

4.2	Análise de Estabilidade Linear	59
5	CONCLUSÕES E ESTUDOS FUTUROS	64
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	66

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.1.1	Injetor Coaxial	21
FIG.1.2	Camada de Mistura Simples	22
FIG.1.3	Camada de Mistura Dupla	23
FIG.1.4	Mapa da estabilidade linear de modos normais num escoamento base local	25
FIG.3.1	Gráfico de Erro Absoluto para $f(\eta)$ no Mathematica com o número de casas decimais de precisão (WP) variados	46
FIG.3.2	Gráfico de Erro Absoluto para $g(\eta)$ no Mathematica com o número de casas decimais de precisão (WP) variados	46
FIG.3.3	Gráfico de Erro Absoluto para $s(\eta)$ no Mathematica com o número de casas decimais de precisão (WP) variados	47
FIG.3.4	Gráfico de Erro Absoluto para $f(\eta)$ em Fortran com o número de casas decimais de precisão (WP) variados	47
FIG.3.5	Gráfico de Erro Absoluto para $g(\eta)$ em Fortran com o número de casas decimais de precisão (WP) variados	48
FIG.3.6	Gráfico de Erro Absoluto para $s(\eta)$ em Fortran com o número de casas decimais de precisão (WP) variados	48
FIG.3.7	Comparação entre Fortran e Mathematica para os perfis de velocidade e temperatura para a camada binária N_2/O_2 com $T_1 = T_2 = 300k$, $\beta_{U_{21}} = U_2/U_1 = 0.5$, $p = 1atm$ e $\mathcal{C} = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$	49
FIG.3.8	Gráfico de isolinhas para $\beta_{U_{21}} = 1/2$, $\beta_{U_{31}} = 0$, $\beta_{T_{31}} = \beta_{T_{21}} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$	51
FIG.3.9	Gráfico aproximado de isolinhas para $\beta_{U_{21}} = 1/2$, $\beta_{U_{31}} = 0$, $\beta_{T_{31}} = \beta_{T_{21}} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$	51
FIG.3.10	Comparação entre Fortran e Mathematica para variação da Taxa de amplificação espacial para a camada binária N_2/O_2 com $T_1 = T_2 = 300k$, $\beta_{U_{21}} = U_2/U_1 = 0.5$, $p = 1atm$ e $\mathcal{C} = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$	52
FIG.3.11	Comparação entre Fortran e Mathematica para o comprimento de onda para a camada binária N_2/O_2 com $T_1 = T_2 = 300k$, $\beta_{U_{21}} = U_2/U_1 = 0.5$, $p = 1atm$ e $\mathcal{C} = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$	53
FIG.3.12	a) Instabilidade Convectiva b) Instabilidade Absoluta	54
FIG.3.13	Mapa de ω no plano complexo e de α complexo segundo a relação de	

	dispersão 3.28	55
FIG.3.14	Gráfico α_r x α_i complexo segundo a relação de dispersão 3.28	56
FIG.4.1	Perfis de velocidade para a mono-espécie N_2/N_2 isotérmica antes e depois da combinação para $\beta_{U21} = 1/2$, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$, $p = 1atm$ com $C = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$	58
FIG.4.2	du/dy e d^2u/dy^2 para a mono-espécie N_2/N_2 isotérmica para $\beta_{U21} = 1/2$, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$, $p = 1atm$ com $C = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$	58
FIG.4.3	Camada de mistura e taxa de variação espacial para β_{U21} variado, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$	59
FIG.4.4	Camada de mistura e taxa de variação espacial para β_{U21} variado, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$	60
FIG.4.5	Número de onda para β_{U21} variado, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$	60
FIG.4.6	terceiro modo para a taxa de variação espacial para β_{U21} variado para $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$	61
FIG.4.7	Camada de mistura e taxa de variação espacial para $\beta_{U21} = 0.5$, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e δ variado	62
FIG.4.8	Número de onda para $Bu_{21} = 0.5$, $Bu_{31} = 0$, $B_{T31} = B_{T21} = 1$ e δ variado	62
FIG.4.9	Camada de mistura e taxa de variação espacial para $\beta_{U21} = 1.5$, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = B_{T21} = 1$ e δ variado	63

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

- a_1 – Primeiro coeficiente de polinômio em função de T
- a_2 – Segundo coeficiente de polinômio em função de T
- a_3 – Terceiro coeficiente de polinômio em função de T
- a_4 – Quarto coeficiente de polinômio em função de T
- a_5 – Quinto coeficiente de polinômio em função de T
- a_6 – Sexto coeficiente de polinômio em função de T
- a_7 – Sétimo coeficiente de polinômio em função de T
- a_{gas} – Velocidade do som local no gás
- a_{gas_1} – Velocidade do som local no gás da camada superior
- a_{gas_2} – Velocidade do som local no gás da camada inferior
- a_{mix} – Velocidade do som local na mistura binária
- A_κ – Primeiro coeficiente do polinômio em função de T
para cálculo de condutividade térmica
- A_μ – Primeiro coeficiente do polinômio em função de T
para cálculo de viscosidade
- A^* – Constante A da equação de Neufeld
- b_1 – Primeira constante de integração de polinômio em função de T
- B_κ – Segundo coeficiente do polinômio em função de T
para cálculo de condutividade térmica
- B_μ – Segundo coeficiente do polinômio em função de T
para cálculo de viscosidade
- B^* – Constante B da equação de Neufeld
- c – Velocidade de fase
- c_g – Velocidade de grupo
- c_p – Calor específico a pressão constante
- $c_{p_{gas}}$ – Calor específico do gás a pressão constante
- $c_{p_{mix}}$ – Calor específico de uma mistura binária a pressão constante
- c_{p_1} – Calor específico do gás da camada superior a pressão constante
- c_{p_2} – Calor específico do gás da camada inferior a pressão constante
- c_v – Calor específico a volume constante

- $c_{v_{gas}}$ – Calor específico do gás a volume constante
- $c_{v_{mix}}$ – Calor específico de uma mistura binária a volume constante
- c_{v_1} – Calor específico do gás da camada superior a volume constante
- c_{v_2} – Calor específico do gás da camada inferior a volume constante
- C – Parâmetro de Chapman-Rubesin
- C_κ – Terceiro coeficiente do polinômio em função de T
para cálculo de condutividade térmica
- C_μ – Terceiro coeficiente do polinômio em função de T
para cálculo de viscosidade
- C^* – Constante C da equação de Neufeld
- \mathcal{D}_{12} – Difusividade mássica da mistura binária
- D_κ – Quarto coeficiente do polinômio em função de T
para cálculo de condutividade térmica
- D_μ – Quarto coeficiente do polinômio em função de T
para cálculo de viscosidade
- D^* – Constante D da equação de Neufeld
- e – Energia interna
- E^* – Constante E da equação de Neufeld
- erf – Função erro
- f' – Variável similar para velocidade na direção x
- F^* – Constante F da equação de Neufeld
- g – Variável similar para entalpia da mistura binária
- G^* – Constante G da equação de Neufeld
- h – Entalpia
- h_{gas_1} – Entalpia do gás da camada superior
- h_{gas_2} – Entalpia do gás da camada inferior
- h_{gas} – Entalpia do gás
- h_{mix} – Entalpia de uma mistura binária
- h_{sens} – Entalpia sensível do gás
- H^* – Constante H da equação de Neufeld

i	–	Unidade imaginária
k	–	Constante de Boltzmann
Le_{gas}	–	Número de Lewis
Le_{mix}	–	Número de Lewis da mistura binária
m_{gas}	–	Massa do gás contida na mistura
m_{mix}	–	Massa total da mistura
M^+	–	Parâmetro de correlação de compressibilidade
Ma_1	–	Número de Mach do escoamento do gás da camada superior no escoamento livre
Ma_{gas_1}	–	Número de Mach do escoamento do gás da camada superior
Ma_{gas_2}	–	Número de Mach do escoamento do gás da camada inferior
Ma_{gas}	–	Número de Mach do escoamento
Ma_{mix}	–	Número de Mach do escoamento da mistura binária
M_C	–	Número de Mach convectivo do escoamento
M_{C_1}	–	Número de Mach convectivo para a camada superior
M_{C_2}	–	Número de Mach convectivo para a camada inferior
\mathfrak{M}_1	–	Massa molecular do gás da camada superior
\mathfrak{M}_2	–	Massa molecular do gás da camada inferior
\mathfrak{M}_{mix}	–	Massa molecular da mistura binária
\mathfrak{M}_{gas}	–	Massa molecular do gás
n_μ	–	Expoente da lei de potências da viscosidade
n_κ	–	Expoente da lei de potências da condutividade térmica
p_{mix}	–	Pressão da mistura binária
p_1	–	Pressão na camada superior
p_2	–	Pressão na camada inferior
p	–	Pressão na camada de mistura
p_c	–	Pressão no ponto crítico
$p_{r_{min}}$	–	Pressão reduzida na faixa mínima
$p_{r_{max}}$	–	Pressão reduzida na faixa máxima

Pr_{gas}	–	Número de Prandtl do gás
Pr_{mix}	–	Número de Prandtl da mistura binária
\Re	–	Parte real
Re	–	Número de Reynolds
R_{gas}	–	Constante do gás
R_{mix}	–	Constante do gás de uma mistura binária
R_{gas_1}	–	Constante do gás da camada superior
R_{gas_2}	–	Constante do gás da camada inferior
R_U	–	Constante universal dos gases igual a 8.314510 [J/mol K]
s_1	–	Variável similar para fração mássica do gás da camada superior na mistura binária
S_κ	–	Constante de Sutherland da condutividade térmica
S_μ	–	Constante de Sutherland da viscosidade
t	–	Tempo
T	–	Temperatura absoluta
T_0	–	Temperatura de referência
T_1	–	Temperatura absoluta do escoamento livre para camada superior
T_2	–	Temperatura absoluta do escoamento livre para camada inferior
T_c	–	Temperatura no ponto crítico
T_{ref}	–	Temperatura no estado de referência
T_{rmin}	–	Temperatura reduzida na faixa mínima
T_{rmax}	–	Temperatura reduzida na faixa máxima
T^*	–	Temperatura adimensional
u	–	Componente de velocidade na direção x
U	–	Parte laminar da componente de velocidade na direção x
U_1	–	Parte laminar da componente de velocidade do escoamento livre na direção x (camada superior)
U_2	–	Parte laminar da componente de velocidade do escoamento livre na direção x (camada inferior)
U_C	–	Velocidade de convecção das perturbações

U_S	– Parte laminar da componente de velocidade na direção x no ponto de inflexão
v	– Componente de velocidade na direção y
w	– Componente de velocidade na direção z
x	– Direção longitudinal ao escoamento
X_{gas}	– Fração molar do gás
X_{gas_1}	– Fração molar do gás da camada superior
X_{gas_2}	– Fração molar do gás da camada inferior
x_{pos}	– Posição no eixo x onde é calculada a espessura de vorticidade
y	– Direção normal ao escoamento
Y_{gas}	– Fração mássica do gás
Y_1	– Fração mássica do gás da camada superior
Y_{gas_1}	– Fração mássica do gás da camada superior
Y_{gas_2}	– Fração mássica do gás da camada inferior
z	– Direção transversal ao escoamento
α	– Número de onda na direção x
α_i	– Taxa de amplificação espacial
α_i^{max}	– Taxa de amplificação espacial máxima
$ \alpha_i ^{max}$	– Módulo da taxa de amplificação espacial máxima
$ \alpha_i _{inc}^{max}$	– Módulo da taxa de amplificação espacial máxima incompressível
α_r^0	– Número de onda do ponto neutro
α_r^{max}	– Número de onda da perturbação com taxa de amplificação temporal máxima
β	– Número de onda na direção z
β_U	– Razão de velocidades do escoamento livre
β_T	– Razão de temperaturas do escoamento livre
β_γ	– Razão de razões de calores específicos do escoamento livre
β_ρ	– Razão de densidades do escoamento livre
δ_ω	– Espessura de vorticidade
$\dot{\delta}_\omega$	– Taxa de crescimento da espessura de vorticidade
δ_m	– Espessura de quantidade de movimento
ΔU	– Módulo da diferença de velocidade entre as camadas superior e inferior

$\Delta h_f^{298.15}$	– Entalpia de formação na temperatura de referência de 298.15K
ϵ_1	– Constante de energia potencial do gás da camada superior
ϵ_2	– Constante de energia potencial do gás da camada inferior
ϵ_{12}	– Constante de energia potencial da mistura binária
ϕ_{12}	– Parâmetro 12 da aproximação de Wilke
ϕ_{21}	– Parâmetro 21 da aproximação de Wilke
γ_1	– Razão de calores específicos do gás da camada superior no escoamento livre
γ_{gas}	– Razão de calores específicos do gás
γ_{mix}	– Razão de calores específicos da mistura binária
η	– Variável similar normal à direção do escoamento principal ou coordenada normal
κ_0	– Condutividade térmica de referência
κ_{gas_1}	– Condutividade térmica do gás da camada superior
κ_{gas_2}	– Condutividade térmica do gás da camada inferior
κ_{gas}	– Condutividade térmica do gás
κ_{mix}	– Condutividade térmica da mistura binária
λ	– Comprimento de onda na direção longitudinal ao escoamento
λ_U	– Parâmetro de velocidade
μ_0	– Viscosidade de referência
μ_1	– Viscosidade do gás da camada superior no escoamento livre
μ_{gas_1}	– Viscosidade do gás da camada superior
μ_{gas_2}	– Viscosidade do gás da camada inferior
μ_{gas}	– Viscosidade do gás
μ_{mix}^0	– Viscosidade da mistura binária no centro da camada de mistura
μ_{mix}	– Viscosidade da mistura binária
ω	– Frequência angular
ω_i	– Taxa de amplificação temporal
ω_i^{\max}	– Taxa de amplificação temporal máxima
ω_r^{\max}	– Frequência angular da taxa de amplificação espacial máxima
Ω_D	– Integral de colisão
$\dot{\omega}$	– Termo de produção de espécies químicas
π	– Número irracional igual a 3.14159 . . .
θ	– Ângulo de propagação da perturbação
θ^{\max}	– Ângulo de propagação da perturbação mais amplificada

ρ	–	Densidade
ρ_{mix}^0	–	Densidade da mistura binária no centro da camada de mistura
ρ_{mix}	–	Densidade da mistura binária
ρ_{gas_1}	–	Densidade do gás da camada superior
ρ_{gas_2}	–	Densidade do gás da camada inferior
ρ_1	–	Densidade do gás da camada superior no escoamento livre
σ_1	–	Constante de comprimento potencial do gás da camada superior
σ_2	–	Constante de comprimento potencial do gás da camada inferior
σ_{12}	–	Comprimento característico
τ	–	Tensão de cisalhamento
χ	–	Função definida por Gropengiesser
$\chi(0^+)$	–	Função χ calculada na posição 0 por cima
$\chi(0^-)$	–	Função χ calculada na posição 0 por baixo
ψ	–	Função corrente
Υ_{12}	–	Parâmetro 12 da modificação de Mason e Saxena
Υ_{21}	–	Parâmetro 21 da modificação de Mason e Saxena
ξ	–	Direção longitudinal ao escoamento no espaço similar
$-$	–	Parte laminar de variável dependente
\wr	–	Perturbação de variável dependente
(0^+)	–	Variável calculada na posição 0 por cima
(0^-)	–	Variável calculada na posição 0 por baixo
$\hat{}$	–	Autofunção de variável dependente
$(\)^*$	–	Variável adimensionalizada pelo seu valor de escoamento livre na camada superior
$(\)_\infty$	–	Escoamento livre
$(\)_1$	–	Camada superior
$(\)_2$	–	Camada inferior
$(\)_i$	–	Parte imaginária
$(\)_r$	–	Parte real
$[]$	–	Dimensão de grandeza

RESUMO

A presente dissertação tem como objetivo principal a análise de estabilidade linear das camadas de mistura duplas. Este escoamento é encontrado em jatos coaxiais e estão presentes em diversas áreas da engenharia, desde aeroespacial até ambiental. Contudo, este trabalho se concentra em aplicações voltadas para os sistemas de injeção dos motores foguete que utilizam propelentes líquidos ou gasosos.

Para realizar esta tarefa, dois códigos foram desenvolvidos usando a plataforma Mathematica, um para a simulação do escoamento base e outro para sua análise de estabilidade. Este sistema foi escolhido devido a sua melhor capacidade de controlar a amplificação de erros numéricos, se comparado a linguagens de baixo nível como Fortran e C. Uma vez desenvolvidos, estes códigos foram validados tomando como referência a camada de mistura simples, já conhecida na literatura.

Uma vez validado para a camada simples, o primeiro código foi utilizado para construção do escoamento base para camada dupla. Para tal, foi utilizado o procedimento das expansões assintóticas casadas. Ele essencialmente forma a camada dupla combinando duas camadas simples sem introduzir erros adicionais a solução final. Com o novo escoamento base construído, o segundo código foi então utilizado sem alterações para a análise de estabilidade.

Apenas escoamentos incompressíveis foram considerados no presente estudo. Porém, os códigos desenvolvidos são capazes de simular, sem maiores modificações, efeitos de compressibilidade como o número de Mach, variação de temperatura e fração de massa. Foram analisados casos onde a camada externa é mais lenta ou mais rápida que a interna. Além disso, o impacto da distância entre as camadas foi analisado. Apesar de uma camada simples ter apenas um modo instável, três modos foram descobertos na camada dupla. Finalmente, foram encontradas evidências para uma transição de instabilidades quando a distância entre as camadas diminui.

ABSTRACT

The main goal of this dissertation is to perform a linear stability analysis of double mixing layers. This flow field is found in coaxial jets and are present in many technological areas, ranging from aerospace to environmental engineering. Nevertheless, the motivation for this work are the coaxial jets used by injection systems of liquid rocket engines.

In order to do so, two codes were developed, based on the Mathematica software. One is used to simulate the base flow and the other to perform the stability analysis. This software was chosen for its improved error control capabilities, when compared to low level languages such as Fortran or C. These codes were then compared to reference solutions for the single mixing layer, obtained with a Fortran code, already known in the literature.

After this validation procedure for a single mixing layer, the first code was utilized to build the base flow with two mixing layers. This was achieved using matched asymptotic expansions. This method essentially combined both layers without introducing additional errors in the final solution. After the new base flow was built, the second code was utilized, without further modifications, for its linear stability analysis.

Only incompressible flows were considered in the present study. However, the codes developed are capable of simulations compressibility effects controlled by the Mach number, temperature and mass fraction differences. The external layer was considered either faster or slower than the internal one. Furthermore, the distance between mixing-layers was varied and its impact analyzed. Despite the fact that only one mode can be found in a single mixing-layer, three modes were discovered for the double mixing-layer. Finally, evidence for an instability transition was found when the distance between layers decreases below a critical value.

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Instabilidades térmicas e hidrodinâmicas são notórias em muitos problemas dentro da mecânica dos fluidos. Elas ocorrem em diversos problemas físicos, como em camadas de mistura, jatos e camadas limites que se formam em paredes sólidas podendo, eventualmente, gerar esteiras. São encontradas em diversas tecnologias, em áreas de engenharia mecânica e aeroespacial. As principais aplicações de relevância estão associadas aos motores de propulsão aspirada, como os turbojatos, ramjets e scramjets, tanto em regime subsônico quanto supersônico. Aparecem na injeção de combustível, no controle de temperatura de palhetas da turbina e também no controle de emissões provenientes do processo de combustão. Também são encontradas em diversos outros sistemas de aplicação aeroespacial, como na decolagem, manobras em suspensão e pouso de aeronaves do tipo V-STOL, bem como no controle vetorial de motores de propulsão. Aplicações importantes podem ser encontradas na área de engenharia ambiental e estão principalmente associadas na dispersão de poluentes na atmosfera e na liberação de esgoto em rios e oceanos.

Os escoamentos mencionados acima são também conhecidos como camadas cisalhantes e abertas e uma análise apurada visa determinar como as perturbações existentes se transformam em instabilidades lineares para que possamos controlá-las dentro do objeto de estudo.

Os trabalhos experimentais de LEYVA et al. (2007) e de RODRIGUEZ et al. (2008) serviram de motivação para a extensão dos resultados de SALEMI (2006) para o problema da camada de mistura dupla. O perfil duplo se aproxima melhor da camada de mistura simulada nos experimentos. Esses estudos experimentais foram feitos para uma alta amplitude de excitação acústica transversal em jatos coaxiais, analisando os efeitos da instabilidade na combustão. Maior atenção foi dada aos efeitos de transição subcrítica e supercrítica da pressão e temperatura do fluido sobre as características de uma mistura em um injetor coaxial mostrado na figura 1.1. Este tipo de escoamento é encontrado no sistema de injeção coaxial em motores do tipo J-2, utilizado para a propulsão do foguete Saturno V, no motor RS-24, usado como motor principal do ônibus espacial, e no motor Vulcan, usado para propulsão do foguete Ariane 5. O injetor coaxial introduz oxidantes líquidos ou gasosos (O_2 , H_2O_2 , N_2O_2 , etc) pelo bocal interno e combustíveis gasosos (H_2 , querosene, $C_{12}H_{26}$, etc) pelo bocal externo. Ambos são misturados após injeção e então entram em combustão. A energia interna gerada na câmara de combustão

é transformada em energia cinética no bocal de Laval na saída do foguete, gerando a propulsão necessária.

A camada de mistura é fortemente instável e suscetível a excitações acústicas. Um dos grandes desafios enfrentados pela engenharia de motores é evitar que o ruído gerado pelo jato entre em ressonância com a câmara de combustão, podendo interromper drasticamente a mistura e conseqüentemente a combustão. Como consequência direta, a combustão poderia ocorrer em condições longe do ideal e causar sérios danos ao motor ou mesmo levar à destruição do veículo. Esse estudo visa mapear as regiões de instabilidade associadas às camadas de misturas duplas, permitindo ao engenheiro projetar o sistema de injeção, (figura 1.1) e a câmara de combustão de modo a evitar regimes de operação que possam gerar ressonâncias acústicas.

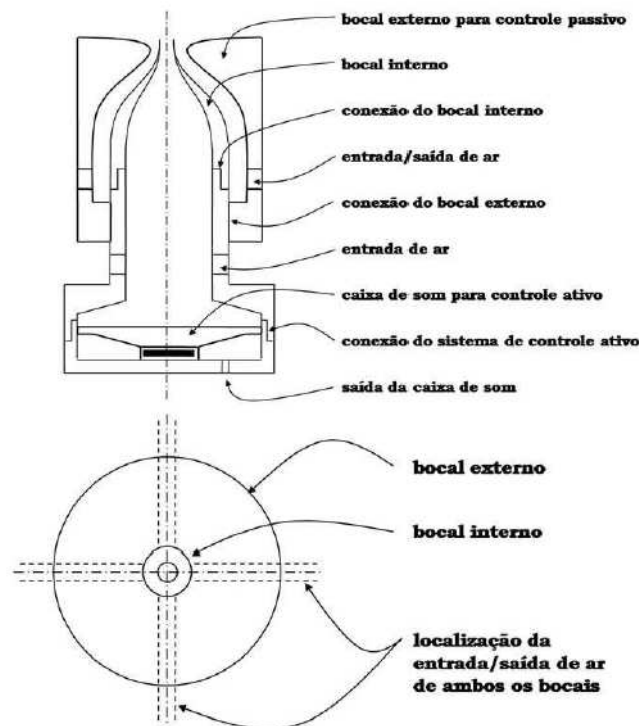


FIG. 1.1: Injetor Coaxial

1.2 CAMADA DE MISTURA PLANA SIMPLES

A camada de mistura simples surge a partir da região de interação de dois gases escoando paralelamente na direção x . Deste modo, podemos aproximar a região de mistura pela camada de mistura simples, onde pequenas perturbações acarretam o surgimento de vórtices transversais que conseqüentemente transicionam o escoamento para regime turbulento. Deste modo, torna-se importante a simulação da camada de mistura para o estudo da estabilidade hidrodinâmica.

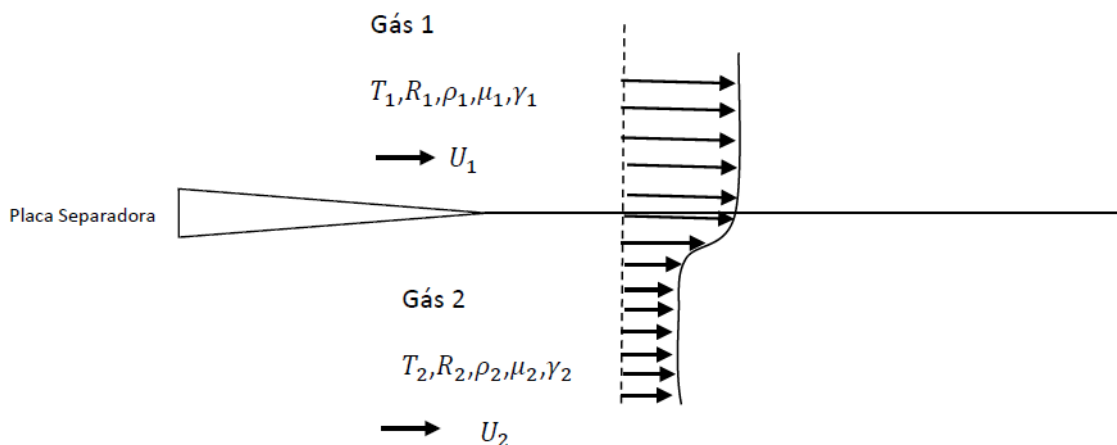


FIG. 1.2: Camada de Mistura Simples

1.3 CAMADA DE MISTURA PLANA DUPLA

A camada de mistura plana dupla em coordenadas cartesianas é uma aproximação do jato livre em coordenadas cilíndricas quando a espessura da camada de mistura é pequena. A camada de mistura dupla é constituída por duas regiões de mistura. Onde, para a primeira região de mistura, U_1 é a velocidade do escoamento para a camada superior e U_2 é a velocidade do escoamento para a camada inferior na direção x do escoamento, com $U_1 > U_2$. Para a segunda região de mistura, também na direção x do escoamento, teremos U_2 , que é a velocidade para a camada superior e, U_3 é a velocidade para a camada inferior. Desta forma, teremos duas razões de velocidade $\beta_{U_{21}} = \frac{U_2}{U_1}$, para a primeira camada de mistura e $\beta_{U_{31}} = \frac{U_3}{U_1}$ para a segunda camada de mistura, como pode ser visto na figura 1.3. Onde, embora a camada dupla tenha três componentes de velocidades (U_1, U_2 e U_3) e três temperaturas absolutas (T_1, T_2, T_3) a análise permanece binária, ou seja, temos duas espécies na região de mistura.

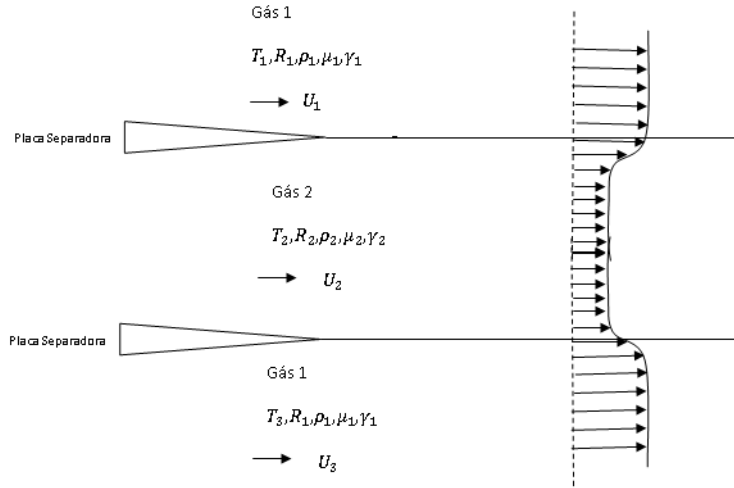


FIG. 1.3: Camada de Mistura Dupla

1.4 ESTABILIDADE DE ESCOAMENTO CISALHANTE

A análise de estabilidade é feita a partir de um escoamento base onde, inserimos uma pequena perturbação. Na nossa análise, consideraremos o escoamento paralelo na direção longitudinal x variando em y , ou seja $u = (\bar{u}(y), 0, 0)$. Desta forma, podemos decompor a perturbação, para a velocidade, da seguinte forma:

$$u(x, y, t) = \bar{u}(y) + u^l(x, y, t), \quad (1.1)$$

E ainda, admitiremos que a solução para uma perturbação arbitrária u^l seja dada através de modos normais, ou seja, analisaremos as perturbações como ondas senoidais que se propagam no tempo e no espaço. Segundo Kundu (KUNDU e COHEN (2002)), desta análise, surgem parâmetros como o número de onda α na direção x , dado por:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.2)$$

representando o número de onda no comprimento $2\pi[\text{rad}/m]$, λ o comprimento de onda $[m]$ na direção x e a frequência circular, também chamada de frequência em radiano, representa a variação de fase em $[\text{rad}]$ por unidade de tempo dada por:

$$\omega = \alpha c \quad (1.3)$$

onde c representa a velocidade de fase em $[m/s]$. Logo, a solução para uma perturbação arbitrária u^l é dada por:

$$u^\lambda(x, y, t) = \hat{u}(y) \exp(i\alpha_r x - \alpha_i x - i\omega_r t + \omega_i t), \quad (1.4)$$

ou,

$$u^\lambda(x, y, t) = \hat{u}(y) [(\exp(-\alpha_i x + \omega_i t)(\exp i\alpha_r x - i\omega_r t))], \quad (1.5)$$

onde os sub-escritos r e i representam as componentes reais e imaginárias, respectivamente, α , ω são números de onda e a frequência angular da perturbação. A primeira exponencial representa o crescimento ou decaimento da amplitude e a segunda exponencial a oscilação. Assumiremos para a análise desta dissertação que a amplitude $\hat{u}(y)$ depende apenas de y , ou seja, y é a única direção não-homogênea.

Desta forma, podemos fazer dois tipos de estudos para as taxas de amplificação, um temporal e o outro espacial, de acordo com os valores reais ou imaginários assumidos por α ou ω . Ou seja, para a análise espacial, impomos $\omega_i = 0$ para simplificar a análise, temos:

$\alpha_i < 0 \rightarrow$ a amplitude cresce (instável),

$\alpha_i > 0 \rightarrow$ a amplitude decresce (estável),

$\alpha_i = 0 \rightarrow$ a amplitude constante (estabilidade neutra).

e, para a análise temporal, onde impomos que $\alpha_i = 0$, pela mesma razão, temos:

$\omega_i < 0 \rightarrow$ a amplitude decresce (estável),

$\omega_i > 0 \rightarrow$ a amplitude cresce (instável),

$\omega_i = 0 \rightarrow$ a amplitude constante (estabilidade neutra).

Na estabilidade temporal, as perturbações evoluem com o tempo enquanto que na estabilidade espacial as perturbações evoluem no espaço. Esse estudo tem como interesse as perturbações espaciais pois, as perturbações espaciais aproximam melhor os resultados de experimentos. Porém, nem sempre é fácil simular numericamente as perturbações espaciais, devido a sua complexidade.

Agora, abordaremos aspectos importantes em relação as perturbações no tempo e no espaço. No caso da perturbação ser varrida a montante ou a jusante da fonte, chamamos a análise de estabilidade de convectiva. Nesta análise, impomos $\omega_i = 0$ para o estudo do número de onda α complexo. Como consequência, as perturbações são periódicas no tempo.

Já no segundo, se a perturbação gerada se propaga a montante e a jusante do local onde se originou contaminando todo o domínio, o fluxo é considerado absolutamente instável, isso é analisado quando $\alpha_i = 0$ para ω absolutamente instável com isso, as perturbações são periódicas no espaço.

Daí, o escoamento é absolutamente instável se, na presença de uma perturbação transiente, em um determinado local do escoamento cresce em todo o domínio e, convectivamente instável se a perturbação é gerada em uma região e amplifica-se, para uma certa distância a medida que se propaga na direção do escoamento, fazendo com que o escoamento retorne ao estado original, desaparecendo assim. Neste caso, temos o mapa de estabilidade mostrado na figura 1.4. Este mapa é importante pois um problema pode mudar de instabilidade dependendo dos seus parâmetros de controle.

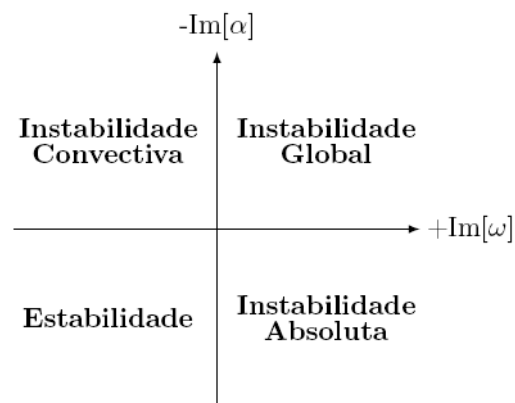


FIG. 1.4: Mapa da estabilidade linear de modos normais num escoamento base local
 Fonte: ALVES (No prelo 2012)

1.5 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.5.1 TRABALHOS EXPERIMENTAIS

Um trabalho de extrema importância sobre camada de mistura, foi apresentado por BROWN e ROSHKO (1974), que estudou a camada de mistura turbulenta para dois gases diferentes, em especial o nitrogênio e o hélio, com a razão de densidade variada. Foram observados a formação de vórtices na camada de mistura oriundos da diferença de densidade. Concluindo que, para o escoamento supersônico e uma determinada razão de densidade, os efeitos gerados a partir da compressibilidade tem maior efeito na redução da espessura de vorticidade do que a variação de densidade.

Dentro da aplicação do estudo da camada de mistura em jatos coaxiais RODRIGUEZ (2009) estudou o comportamento instável da camada de mistura em injetores líquidos. Medindo as condições de pressão no interior e no exterior do jato coaxial e, utilizando a excitação acústica para controlar a pressão dentro da câmara de mistura. Mostrando que a excitação acústica

se mostra eficiente para a análise, resultando em 6 valores diferentes de frequências a serem utilizadas como fonte de tratamento na câmara de mistura.

DAHM e FRIELER (1992) também realizaram experimentos para o jato coaxial, examinando os efeitos da variação da relação de velocidade e de igual razão de densidade. Mostrando a grande variedade de vórtices resultantes da variação da velocidade e de densidade. Os resultados do experimento permitem uma estruturação dos padrões dos vórtices que se formam como consequência da mistura. Mostrando que a estrutura do jato coaxial compressível é menos instável de menor agregação das camadas de vorticidade que evoluem a partir de cada camada de cisalhamento, e quer axissimétricas ou helicoidais as camadas também possuem fortes indícios de um "travamento" que ocorre entre o desenvolvimento das duas camadas, em que as instabilidades decorrentes do processo de interação e vórtice dentro de cada camada não procedem de forma independente, mas estão fortemente associadas aos processos gerados na camada de mistura.

1.5.2 TRABALHOS DE SIMULAÇÃO NUMÉRICA E TEÓRICOS

Um dos grandes problemas para a simulação numérica para a camada de mistura plana é determinar as condições de contorno para o centro da camada de mistura, para o perfil de velocidade LOCK (1951) e TING (1959) foram os primeiros a utilizar o método de expansões assintóticas para resolver o problema da terceira condição de contorno para o problema utilizando a velocidade normal do problema nula, ou seja, $v(0) = 0$ para a camada de mistura incompressível, significando que a origem coincide com o ponto de inflexão do perfil de velocidade. TING (1959) mostra que a falta da terceira condição de contorno faz com que o problema de camada limite admita infinitas soluções por isso a importância da utilização do método de expansões assintóticas para sanar esse problema.

ALSTON e COHEN (1992) utilizam o método de expansões assintóticas para o problema da camada de mistura não viscosa, no perfil de velocidade transversal. ALSTON e COHEN (1992) dividem a camada de mistura em duas regiões, uma viscosa e outra não viscosa mostrando que o método de expansão assintótica oferece uma boa aproximação para o problema de contorno da camada limite.

KENNEDY e GATSKI (1994) utilizaram o perfil similar (equação 2.7 e equação 2.8) para simular a camada de mistura compressível e binária para nitrogênio/hidrogênio, com variação de densidade e velocidade supersônica. Ressaltando a importância da variação dos parâmetros adimensionais, como Prandtl, Lewis e Chapman-Rubesin, devido a variação de velocidade, espécies e entalpia.

LARDJANE et al. (2004) simularam numericamente a camada de mistura compressível binária para altas razões de densidade, utilizando a técnica de similaridade. LARDJANE et al. (2004) mostraram que para uma alta razão de densidade, como 32, e um número de Reynolds alto os resultados obtidos são satisfatórios, para a condição inicial proposta.

ANDERSON (2000) realizou um intenso estudo a respeito de escoamentos compressíveis, viscosos, não viscosos, hipersônicos e com alta temperatura, passando desde conceitos básicos do estudo de dinâmica de gases com alta temperatura até estudos mais avançados do estudo dos gases, abordando temas como reações químicas em escoamentos compressíveis e teoria cinética. Em ANDERSON (2000) é possível encontrar as derivações detalhadas das equações para o escoamento base, assim como uma série de referências e exemplos adicionais que relacionam o perfil similar das equações para a conservação de quantidade de movimento e as equações de energia, assim como o efeito da compressibilidade em escoamentos compressíveis.

MICHALKE (1964, 1965) estudaram a estabilidade linear não viscosa em escoamentos bidimensionais utilizando a equação de Rayleigh e a função tangente hiperbólica como perfil de velocidade $U(y) = 0.5[1 + \tanh y]$. Neste trabalhos, MICHALKE (1964, 1965) estudaram as perturbações temporais e espaciais, assim como seus respectivos autovalores. Mostrando que as perturbações espaciais são as melhores aproximações para os resultados experimentais.

JENDOUBI e STRYKOWSKI (1994) estudaram as instabilidades absolutas e convectivas para o jato coaxial em uma camada com escoamento reverso e compressível. Utilizando o perfil de velocidade $U(r) = 1 + R \tanh[b(\frac{1}{r} - r)]$, JENDOUBI e STRYKOWSKI (1994) deduziram a equação para a estabilidade e estudaram os critérios de transição de instabilidade de absoluta para convectiva para os efeitos da razão da densidade e da variação do número de Mach para a estabilidade da camada de cisalhante. Verificando que, para a existência de dois modos, à baixa razão de densidade os modos se tornam instáveis, Resultando em uma transição para globalmente instável. Concluindo que, para o modo I, existe uma flutuação nos valores para a pressão máxima na camada cisalhante do jato e para o Modo II, são encontradas as amplitudes para as perturbações para a pressão no centro do jato.

Estendendo a análise para o estudo das amplificações espaciais feitas por MICHALKE (1964, 1965), MONKEWITZ e HUERRE (1982) investigaram a evolução espacial de perturbações invíscidas, pela equação de Rayleigh, com diferentes razões de velocidade modeladas com a função tangente hiperbólica. MICHALKE (1964) e MONKEWITZ e HUERRE (1982) mostraram que os resultados obtidos para a camada de mistura temporal podem ser correlacionados com a camada de mistura espacial apenas para escoamentos convectivamente instáveis. Isto significa que a dinâmica de um escoamento se desenvolvendo no tempo, será equivalente a dinâmica de um escoamento se desenvolvendo no espaço apenas quando o es-

coamento a jusante não influenciar a instabilidade a montante. Restringiram-se a análise das taxas de amplificação espacial pois, essa análise oferece uma boa correlação entre dos resultados numéricos e os resultados decorrentes da análise experimental. Utilizaram o perfil de velocidade $U(y) = 1 + \lambda_U \tanh(y/2)$, onde λ_U é o parâmetro de velocidade. MONKEWITZ e HUERRE (1982) concluíram que a amplificação máxima é uma função de λ_U e que para $\lambda_U = 0$ a os resultados, para análise espacial, correspondem aos resultados decorrentes da análise temporal. Posteriormente, HUERRE e MONKEWITZ (1985) mostraram que para $\lambda_U < 1.315$ a camada de mistura é convectivamente instável.

JACKSON e GROSCH (1989) Realizaram a análise de estabilidade não viscosa espacial para a camada de mistura compressível para o perfil de tangente hiperbólica para a velocidade média e a relação de Crocco para a temperatura média, com a relação de Chapman para a relação temperatura-viscosidade. Concluindo que, para um determinado número de Mach supersônico, existem dois modos, notaram que um desses modos adicionais tem velocidade de fase supersônica em relação à camada rápida, denominando-se de modo lento, enquanto que o outro tem velocidade de fase supersônica em relação à camada lenta e o chamaram de modo rápido.

GROPENGIESSER (1970) também encontrou o segundo modo de instabilidade, observado que a camada de mistura bidimensional fica instável para um número de Mach elevado. Gropengiesser usou a teoria de estabilidade espacial e usou uma solução das equações de camada limite laminar compressível, para o escoamento base, em vez de um perfil simples de tangente hiperbólica. Ele destacou a alta taxa de amplificação de ondas tridimensionais para um número de Mach alto, encontradas na parede da camada limite compressível.

Em sua dissertação Salemi (SALEMI (2006)) estudou a camada de mistura simples compressiva e binária, utilizando as equações de conservação similar para a camada de mistura bidimensional, compressiva, plana, com espécies químicas (N_2/O_2 e O_2/H_2), usando o método do tiro para simular numericamente a camada de mistura. O método do tiro consiste em estimar a condição de contorno no meio da camada de mistura para $\eta = 0$ e integrar o sistema de equações até o valor máximo de η no contorno, onde o método para achar a constante de integração é o método da secante e o método para a integração é o método de Runge-Kutta semi implícito com controle de passo adaptativo, conhecido como método de Rosenbrock. Para a perturbação, SALEMI (2006) utilizou equações de conservação tridimensionais, compressivas e não viscosas, onde o objetivo é a busca do autovalor α , em uma determinada frequência ω . SALEMI (2006) além do estudo das taxas de amplificação espaciais, SALEMI (2006) também realizou o estudo para as taxas de amplificação temporais, onde ω seria o autovalor e α a frequência. Para o cálculo dos autovalores, estima-se valores para α e para ω e integra-se de $\pm\infty$ até o ponto 0, comparando o valor de $\chi(0+)$ com o valor de $\chi(0-)$, se $\chi(0-) \neq \chi(0+)$, muda-

se o valor da taxa de amplificação até que os valores sejam iguais. SALEMI (2006) verificou o efeito da variação dos parâmetros C , Pr_{mix} e Le_{mix} na camada de mistura e nas taxas de variação espaciais e temporais e ainda e o efeito da variação do número de Mach para as taxas de variação espaciais e temporais e para a análise tridimensional das perturbações.

PERRAULT-JONCAS e MASLOWE (2008) realizaram estudos para estabilidade linear e espacial de jatos coaxiais compressíveis usando perfis de velocidade e temperatura obtidos com funções analíticas que consideram diferentes regiões de mistura que aproximam os dados experimentais. Incluindo efeitos de compressibilidade para diferentes razões de velocidades e temperaturas na estabilidade do modo axissimétrico. PERRAULT-JONCAS e MASLOWE (2008) concluíram que a taxa de amplificação diminui com o aumento destes parâmetros, ao contrário da velocidade de fase diminui a medida que aumenta-se a taxa de amplificação. Uma parte extensa deste estudo, que incluiu efeitos geométricos e a análise dos outros modos helicoidais, foi feita apenas para o caso incompressível.

BALARAC et al. (2007) realizaram o estudo numérico para a camada de mistura com propriedades naturais para o jato coaxial excitados com um número de Reynolds moderado, onde o objetivo dessas excitações é provocar a formação de vórtices e controlar a sua dinâmica para melhorar as propriedades de mistura do jato. Estudando os vários tipos de excitações para a camada cisalhante, em BALARAC et al. (2007), investigou-se dois tipos de forçamento, o primeiro para uma excitação puramente axissimétrica e segundo, combinado excitações axissimétricas e azimutais com amplitudes moderadas. Concluindo que, a excitações puramente axissimétricas levam ao desenvolvimento da mistura em duas partes, devido a vórtices de Kelvin-Helmholtz e a vórtices longitudinais.

Em TALAMELLI e GAVARINI (2006) estudou-se instabilidades incompressíveis utilizando o perfil de velocidade $U(r) = 1/2\{1 + \tanh[b_n(1 - \frac{r-r_n}{R_n-r_n})]\}U_n$, perfil que permite o estudo do jato para diferentes tipos de raios na saída do bocal coaxial. TALAMELLI e GAVARINI (2006) analisaram as taxas de amplificação espaciais assim como a transição de estabilidade e sua dependência em relação aos diversos parâmetros estudados. Mostrando que três diferentes modos de instabilidade estão presentes: Um correspondente à camada de cisalhamento externo e os demais associados à presença da parede no interior do duto. A partir da análise espacial TALAMELLI e GAVARINI (2006) mostraram que a estabilidade na esteira, perto da saída do jato, é mais instável e o modo do jato se caracteriza por um deslocamento uníssono dos níveis críticos. Nesta região, o número de onda azimutal não parecem influenciar as características de estabilidade do jato. A taxa de crescimento absoluto e a frequência da instabilidade absoluta foram avaliadas em função dos diferentes parâmetros que definem a configuração do jato coaxial como a espessura da camada de cisalhamento e a razão de velocidade.

Os resultados mostram que com velocidades suficientemente baixas surge um modo que pode tornar-se localmente e absolutamente instável.

1.6 OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo estender o trabalho realizado por SALEMI (2006) para a análise de estabilidade na camada de mistura binária simples, para a análise de estabilidade na camada de mistura dupla. Salemi desenvolveu um código em Fortran para resolver numericamente, tanto o escoamento base como as taxas de amplificações espaciais e temporais. Assim, este trabalho visa realizar a análise de estabilidade linear para a camada de mistura plana e dupla com o código desenvolvido pelo próprio autor no programa Mathematica, construindo um modelo simplificado para o escoamento base que representa o jato livre coaxial utilizando-se um jato plano, ou seja, uma camada de mistura dupla. Deseja-se fazer uma análise de estabilidade do problema, seguindo as seguintes etapas:

- a) Simulação e comparação da camada de mistura dupla mono-espécie com a camada de mistura simples.
- b) Estudo do perfil de velocidade e da taxa de amplificação espacial com variação da razão de velocidade para a camadas de mistura dupla.
- c) Estudo do perfil de velocidade e da taxa de amplificação espacial com do espaçamento entre as camadas duplas.

2 FORMULAÇÃO

2.1 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

2.2 ESCOAMENTO BASE

Em geral, nas equações para o movimento de um fluido, o tensor de cisalhamento e o tensor normal viscoso na superfície resultam em termos adicionais na equação de movimento e na equação de energia. Além disso, a condução térmica através da superfície do escoamento fornece modos adicionais de transferência de energia, para a equação da energia. Resultando assim, nas equações de governo, chamadas de Equações de Navier-Stokes (ANDERSON (2000)).

2.2.1 APROXIMAÇÃO DE CAMADA LIMITE

Dadas as equações de Navier-Stokes, são feitas as seguintes considerações de camada limite SALEMI (2006); ANDERSON (2000):

- **Equação da continuidade:** Escoamento laminar, bidimensional, compressível e em regime permanente;
- **Equação da conservação da quantidade de movimento na direção x :** Escoamento laminar, viscoso, bidimensional, compressível, sem forças de campo, em regime permanente e sem difusão viscosa na direção longitudinal;
- **Equação da conservação da quantidade de movimento na direção y :** Escoamento laminar, viscoso, bidimensional, compressível, sem forças de campo, em regime permanente e sem difusão viscosa na direção longitudinal;
- **Equação da energia:** Escoamento laminar, viscoso, bidimensional, compressível, sem forças de campo, em regime permanente, sem efeitos de difusão viscosa na direção longitudinal, sem transferência de calor por radiação e sem difusão de calor nas direções longitudinal (x);
- **Equação da conservação das espécies químicas:** Escoamento laminar, viscoso, bidimensional, compressível, sem forças de campo, em regime permanente e sem difusão de massa na direção longitudinal;

- **Equação de estado de gás:** Gás termicamente perfeito;

Assim as equações básicas do problema ficam:

$$\frac{\partial(\rho_{mix} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{mix} v)}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho_{mix} u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_{mix} v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{mix} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \rho_{mix} u \frac{\partial h_{mix}}{\partial x} + \rho_{mix} v \frac{\partial h_{mix}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_{mix} \mathfrak{D}_{12} \left(h_{gas_1} \frac{\partial Y_{gas_1}}{\partial y} + h_{gas_2} \frac{\partial Y_{gas_2}}{\partial y} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_{mix} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{mix} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\rho_{mix} u \frac{\partial Y_{gas_1}}{\partial x} + \rho_{mix} v \frac{\partial Y_{gas_1}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_{mix} \mathfrak{D}_{12} \frac{\partial Y_{gas_1}}{\partial y} \right) + \dot{\omega}, \quad (2.5)$$

$$p = \rho_{mix} R_{mix} T, \quad (2.6)$$

onde a equação 2.1 é a equação da continuidade, a equação 2.2 é a equação da conservação da quantidade de movimento na direção x , a equação 2.3 é a equação da conservação da quantidade de movimento na direção y , a equação 2.4 é a equação da conservação da energia, a equação 2.5 é a equação da conservação das espécies químicas, equação 2.6 é a equação de estado de gás perfeito, x é a direção longitudinal no espaço físico em $[m]$, y é a direção normal no espaço físico em $[m]$, u é a velocidade do escoamento livre na direção x em $[m/s]$, v é a velocidade do escoamento livre na direção y em $[m/s]$, ρ_{mix} é a densidade da mistura binária em $[kg/m^3]$, μ_{mix} é a viscosidade da mistura binária em $[kg/m \cdot s]$, p é a pressão da mistura em $[Pa]$, h_{mix} é a entalpia da mistura binária em $[J/kg]$, h_1 é a entalpia do gás da camada superior no escoamento livre em $[J/kg]$, h_2 é a entalpia do gás da camada inferior no escoamento livre em $[J/kg]$, \mathfrak{D}_{12} é a difusividade mássica em $[m^2/s]$, Y_{gas_1} é a fração mássica do gás da camada superior no escoamento livre em $[kg]$, Y_{gas_2} é a fração mássica do gás da camada inferior no escoamento livre em $[kg]$, κ_{mix} é a condutividade térmica da mistura binária em $[W/mK]$, T é a temperatura absoluta em $[K]$, $\dot{\omega}$ é o termo de produção de espécies químicas e R_{mix} é a constante do gás de uma mistura binária em $[J/kgK]$.

2.2.2 SOLUÇÃO SIMILAR

Na maioria dos escoamentos os perfis de velocidade, em coordenadas cartesianas, variam em x e y , ou seja, $u = u(x, y)$. Porém, para certos casos, por meio de uma transformação, podemos mudar as variáveis independentes de (x, y) para (ξ, η) , onde a velocidade para diferentes x , x_1 e x_2 , ao longo da superfície são diferentes, ou seja, $u(x_1, y) \neq u(x_2, y)$. Aplicando a transformação, posta de forma usual nos trabalhos de LEVY (1954) e LESS (1956), temos que para diferentes valores de ξ , ξ_1 e ξ_2 , o perfil de velocidade será o mesmo, ou seja, os perfis se tornam independentes de sua localização ao longo da direção longitudinal ξ . Desta forma, o perfil de velocidade será uma função $\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{u}{U_1}$, independente de ξ . Desta forma, definiremos a transformação similar por:

$$\xi = \int_0^x \rho_1 u_1 \mu_1 dx. \quad (2.7)$$

$$\eta = \frac{u_1}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy. \quad (2.8)$$

aonde ρ_1 , u_1 e μ_1 são densidade, velocidade e coeficiente de viscosidade, respectivamente, para a camada superior do escoamento.

Derivando as expressões de similaridade 2.7 e 2.8 em relação a x e y , obtemos as seguintes relações:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \rho_1 U_1 \mu_1, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U_1 \rho}{\sqrt{2\xi}}. \quad (2.11)$$

Onde não é necessário a expressão para $(\partial \eta / \partial x)$ de acordo com ANDERSON (2000). E ainda, pela regra da cadeia, temos as seguintes definições:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right). \quad (2.13)$$

Desta forma, aplicando 2.10 e 2.11 em 2.12 e 2.13 obtemos as três variáveis para o escoamento expressas por:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{u}{U_1} \equiv f', \quad (2.14)$$

$$g = \frac{h}{h_1}, \quad (2.15)$$

$$s_1 = Y_1. \quad (2.16)$$

Onde as variáveis adimensionais f' , g , s são variáveis similares para velocidade na direção x , para entalpia da mistura binária e para fração mássica do gás da camada superior na mistura binária respectivamente.

Outra relação importante para o escoamento binário é a relação entre a fração de massa e variável adimensional similar s_1 e s_2 para fração mássica, dadas por:

$$s_2 = 1 - s_1, \quad (2.17)$$

daí, tem-se:

$$\frac{\partial Y_2}{\partial \eta} = -\frac{\partial Y_1}{\partial \eta}, \quad (2.18)$$

ou

$$s'_2 = -s'_1. \quad (2.19)$$

Assim, aplicando as definições similares 2.7 e 2.8 e realizando as devidas derivações e simplificações em 2.10 e 2.11 em 2.12 e 2.13, detalhadas nos trabalhos de SALEMI (2006) e ANDERSON (2000), chegamos nas equações para a camada de mistura compressível e dupla:

$$f''' + \frac{f f''}{\mathcal{C}} = 0, \quad (2.20)$$

$$g'' + \frac{Pr_{mix}}{\mathcal{C}} f g' + \frac{Pr_{mix} U_1^2}{h_1} (f'')^2 = 0, \quad (2.21)$$

$$s'' + \frac{Le_{mix} Pr_{mix}}{\mathcal{C}} f s' = 0, \quad (2.22)$$

onde, 3.1 é a equação da conservação da quantidade de movimento similar, a equação 3.2 é a equação da conservação da energia similar e 3.3 é a equação da conservação das espécies

químicas similar. E ainda, \mathcal{C} é o parâmetro de Chapman-Rubensin, Pr_{mix} o número de Prandtl da mistura e Le_{gas} o número de Lewis definidos da seguinte forma:

$$\mathcal{C} = \frac{\rho_{mix} \mu_{mix}}{\rho_{gas_1} \mu_{gas_1}}, \quad (2.23)$$

$$Pr_{mix} = \frac{\mu_{mix} c_{p_{mix}}}{\kappa_{mix}}, \quad (2.24)$$

$$Le_{gas} = \frac{\kappa_{gas}}{\rho_{gas} c_{p_{gas}} \mathfrak{D}_{12}}, \quad (2.25)$$

onde ρ_{mix} é a densidade da mistura em $[kg/m^3]$, μ_{mix} é a viscosidade da mistura binária em $[kg/m s]$, ρ_{gas_1} é a densidade do gás da camada superior em $[kg/m^3]$, μ_{gas_1} é a viscosidade do gás da camada superior em $[kg/m s]$, μ_{gas} é a viscosidade do gás em $[kg/m s]$, $c_{p_{gas}}$ é o calor específico a pressão constante do gás em $[J/kgK]$, κ_{gas} é a condutividade térmica em $[W/m K]$, Le_{gas} é adimensional, ρ_{gas} é a densidade do gás em $[kg/m^3]$, $c_{p_{gas}}$ é o calor específico a pressão constante do gás em $[J/kgK]$ e \mathfrak{D}_{12} é a difusividade mássica em $[m^2/s]$.

As condições de contorno para a camada superior de 3.1, 3.2 e 3.3 são:

$$f(0) = 0 \quad f'(+\infty) \rightarrow 1 \quad f'(-\infty) \rightarrow \beta_{U_{21}}, \quad (2.26)$$

$$g(+\infty) \rightarrow 1 \quad g(-\infty) \rightarrow \beta_{h_{21}}, \quad (2.27)$$

$$s(+\infty) \rightarrow 1 \quad s(-\infty) \rightarrow 0 \quad (2.28)$$

As condições de contorno para a camada inferior de 3.1, 3.2 e 3.3 são:

$$f(0) = 0 \quad f'(+\infty) \rightarrow \beta_{U_{21}} \quad f'(-\infty) \rightarrow \beta_{U_{31}}, \quad (2.29)$$

$$g(+\infty) \rightarrow \beta_{h_{21}} \quad g(-\infty) \rightarrow \beta_{h_{31}}, \quad (2.30)$$

$$s(+\infty) \rightarrow 0 \quad s(-\infty) \rightarrow 1, \quad (2.31)$$

onde, $\beta_{U_{21}} = \frac{U_2}{U_1}$, $\beta_{U_{31}} = \frac{U_3}{U_1}$ e ainda, U_1 , U_2 e U_3 são velocidades do escoamento para ambas as camadas.

2.3 ESTABILIDADE DO ESCOAMENTO BASE

2.3.1 CONCEITOS PRELIMINARES

A teoria de instabilidade linear é utilizada para determinar as taxas de amplificação das perturbações em camadas de misturas, assim como para estudar os efeitos da razão de velocidade, razão de densidade e número de Mach. Neste estudo, utilizaremos ondas tridimensionais pois, elas são muito importantes para o estudo do efeito de altos números de Mach em camadas de misturas. Onde, o número de Mach é a relação entre a energia cinética e a energia interna do escoamento, dado por:

$$Ma_{gas} = \frac{u}{a_{gas}}, \quad (2.32)$$

Ma_{gas} é o número de Mach do escoamento, u é a componente de velocidade na direção x em $[m/s]$ e a_{gas} é a velocidade do som local no gás em $[m/s]$ dada por:

$$a_{gas} = \sqrt{\gamma_{gas} R_{gas} T}, \quad (2.33)$$

onde γ_{gas} é a razão de calores específicos do gás, R_{gas} é a constante do gás em $[J/kgK]$ e T é a temperatura absoluta em $[K]$.

E ainda, se passarmos a considerar um sistema de coordenadas convectivo em relação a velocidade das grandes estruturas do escoamento que caracterizam a velocidade das perturbações do escoamento, teremos que considerar o número de Mach convectivo dado por:

$$M_{C_{gas}} = \frac{U_{gas} - U_C}{a_{gas}}, \quad (2.34)$$

onde M_{C_1} é o número de Mach convectivo para camada superior, U_1 é a velocidade do escoamento livre na direção x para camada superior em $[m/s]$, U_C é a velocidade de convecção das perturbações em $[m/s]$ e a_{gas_1} é a velocidade do som local no gás da camada superior em $[m/s]$.

Outro parâmetro importante é o número de Reynolds, que relaciona as forças de inércia às forças viscosas do escoamento. Quando o número de Reynolds é alto as forças de inércia serão mais importantes que as viscosas, modificando a espessura da camada limite. O número de Reynolds é dado por:

$$Re = \frac{\rho_{mix}^0 \Delta U \delta_\omega}{\mu_{mix}^0}, \quad (2.35)$$

2.3.2 EQUAÇÕES DE PERTURBAÇÕES

As equações de conservação para a análise de estabilidade obedecem as seguintes hipóteses:

- **Equação da continuidade:** Escoamento laminar, tridimensional e compressível;
- **Equação da conservação da quantidade de movimento na direção x :** Escoamento laminar, não viscoso, tridimensional, compressível e sem forças de campo;
- **Equação da conservação da quantidade de movimento na direção y :** Escoamento laminar, não viscoso, tridimensional, compressível e sem forças de campo;
- **Equação da conservação da quantidade de movimento na direção z :** Escoamento laminar, não viscoso, tridimensional, compressível e sem forças de campo;
- **Equação da energia:** Escoamento laminar, não viscoso, tridimensional, compressível, sem forças de campo e sem transferência de calor por radiação, sem difusão de calor e sem geração interna de calor;
- **Equação da conservação das espécies químicas:** Escoamento laminar, não viscoso, tridimensional, compressível e desprezando difusão de massa;
- **Equação de estado de gás:** Gás termicamente perfeito;

Devido às hipóteses acima, temos que utilizar um grupo de equações diferente das utilizadas em 2.10, 2.11, 2.12 e 2.13 devido ao efeito da compressibilidade e dos efeitos viscosos. A esse conjunto de equações dá-se o nome de equações de Euler. Desta forma, as equações são:

$$\frac{\partial(\rho_{mix}^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho_{mix}^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho_{mix}^* v^*)}{\partial y^*} + \frac{\partial(\rho_{mix}^* w^*)}{\partial z^*} = 0, \quad (2.36)$$

$$\rho_{mix}^* \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \rho_{mix}^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho_{mix}^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \rho_{mix}^* w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\gamma_1 Ma_1^2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}, \quad (2.37)$$

$$\rho_{mix}^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \rho_{mix}^* u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \rho_{mix}^* v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \rho_{mix}^* w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\gamma_1 Ma_1^2} \frac{\partial p^*}{\partial y^*}, \quad (2.38)$$

$$\rho_{mix}^* \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \rho_{mix}^* u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \rho_{mix}^* v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + \rho_{mix}^* w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\gamma_1 Ma_1^2} \frac{\partial p^*}{\partial z^*}, \quad (2.39)$$

$$\rho_{mix}^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho_{mix}^* u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \rho_{mix}^* v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + \rho_{mix}^* w^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{-p^* (\gamma_{mix} - 1)}{R_{mix}^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right), \quad (2.40)$$

$$\rho_{mix}^* \frac{\partial Y_{gas_1}}{\partial t^*} + \rho_{mix}^* u^* \frac{\partial Y_{gas_1}}{\partial x^*} + \rho_{mix}^* v^* \frac{\partial Y_{gas_1}}{\partial y^*} + \rho_{mix}^* w^* \frac{\partial Y_{gas_1}}{\partial z^*} = 0, \quad (2.41)$$

$$p^* = \rho_{mix}^* R_{mix}^* T^*, \quad (2.42)$$

onde a equação 2.36 é a equação da continuidade, a equação 2.37 é a equação da conservação da quantidade de movimento na direção x , a equação 2.38 é a equação da conservação da quantidade de movimento na direção y , a equação 2.39 é a equação da conservação da quantidade de movimento na direção z , a equação 2.40 é a equação da conservação da energia, a equação 2.41 é a equação da conservação das espécies químicas e a equação 2.42 é a equação de estado de gás perfeito. E ainda, a adimensionalização é feito utilizando-se como valores de referência as variáveis do escoamento livre na camada superior como descrito por PLANCHÉ (1993), da seguinte forma:

$$u^* = \frac{u}{U_1} \quad v^* = \frac{v}{U_1} \quad w^* = \frac{w}{U_1} \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_1} \quad T^* = \frac{T}{T_1} \quad p^* = \frac{p}{p_1}, \quad (2.43)$$

$$R^* = \frac{R}{R_1} \quad x^* = \frac{x}{\delta_\omega} \quad y^* = \frac{y}{\delta_\omega} \quad z^* = \frac{z}{\delta_\omega} \quad t^* = \frac{t U_1}{\delta_\omega}, \quad (2.44)$$

onde, u representa a componente de velocidade na direção x em $[m/s]$, U_1 a componente de velocidade para a camada superior em $[m/s]$, v representa a componente de velocidade na direção y em $[m/s]$, w representa a componente de velocidade na direção z em $[m/s]$, ρ é a densidade do gás da mistura em $[kg/m^3]$, ρ_{gas_1} é a densidade do gás da camada superior em $[kg/m^3]$, T é a temperatura em $[K]$, T_1 é a temperatura da camada superior em $[K]$, p é a pressão da mistura em $[Pa]$, p_1 é a pressão da camada superior em $[Pa]$, R é a constante do gás para a mistura em $[J/kgK]$, R_1 é a constante do gás da camada superior em $[J/kgK]$, x é a direção longitudinal do escoamento em $[m]$, x é a direção normal do escoamento em $[m]$, z é a direção transversal do escoamento em $[m]$, t o tempo em s e δ_ω é a espessura de vorticidade.

A espessura de vorticidade δ_ω , está relacionada ao gradiente máximo do perfil de velocidade da camada de mistura, ou seja:

$$\delta_\omega = \frac{\Delta U}{(\partial U / \partial y)_{max}}, \quad (2.45)$$

onde δ_ω é a espessura de vorticidade em [m], ΔU o módulo da diferença de velocidade entre as camadas superior e inferior em [m/s] e $(\partial U / \partial y)_{max}$ é o gradiente máximo do perfil de velocidade em [1/s] SANDHAM e REYNOLDS (1991).

2.3.3 SOLUÇÃO LINEAR POR MODOS NORMAIS

Desta forma, segundo a teoria de estabilidade linear, consideraremos o escoamento como sendo uma decomposição de uma parte média mais uma pequena perturbação, tornando as variáveis dependentes escritas como:

$$u(x, y, z, t) = \bar{u}(y) + u^l(x, y, z, t), \quad (2.46)$$

$$v(x, y, z, t) = v^l(x, y, z, t), \quad (2.47)$$

$$w(x, y, z, t) = w^l(x, y, z, t), \quad (2.48)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \bar{\rho}(y) + \rho^l(x, y, z, t), \quad (2.49)$$

$$T(x, y, z, t) = \bar{T}(y) + T^l(x, y, z, t), \quad (2.50)$$

$$p(x, y, z, t) = 1 + p^l(x, y, z, t), \quad (2.51)$$

$$Y_1(x, y, z, t) = \bar{Y}_1(y) + Y_1^l(x, y, z, t). \quad (2.52)$$

Assim, conforme a equação 1.5 , busca-se uma solução por modos normais:

$$u^l(x, y, z, t) = \Re \{ \hat{u}(y) \exp [i (\alpha x + \beta z - \omega t)] \}, \quad (2.53)$$

$$v^l(x, y, z, t) = \Re \{ \hat{v}(y) \exp [i (\alpha x + \beta z - \omega t)] \}, \quad (2.54)$$

$$w^l(x, y, z, t) = \Re \{ \hat{w}(y) \exp [i (\alpha x + \beta z - \omega t)] \}, \quad (2.55)$$

$$\rho^\lambda(x, y, z, t) = \Re \{ \hat{\rho}(y) \exp [i (\alpha x + \beta z - \omega t)] \} , \quad (2.56)$$

$$T^\lambda(x, y, z, t) = \Re \left\{ \widehat{T}(y) \exp [i (\alpha x + \beta z - \omega t)] \right\} , \quad (2.57)$$

$$p^\lambda(x, y, z, t) = \Re \{ \hat{p}(y) \exp [i (\alpha x + \beta z - \omega t)] \} , \quad (2.58)$$

$$Y_1^\lambda(x, y, z, t) = \Re \left\{ \widehat{Y}_1(y) \exp [i (\alpha x + \beta z - \omega t)] \right\} . \quad (2.59)$$

Aplicando a hipótese de solução por modos normais 2.53, 2.54, 2.55, 2.56, 2.57, 2.58 e 2.59 nas equações de Euler 2.36, 2.37, 2.38, 2.39 e realizando as devidas operações algébricas, obtemos as seguintes equações para as perturbações:

$$\bar{\rho} i (\alpha \bar{u} - \omega) + \hat{v} \frac{d\bar{\rho}}{dy} + \bar{\rho} \left[i (\alpha \hat{u} + \beta \hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] = 0 . \quad (2.60)$$

$$\bar{\rho} \left[i (\alpha \bar{u} - \omega) \hat{u} + \hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} \right] = - \frac{i \alpha \hat{p}}{\gamma_1 Ma_1^2} . \quad (2.61)$$

$$\bar{\rho} i (\alpha \bar{u} - \omega) \hat{v} = - \frac{1}{\gamma_1 Ma_1^2} \frac{d\hat{p}}{dy} \quad (2.62)$$

$$\bar{\rho} i (\alpha \bar{u} - \omega) \hat{w} = - \frac{i \beta \hat{p}}{\gamma_1 Ma_1^2} , \quad (2.63)$$

$$\bar{\rho} \left[i (\alpha \bar{u} - \omega) \widehat{T} + \hat{v} \frac{d\bar{T}}{dy} \right] = - \frac{(\gamma - 1)}{R} \left[i (\alpha \hat{u} + \beta \hat{w}) + \frac{d\hat{v}}{dy} \right] . \quad (2.64)$$

$$\bar{\rho} \left[i (\alpha \bar{u} - \omega) \widehat{Y}_1 + \hat{v} \frac{d\bar{Y}_1}{dy} \right] = 0 , \quad (2.65)$$

$$\hat{p} = \bar{\rho} R \widehat{T} + \hat{\rho} R \bar{T} , \quad (2.66)$$

onde a equação 2.60 é a equação de conservação para a continuidade para a análise de estabilidade linear, a equação 2.61 é a equação de conservação da quantidade de movimento na direção x para análise de estabilidade linear, a equação 2.62 é a equação de conservação da quantidade de movimento na direção y para análise de estabilidade linear, a equação 2.63 é a equação de conservação da quantidade de movimento na direção z para análise de estabilidade linear, a equação 2.64 é a equação de conservação da energia para análise de estabilidade linear,

a equação 2.65 é a equação de conservação das espécies químicas para análise de estabilidade linear e a equação 2.66 é a equação de estado de gás para análise de Estabilidade Linear.

Então, podemos agrupar as equações 2.60, 2.61, 2.62, 2.63, 2.64, 2.65 e 2.66 nas seguintes autofunções:

$$\hat{u} = - \frac{\alpha \hat{p}}{\gamma_1 Ma_1^2 \bar{\rho} (\alpha \bar{u} - \omega)} - \frac{\hat{v}}{i (\alpha \bar{u} - \omega)} \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (2.67)$$

$$\hat{w} = - \frac{\beta \hat{p}}{\gamma_1 Ma_1^2 \bar{\rho} (\alpha \bar{u} - \omega)}, \quad (2.68)$$

$$(\alpha \bar{u} - \omega) \frac{d\hat{v}}{dy} - \alpha \hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{i \alpha^2 \hat{p}}{\gamma_1 Ma_1^2} \left[\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\bar{\rho} \alpha^2} - Ma_1^2 \frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{(\alpha \bar{u} - \omega)^2}{\alpha^2} \right], \quad (2.69)$$

onde, 2.67 decorre da equação de conservação da quantidade de movimento na direção x , 2.68 da equação de conservação da quantidade de movimento na direção z e 2.69 da substituição de 2.67 e 2.68 nas demais equações 2.62, 2.64, 2.65 e 2.66.

2.3.4 EQUAÇÃO DE RAYLEIGH MODIFICADA

Utilizando a transformação de GROPENGIESSER (1970), descritas em SANDHAM (1990), define-se uma variável χ da forma:

$$\chi = \frac{i \alpha \hat{p}}{\gamma_1 Ma_1^2 \hat{v}}, \quad (2.70)$$

e derivando χ em relação a y temos:

$$\frac{d\chi}{dy} = \frac{i \alpha}{\hat{v} \gamma_1 Ma_1^2} \frac{d\hat{p}}{dy} - \frac{i \alpha \hat{p}}{\hat{v}^2 \gamma_1 Ma_1^2} \frac{d\hat{v}}{dy}. \quad (2.71)$$

Da equação de conservação da quantidade de movimento na direção y para análise de estabilidade linear (2.62), manipulada e multiplicada por α temos:

$$\bar{\rho} \alpha (\alpha \bar{u} - \omega) = \frac{i \alpha}{\hat{v} \gamma_1 Ma_1^2} \frac{d\hat{p}}{dy}. \quad (2.72)$$

Manipulando-se a equação 2.69 temos:

$$(\alpha \bar{u} - \omega) \frac{d\hat{v}}{dy} = \alpha \hat{v} \frac{d\bar{u}}{dy} + \alpha G \hat{v} \frac{i \alpha \hat{p}}{\hat{v} \gamma_1 Ma_1^2}, \quad (2.73)$$

onde G é a parte entre colchetes de 2.69. Assim,

$$\frac{d\hat{v}}{dy} = \frac{[\alpha \hat{v} (d\bar{u}/dy) + \alpha G \hat{v} \chi]}{(\alpha \bar{u} - \omega)}. \quad (2.74)$$

Substituindo as equações 2.72 e 2.74 na 2.71 temos o sistema composto pelas equações 2.60, 2.61, 2.62, 2.63, 2.64, 2.65 e 2.66, condensado em uma única equação dada por:

$$\frac{d\chi}{dy} = \frac{\alpha^2 (\bar{u} - \omega/\alpha)}{R\bar{T}} - \chi \left[\frac{\chi G + (d\bar{u}/dy)}{(\bar{u} - \omega/\alpha)} \right], \quad (2.75)$$

onde as condições iniciais de 3.19, quando $y \rightarrow \pm\infty$ SALEMI e MENDONÇA (2008), são expressas por:

$$\chi(y \rightarrow \pm\infty) = \mp \frac{\alpha (\bar{u} - \omega/\alpha)}{\sqrt{G R_{mix} \bar{T}}}. \quad (2.76)$$

3 RESULTADOS PARA A CAMADA DE MISTURA SIMPLES

Para a solução numérica do problema de estabilidade hidrodinâmica da camada de mistura, precisamos resolver dois problemas. O primeiro corresponde ao escoamento base. O segundo o problema de estabilidade espacial. Para esta tarefa, foi desenvolvido um código no Mathematica para resolver tanto o escoamento laminar da camada de mistura bidimensional, binária, dupla e compressível, como para a análise de estabilidade linear espacial.

A vantagem da utilização do programa Mathematica é a fácil manipulação das equações através da computação simbólica, precisão nos cálculos, fácil utilização de suas funções e uma gama de recursos que auxiliam na resolução de determinados problemas.

3.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES SIMILARES DO ESCOAMENTO BASE

Para a simulação do escoamento base, necessitou-se utilizar o método do tiro. O método do tiro, consiste em transformar um problema de condição de contorno em dois problemas de condição inicial. Ou seja, utilizando as equações do escoamento base:

$$f''' + \frac{f f''}{\mathcal{C}} = 0, \quad (3.1)$$

$$g'' + \frac{Pr_{mix}}{\mathcal{C}} f g' + \frac{Pr_{mix} U_1^2}{h_1} (f'')^2 = 0, \quad (3.2)$$

$$s'' + \frac{Le_{mix} Pr_{mix}}{\mathcal{C}} f s' = 0, \quad (3.3)$$

descritas no capítulo anterior, com as seguintes condições de contorno:

$$f(0) = 0 \quad f'(+\infty) \rightarrow 1 \quad f'(-\infty) \rightarrow \beta_{U_{21}}, \quad (3.4)$$

$$g(+\infty) \rightarrow 1 \quad g(-\infty) \rightarrow \beta_{h_{21}}, \quad (3.5)$$

$$s(+\infty) \rightarrow 1 \quad s(-\infty) \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

$$f(0) = 0 \quad f'(+\infty) \rightarrow \beta_{U_{21}} \quad f'(-\infty) \rightarrow \beta_{U_{31}}, \quad (3.7)$$

$$g(+\infty) \rightarrow \beta_{h_{21}} \quad g(-\infty) \rightarrow \beta_{h_{31}}, \quad (3.8)$$

$$s(+\infty) \rightarrow 0 \quad s(-\infty) \rightarrow 1, \quad (3.9)$$

utilizando o método do tiro, as equações similares 3.1, 3.2, 3.3, que são equações diferenciais de ordem maior ou igual a dois, podem ser reescritas em um sistema de equações de primeira ordem, da seguinte forma:

$$f' = df \quad df' = ddf \quad ddf' + f \frac{df'}{\mathcal{C}} = 0, \quad (3.10)$$

$$g' = dg \quad dg' + Pr_{mix} f \frac{dg}{\mathcal{C}} + \frac{Pr_{mix} U_1^2}{h_1} (ddf)^2 = 0, \quad (3.11)$$

$$s' = ds \quad ds' + \frac{Le_{mix} Pr_{mix}}{\mathcal{C}} f ds = 0, \quad (3.12)$$

onde, resolver a equação ordinária de terceira ordem 3.1 é equivalente a resolver um sistema de três equações de primeira ordem 3.10, resolver a equação ordinária de segunda ordem 3.2 é equivalente a resolver um sistema de duas equações de primeira ordem 3.11 e resolver a equação ordinária 3.3 é equivalente a resolver o sistema de duas equações ordinárias de primeira ordem 3.12.

Como as equações 3.10, 3.11 e 3.12 são todas de primeira ordem, necessitamos de condições iniciais que satisfaçam a este problema de primeira ordem. Para isso, transformamos as condições de contorno para a camada superior 3.4, 3.5, 3.6 e as condições de contorno para a camada inferior 3.7, 3.8, 3.9 em condições iniciais para a camada superior:

$$f(0) = 0 \quad df(0) \rightarrow cte2 \quad ddf(0) \rightarrow cte3, \quad (3.13)$$

$$g(0) \rightarrow cte4 \quad dg(0) \rightarrow cte5, \quad (3.14)$$

$$s(0) \rightarrow cte5 \quad ds(0) \rightarrow cte6, \quad (3.15)$$

e para a camada inferior:

$$f(0) = 0 \quad df(0) \rightarrow cte7 \quad ddf(0) \rightarrow cte8, \quad (3.16)$$

$$g(0) \rightarrow cte9 \quad dg(0) \rightarrow cte10, \quad (3.17)$$

$$s(0) \rightarrow cte11 \quad ds(0) \rightarrow cte12. \quad (3.18)$$

Para o cálculo das constantes no problema de condição inicial de *cte1* até *cte12* em $\eta = 0$, foi utilizada a função FindRoot no programa Mathematica, que realiza uma pesquisa sobre o método de maior ordem de precisão de acordo com o problema, utilizando o método de Newton, devido a sua maior ordem de convergência. Desta forma, integramos da condição inicial em $\eta = 0$ até o limite em $\eta \rightarrow \pm\infty$ para as equações 3.10, 3.11, 3.12, 3.10, 3.11 e 3.12, onde a integração é feita utilizando a função "NDSolve" no Mathematica. A função "NDSolve" possui um controle do tamanho do passo automático e alterna entre o método de Runge-Kutta, Adams Implícito entre outros métodos de integração, de acordo com o problema de rigidez da equação diferencial em questão.

3.2 VALIDAÇÃO DO ESCOAMENTO BASE

Primeiramente, foi feito um estudo do erro absoluto da solução gerada no Mathematica. Foi simulado o escoamento base compressivo com $M_C = 1m/s$, considerando os mesmos parâmetros de simulação de utilizados na dissertação de SALEMI (2006) para a camada binária N_2/O_2 , com $T_1 = T_2 = 300k$, $\beta_{U_{21}} = U_2/U_1 = 0.5$, $p = 1atm$ e $\mathcal{C} = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$. Onde verificou-se que com o aumento do número de casas decimais WP de precisão no Mathematica (WP é a abreviatura de Working Precision), o erro cai substancialmente. Foi comparada uma solução para o escoamento similar básico com $WP = 61$ casas decimais de precisão com vários escoamentos similares com menos casas decimais de precisão, como pode ser verificado nos gráficos 3.1, 3.2 e 3.3 para as variáveis similares f' , g e s abaixo:

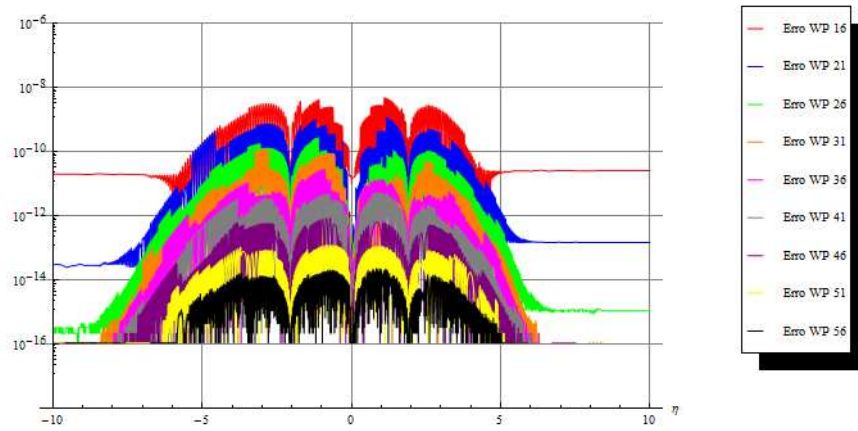


FIG. 3.1: Gráfico de Erro Absoluto para $f(\eta)$ no Mathematica com o número de casas decimais de precisão (WP) variados

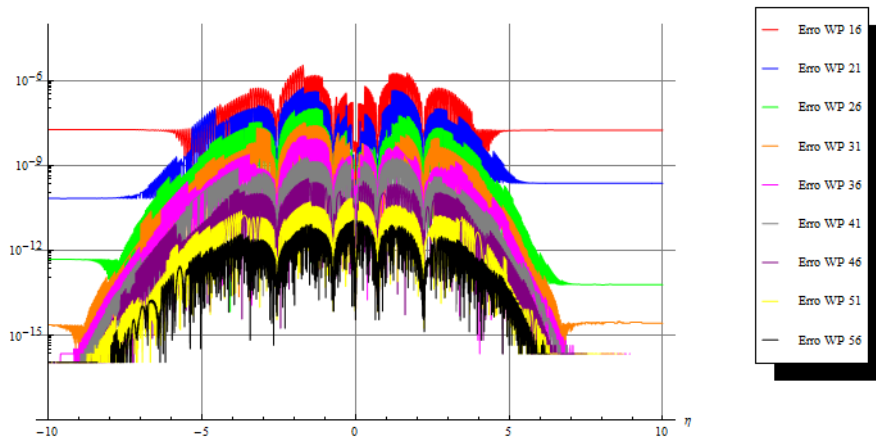


FIG. 3.2: Gráfico de Erro Absoluto para $g(\eta)$ no Mathematica com o número de casas decimais de precisão (WP) variados

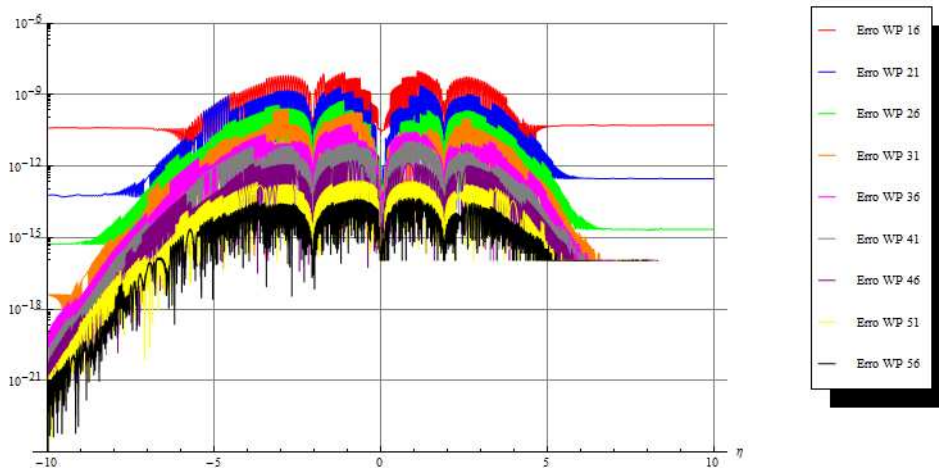


FIG. 3.3: Gráfico de Erro Absoluto para $s(\eta)$ no Mathematica com o número de casas decimais de precisão (WP) variados

O mesmo estudo do erro foi feito no Fortran para o código do SALEMI (2006), onde foram comparadas a solução do perfil similar f' , g e s para o aumento do número de pontos na malha do domínio do escoamento, obtendo da mesma forma, que no Mathematica resultados satisfatórios, pois ao calcularmos o erro absoluto do perfil com 10001 pontos e comparar com os demais perfis com menos pontos na malha, percebemos que, a medida que aumentamos o número de pontos da malha o erro diminui, o que é satisfatório para o estudo da convergência no código implementado no Fortran, como pode ser visto nos gráficos 3.4, 3.5, 3.6:

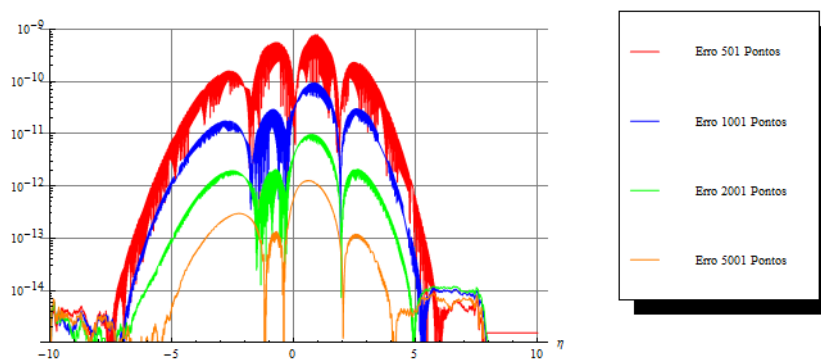


FIG. 3.4: Gráfico de Erro Absoluto para $f(\eta)$ em Fortran com o número de casas decimais de precisão (WP) variados

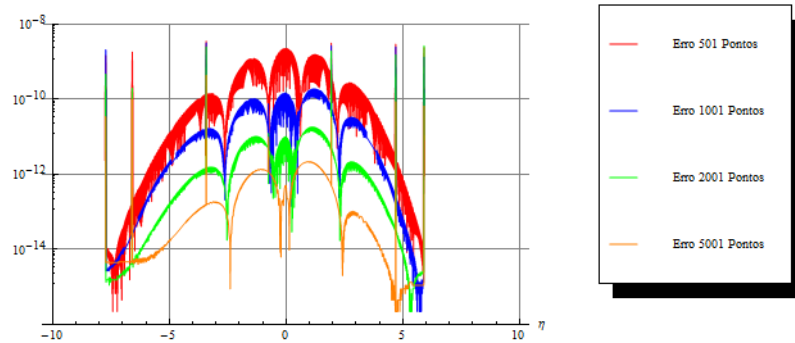


FIG. 3.5: Gráfico de Erro Absoluto para $g(\eta)$ em Fortran com o número de casas decimais de precisão (WP) variados

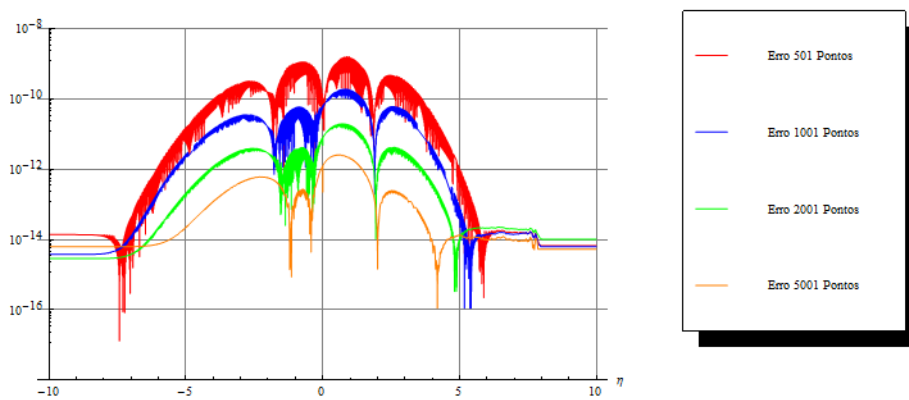


FIG. 3.6: Gráfico de Erro Absoluto para $s(\eta)$ em Fortran com o número de casas decimais de precisão (WP) variados

Posteriormente, foi feito um estudo para a variação do número de Mach convectivo com o intuito de validar o código feito no Mathematica com o código, já validado como visto em SALEMI (2006), desenvolvido em Fortran por Salemi, L., com as mesmas condições, ou seja, camada de mistura binária N_2/O_2 , com $T_1 = T_2 = 300k$, $\beta_u = U_2/U_1 = 0.5$, $p = 1atm$ e $\mathcal{C} = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$. Desta forma, obtemos os seguintes perfis de velocidade longitudinal u e temperatura T em função da coordenada normal adimensionalizada no espaço físico $\frac{y}{\delta_\omega}$ com variação do número de M_C :

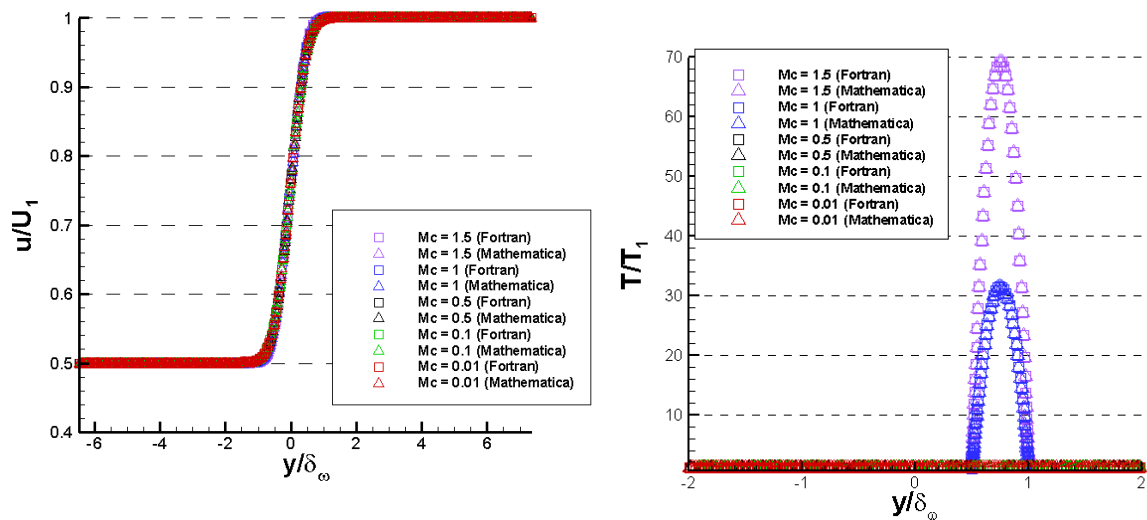


FIG. 3.7: Comparação entre Fortran e Mathematica para os perfis de velocidade e temperatura para a camada binária N_2/O_2 com $T_1 = T_2 = 300k$, $\beta_{U21} = U_2/U_1 = 0.5$, $p = 1atm$ e $\mathcal{C} = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$

Podemos perceber nos perfis de velocidade e temperatura na figura 4.2 que, os dados gerados no programa Mathematica concordam com os dados gerados no código já validado no Fortran para o perfil similar. E ainda, a escolha desses parâmetros foi de muita relevância pois, nos próximos capítulos será detalhado o escoamento base para a camada de mistura dupla e, como a simulação foi feita para o escoamento incompressível isotérmico e para o número de Mach convectivo muito baixo o perfil de temperatura permanece constante havendo apenas variação do perfil de velocidade longitudinal.

3.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE RAYLEIGH

A solução numérica para o problema de estabilidade começa com o dimensionamento do escoamento base, o estudo da estabilidade é feito utilizando a equação de Rayleigh 3.19:

$$\frac{d\chi}{dy} = \frac{\alpha^2 (\bar{u} - \omega/\alpha)}{R\bar{T}} - \chi \left[\frac{\chi G + (d\bar{u}/dy)}{(\bar{u} - \omega/\alpha)} \right], \quad (3.19)$$

onde a equação de Rayleigh 3.19 está em função de y , motivando assim o dimensionamento do escoamento base, com as seguintes condições iniciais:

$$\chi(y \rightarrow \pm\infty) = \mp \frac{\alpha (\bar{u} - \omega/\alpha)}{\sqrt{G R_{mix} \bar{T}}}. \quad (3.20)$$

Embora não pareça correto que a equação de Rayleigh tenha duas condições iniciais, isso se deve ao fato que matematicamente estamos resolvendo duas equações diferenciais de primeira ordem. Desta forma, integramos de $\chi(-\infty) \rightarrow \chi(-0)$ para a o primeiro problema de condição inicial e de $\chi(+\infty) \rightarrow \chi(+0)$ para o segundo problema de condição inicial e comparamos as soluções em $y = 0$, ou seja, $\|\chi(+0) - \chi(-0)\| < \epsilon$.

O problema numérico de estabilidade, consiste em encontrar autovalores α para uma determinada frequência ω que satisfaçam a seguinte relação de dispersão $D(\alpha, \omega) = 0$. Como não podemos resolver a equação diferencial 3.19 sem os valores de α e ω a tarefa de estimar os autovalores que satisfaçam $\|\chi(+0) - \chi(-0)\| < \epsilon$ nem sempre é fácil utilizam-se artifícios como:

- a) O cálculo de isolinhas, que consiste em mapear pontos em comum para regiões de α_r x α_i raízes que satisfazem $\chi(0-) = \chi(0+)$ para um determinado ω_r . Esse método é o mais preciso com a desvantagem de ter um alto tempo computacional de execução pois, ele resolve a equação diferencial para cada um dos pontos de α_r x α_i em $y = 0$. Os pontos de intersecção entre α_i e α_r são os pontos que usaremos como estimativa para calcularmos os autovalores. A dificuldade está em obter uma boa resolução do ponto de intersecção, demandando muito tempo para obter uma boa resolução desse ponto.
- b) Aproximação algébrica da equação diferencial da estabilidade 3.19 . Essa aproximação da equação da estabilidade possibilita ter estimativas com um baixo tempo de execução porém, com a desvantagem de só funciona para $\alpha \ll 1$. Esse método foi obtido das aproximações feitas por FACHINI (2010).

Um exemplo de comparação entre o método da aproximação algébrica e do cálculo de isolinhas para os autovalores pode ser dado para o caso da simulação da camada dupla com $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{U21} = 0.5$, $M_c = 0.01$. Pois, pela aproximação algébrica temos que $\alpha_r = 0.0100152$ e $\alpha_i = -0.010661$ para $\omega_r = 0.01$, enquanto para as isolinhas temos um ponto de intersecção (α_r x α_i) próximo a esse ponto como pode ser visto no gráfico de isolinhas 3.8 e 3.9:

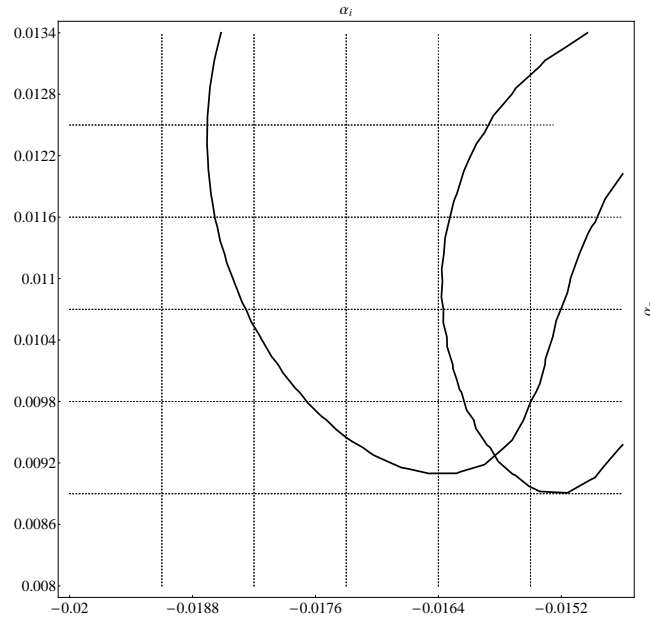


FIG. 3.8: Gráfico de isolinhas para $\beta_{U21} = 1/2$, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$

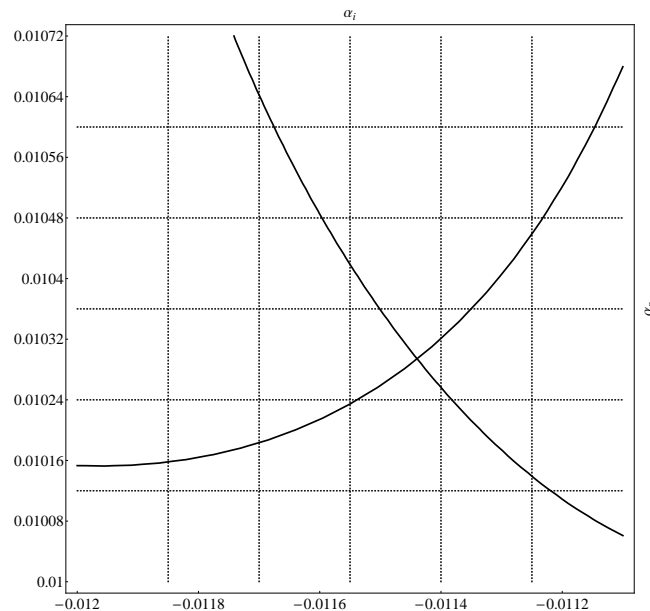


FIG. 3.9: Gráfico aproximado de isolinhas para $\beta_{U21} = 1/2$, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$

Então, depois de estimar o ponto inicial, extrapolamos através de uma aproximação por

séria de Taylor para estimar o próximo ponto de α_i e α_r , variando ω_r , que da mesma forma que o anterior deve satisfazer a relação $\| \chi(+0) - \chi(-0) \| < \epsilon$. Para isso, utilizamos novamente a função FindRoot do Mathematica para estimar a taxa de amplificação e o número de onda até que a condição $\| \chi(+0) - \chi(-0) \| < \epsilon$ seja satisfeita. E assim, repetimos o processo de extrapolação e de cálculo das raízes até que $\alpha_i > 0$ ou qualquer outra condição pré-estabelecida seja satisfeita. Ressaltando que a análise de estabilidade feita nesse estudo foi a análise de estabilidade espacial.

3.4 VALIDAÇÃO DA ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Para a validação do código para a análise de estabilidade no programa Mathematica com o código foi feita com o código, já validado, em Fortran com as mesmas condições do escoamento base mostrados em SALEMI (2006) e citados nos gráficos 3.2 e 3.7. Para a variação da taxa de amplificação espacial e do comprimento de onda, obtivemos a validação com os seguintes resultados:

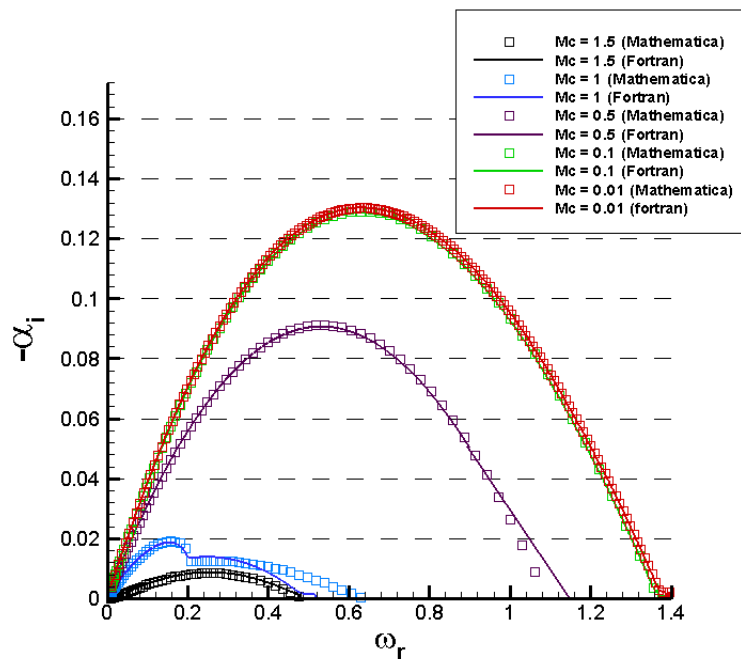


FIG. 3.10: Comparação entre Fortran e Mathematica para variação da Taxa de amplificação espacial para a camada binária N_2/O_2 com $T_1 = T_2 = 300k$, $\beta_{U21} = U_2/U_1 = 0.5$, $p = 1atm$ e $C = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$

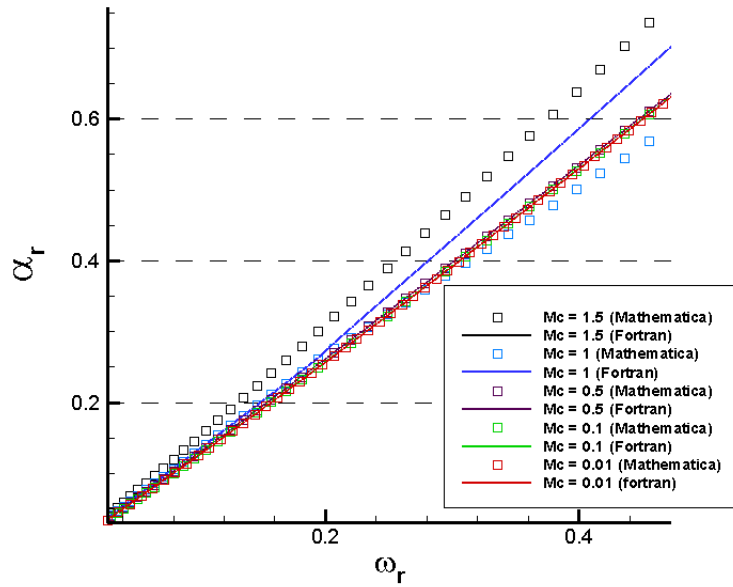


FIG. 3.11: Comparação entre Fortran e Mathematica para o comprimento de onda para a camada binária N_2/O_2 com $T_1 = T_2 = 300k$, $\beta_{U21} = U_2/U_1 = 0.5$, $p = 1atm$ e $C = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$

É possível perceber que, no gráfico para a variação da taxa de amplificação espacial α_i , para o Mach convectivo $M_C = 1$, existe uma descontinuidade e que os valores para a simulação no Mathematica e no Fortran diferem a partir de $\omega_r > 0.2$, o que não desmerece o valor da validação pois, como o $M_C = 1$ é difícil de simular computacionalmente e o método de cálculo dos autovalores é diferente, tanto em Fortran como no Mathematica (no Mathematica foi utilizado o método de Newton e no Fortran o método da secante), podem aparecer diferenças como estas. Mas, a validação está feita, como pode ser visto nas demais curvas para a taxa de variação espacial.

3.5 ANÁLISE DA TRANSIÇÃO DE INSTABILIDADES

Nessa secção daremos conceitos matemáticos da análise da transição de instabilidades com um exemplo e um estudo feito a partir da análise preliminar de SALEMI (2006).

Matematicamente, a definição de convectivamente instável e absolutamente instável está diretamente ligado a introdução de uma relação de dispersão, dada por:

$$D(\alpha, \omega) = 0 \tag{3.21}$$

onde o comportamento dinâmico no espaço é expresso pelo número de onda α e pela frequência

ω complexa. Desta forma, a relação de dispersão 3.5 é dada por:

$$D\left(-i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial t}\right)v(x, t) = 0. \quad (3.22)$$

Estamos interessados na parte linear da relação 3.23 a uma perturbação do estado original $x - t$. A resposta a essa perturbação é dada pela função de Green $G(x, t)$ (SCHMID e HENNINGSON (2001)), que satisfaz:

$$D\left(-i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial t}\right)G(x, t) = \delta(x)\delta(t). \quad (3.23)$$

Assim, a definição de estabilidade linear e de convectivamente e absolutamente instável são expressas em termos de uma resposta a perturbação $G(x, t)$.

Desta forma, um escoamento base é linearmente estável se, para todo o domínio:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0; \quad x/t = \text{constante}. \quad (3.24)$$

E, linearmente instável, se para pelo menos um ponto no domínio:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty; \quad x/t = \text{constante}. \quad (3.25)$$

Então, para escoamentos instáveis, distinguiremos escoamentos convectivamente e absolutamente instável.

O escoamento base será convectivamente instável se, para todo o domínio:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0; \quad x/t = 0. \quad (3.26)$$

E, absolutamente instável se, para todo o domínio:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty; \quad x/t = 0. \quad (3.27)$$

Essas definições podem ser exemplificadas no gráfico 3.12.

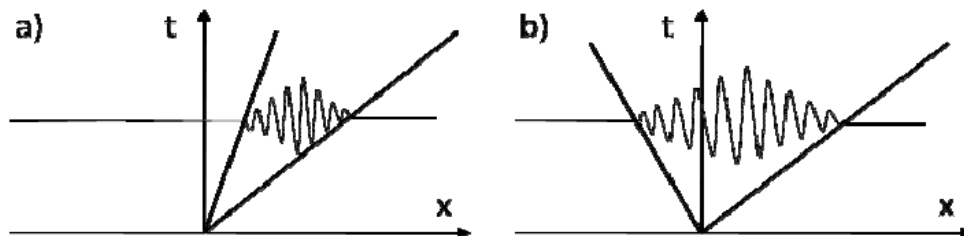


FIG. 3.12: a) Instabilidade Convectiva b) Instabilidade Absoluta

Uma parte importante na análise de estabilidade é a localização de pontos de transição de instabilidades absolutas no plano complexo. Um dos métodos utilizados é o método de Briggs (BRIGGS (1964); SCHMID e HENNINGSON (2001)) onde, para uma frequência ω dada no plano complexo calcula-se pontos espaciais que satisfazem a relação de dispersão. Desta forma, fixamos a parte imaginária de ω e variamos a sua parte real. e calculamos as taxas de amplificação α_i e o comprimento de onda α_r para cada ponto de ω_r e ω_i para a relação de dispersão, onde o objetivo é encontrar pontos de sela no plano α que dividam o plano em diferentes semi-espacos.

Um bom exemplo do método de Briggs pode ser encontrado em KUPFER et al. (1987); SCHMID e HENNINGSON (2001) para a seguinte relação de dispersão:

$$D(\omega, \alpha) = \omega - \left[\frac{1}{3}(\alpha - i)^3 + i - \alpha V \right], \quad (3.28)$$

onde, V é um parâmetro.

Se considerarmos $V = 0.75$ e aplicarmos o método de Briggs, descrito anteriormente, vamos mapear linhas para as constantes ω_i e ω_r calcularemos para α complexo para a relação de dispersão 3.28. Onde o resultado pode ser visto na figura 3.13:

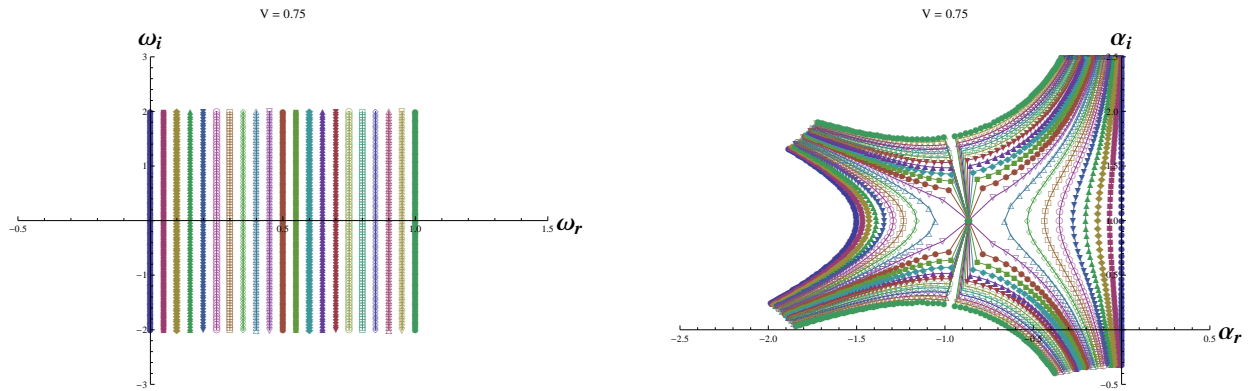


FIG. 3.13: Mapa de ω no plano complexo e de α complexo segundo a relação de dispersão 3.28

No gráfico 3.13 podemos ver claramente um ponto de sela dividindo o plano de α complexo para $V = 0.75$. como o ponto de sela no plano $\alpha_r \times \alpha_i$ é correspondente ao ponto de $\omega_r \times \omega_i$ na parte superior do gráfico, ou seja, o ponto de sela em $\alpha_r \times \alpha_i$ ocorre na parte superior de ω_r , a instabilidade é absoluta.

O método de Briggs foi aplicado ao caso de validação apresentado anteriormente para a camada de mistura binária N_2/O_2 com $T_1 = T_2 = 300k$, $\beta_{U21} = U_2/U_1 = 0.5$, $p = 1atm$ e $\mathcal{C} = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$ com variação do número de Mach convectivo na região aonde o Mach

convectivo está próximo de 1, onde a relação de dispersão é dada pela equação de Rayleigh 3.19.

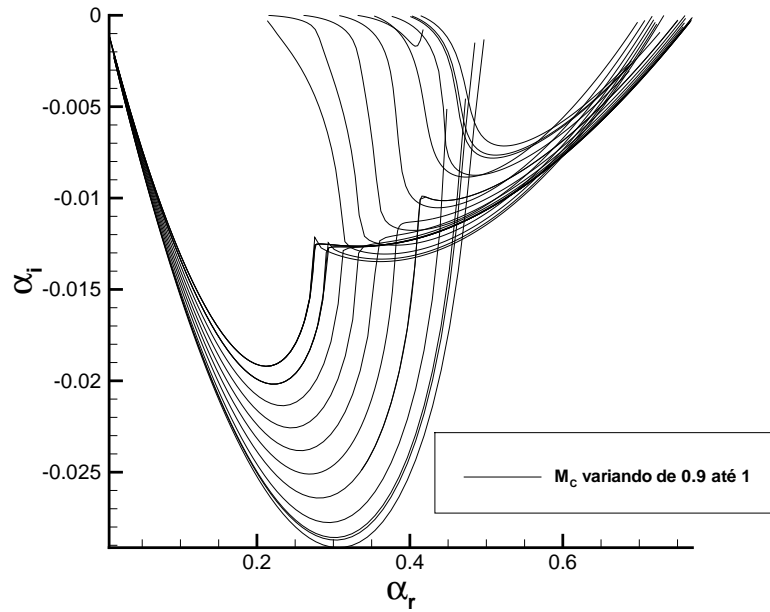


FIG. 3.14: Gráfico α_r x α_i complexo segundo a relação de dispersão 3.28

onde percebemos que, embora exista uma descontinuidade para o modo 1 não se tem uma transição como apresentado no exemplo 3.13. Portanto, não existe transição no gráfico .

4 RESULTADOS PARA A CAMADA DE MISTURA DUPLA

4.1 SOLUÇÃO ASSINTÓTICA CASADA PARA O ESCOAMENTO BASE

Podemos compor perfis casados para ambas as camadas, gerando a camada de mistura dupla através do método das expansões assintóticas casadas utilizados em COLE (1968), DYKE (1964) e ALVES (2006). Ele permite a composição de novas soluções mantendo seus erros da mesma ordem do erros de cada solução individual. Como foi definido no perfil similar 2.8, a variável independente η não depende apenas de y mas de outros parâmetros, desta forma faremos a junção dos perfis de velocidade para ambas as camadas em y e não em η . Então, o método das Expansões assintóticas permite compor o perfil de velocidade da camada dupla da seguinte maneira:

$$U_{12} = U_1(y_1) + U_1(y_2) - W \quad (4.1)$$

onde $y_1 = \frac{y}{\delta_\omega} - \delta/2$, $y_2 = \frac{y}{\delta_\omega} + \delta/2$, δ é a distância entre as camadas e W é o termo comum entre os perfis de velocidade para a camada superior e inferior, ou seja, como as condições de contorno para a camada superior em $f'(-\infty) \rightarrow \beta_{U_{21}}$ é igual a condição de contorno da camada inferior em $f'(+\infty) \rightarrow \beta_{U_{21}}$ então o termo comum para a velocidade em $\frac{y}{\delta_\omega}$ é $\beta_{U_{21}}$. Daí, temos o seguinte perfil de velocidade para a camada dupla:

$$U_{12} = U_1\left(\frac{y}{\delta_\omega} - \delta/2\right) + U_2\left(\frac{y}{\delta_\omega} + \delta/2\right) - \beta_{U_{21}}, \quad (4.2)$$

onde U_{12} é o perfil de velocidade duplo, U_1 o perfil de velocidade para a camada superior e U_2 o perfil de velocidade para a camada inferior com $\beta_{U_{21}} = U_2/U_1$.

Nas duas figuras abaixo, podemos perceber as etapas desse processo. A esquerda do gráfico (4.2) tem-se o perfil de velocidade para a mono-espécie N_2/N_2 isotérmica com $\beta_{U_{21}} = 1/2$, $\beta_{U_{31}} = 0$, $\beta_{T_{31}} = \beta_{T_{21}} = 1$, $\delta/2 = 4.5$, $p = 1 atm$ e $M_C = 0.01$ com $\mathcal{C} = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$ antes de retirarmos o termo em comum e no gráfico da direita (4.2) o perfil de velocidade, com as mesmas condições, após subtrairmos o termo em comum $\beta_{U_{21}}$.

O mesmo processo descrito no exemplo acima pode ser aplicado para os demais parâmetros do escoamento base para a análise de estabilidade espacial, ou seja, podemos estender o processo para du/dy , T , R_{mix} , ρ_{mix} , γ_{mix} e assim gerar o escoamento base para a camada de mistura plana dupla, que servirá para a análise de estabilidade linear.

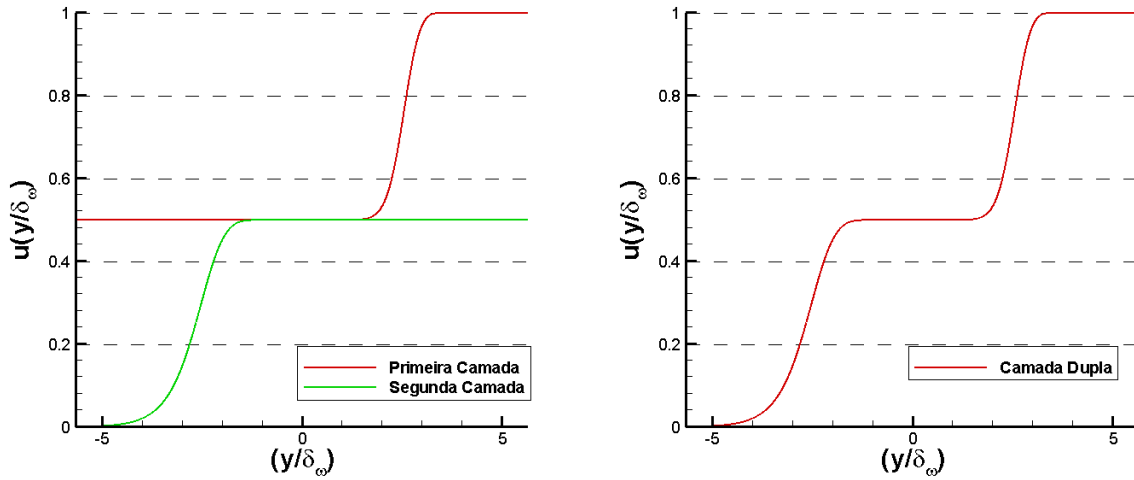


FIG. 4.1: Perfis de velocidade para a mono-espécie N_2/N_2 isotérmica antes e depois da combinação para $\beta_{U21} = 1/2$, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$, $p = 1atm$ com $\mathcal{C} = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$

Uma questão importante no processo de simulação da camada de mistura dupla é sua continuidade nos pontos de união. Uma continuidade de ordem 0 indica que há uma continuidade na função, de ordem 1 indica que há continuidade na derivada primeira, de ordem 2 que há continuidade na derivada segunda e assim por diante. Pela análise matemática temos que, se a camada de mistura dupla for diferenciável, ela será contínua. Logo, a camada de mistura dupla é continuamente diferenciável utilizando o método das expansões assintóticas. Isso pode ser visto para o perfil duplo de du/dy e d^2u/dy^2 para a mono-espécie N_2/N_2 isotérmica com $\beta_{U21} = 1/2$, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$, $\delta/2 = 4.5$, $p = 1atm$ e $M_C = 0.01$ para $\mathcal{C} = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$:

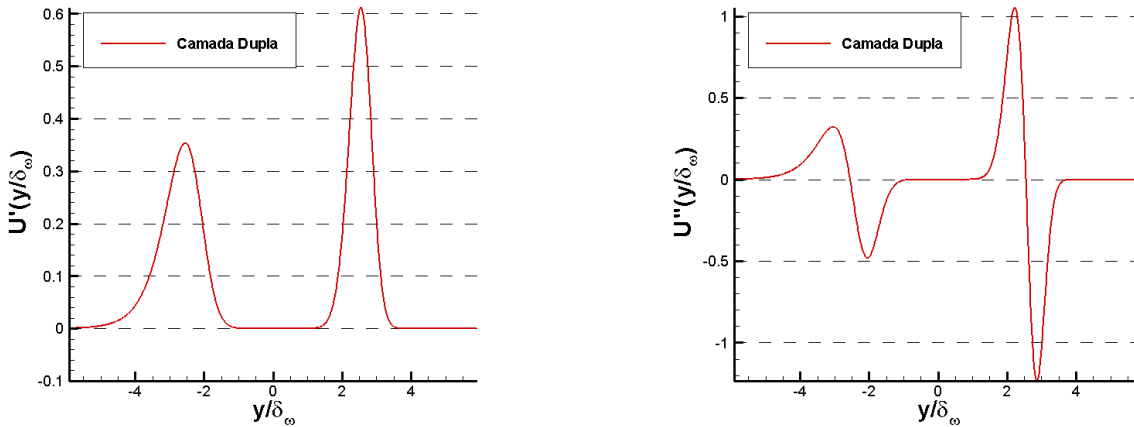


FIG. 4.2: du/dy e d^2u/dy^2 para a mono-espécie N_2/N_2 isotérmica para $\beta_{U21} = 1/2$, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$, $p = 1atm$ com $\mathcal{C} = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$

4.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR

Embora o código elaborado no Mathematica seja capaz de simular a camada de mistura dupla binária para diversas combinações dos gases Ar , H_2 , He , N_2 , Ne , O_2 , assim como o código em Fortran desenvolvido por SALEMI (2006) para a camada simples, o objetivo desse trabalho é, primeiramente, investigar o surgimento de modos adicionais associados a camada de mistura plana dupla e construir um modelo simplificado para a camada de mistura dupla que aproxime, o jato coaxial. Para esta análise utilizou-se os seguintes valores para os parâmetros na monoespécie N_2/N_2 isotérmica: $\beta_{U21} = 1/2$, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$, $\delta/2 = 4.5$, $p = 1 atm$ e $M_C = 0.01$ para $\mathcal{C} = Pr_{mix} = Le_{mix} = 1$ em todas as simulações da camada de mistura dupla. O leitor poderá encontrar mais exemplos de análise de estabilidade para misturas binárias em SALEMI (2006) e em KOZUSKO et al. (2010), onde podem ser encontrados 30 combinações dos gases citados acima.

No gráfico 4.3 podemos perceber a influência da variação de β_{u21} sobre a taxa de amplificação espacial e a existência de novos modos pois, como temos uma camada superior e outra inferior, surgem dois modos distintos com valores para as taxas de ampliações máximas muito próximas. Como $\beta_{U21} = 0$ e $\beta_{U21} = 0$ são casos da camada de mistura simples, temos apenas um modo. E ainda, conforme podemos analisar no gráfico (4.3), aumentar β_{U21} a partir de 0 até 1 reduz a taxa de amplificação espacial e aumenta a faixa de frequências instáveis associadas ao modo 1. Ao mesmo tempo, isso aumenta tanto a taxa de amplificação quanto a faixa de frequências instáveis associadas ao modo 2. Logo, os modos 1 e 2 representam as camadas interna e externa do jato coaxial, respectivamente.

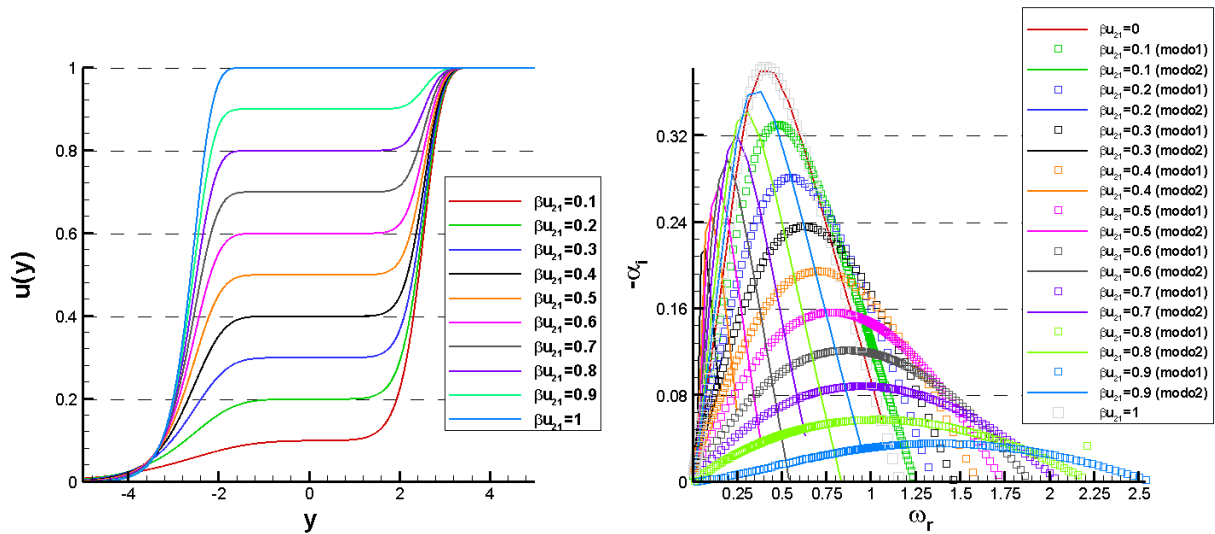


FIG. 4.3: Camada de mistura e taxa de variação espacial para β_{U21} variado, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$

Já o gráfico 4.4 mostra o caso onde a camada externa é mais rápida que a interna. Como a vorticidade da camada de mistura externa é maior que a interna, a taxa de amplificação do modo 2 é maior que a do modo 1. Contudo, sua faixa de frequências instáveis é menor. Outro resultado importante é a mudança qualitativa de comportamento do modo 1 na medida que $\beta_{U21} = 1.7$. Este é um forte indicativo que uma mudança de instabilidades está ocorrendo, porém uma análise mais profunda é necessária para confirmação.

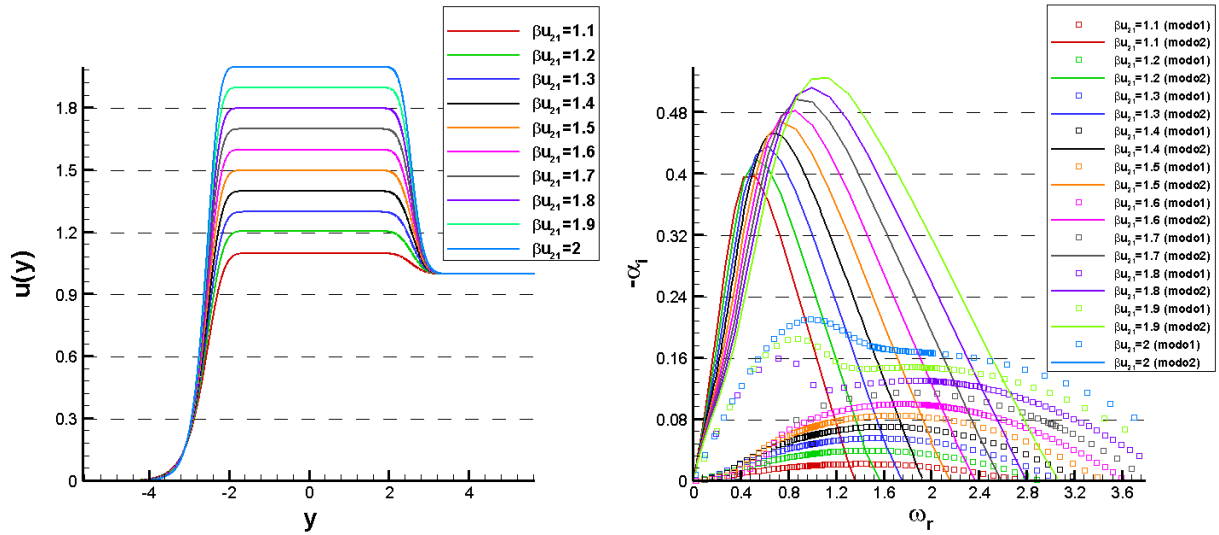


FIG. 4.4: Camada de mistura e taxa de variação espacial para β_{U21} variado, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$

Vale a pena notar ainda que o modo 1 possui um comprimento de onda instável menor que o modo 2 quando $0 < \beta_{U21} < 1$. Contudo, esta relação se reverte quando $1 < \beta_{U21} < 2$.

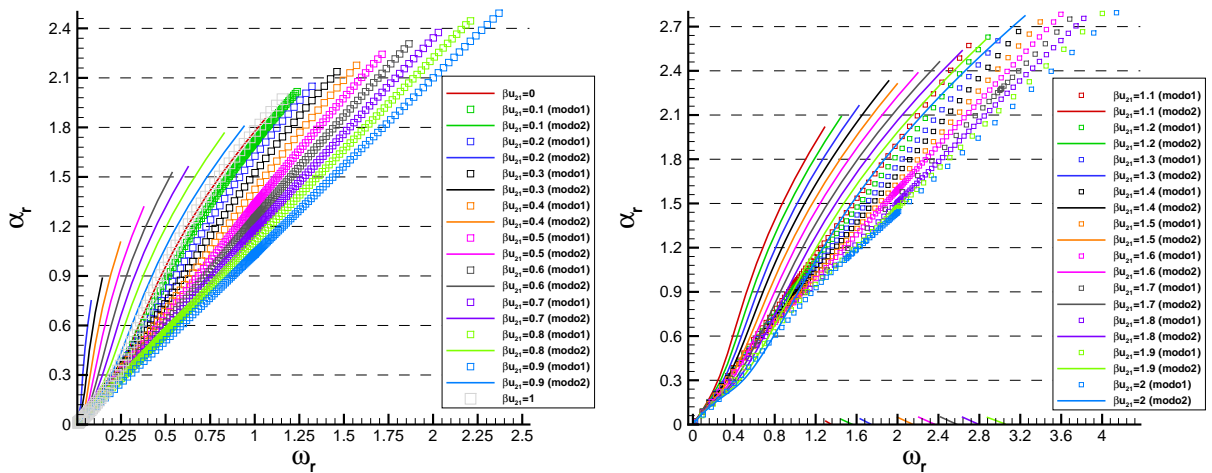


FIG. 4.5: Número de onda para β_{U21} variado, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$

Um terceiro modo foi encontrado, com taxas de amplificação consideráveis dentro de uma certa faixa de variação de β_{U21} , como pode ser verificado no gráfico 4.6. Vale a pena destacar que a faixa de frequências instáveis deste modo não começa em zero. Logo, este não é um modo de Kelvin-Helmholtz como os dois primeiros. Além disso, a amplitude de sua taxa de crescimento é da mesma ordem encontrada nos modos 1 e 2, tornando-o tão relevante quanto estes dois modos.

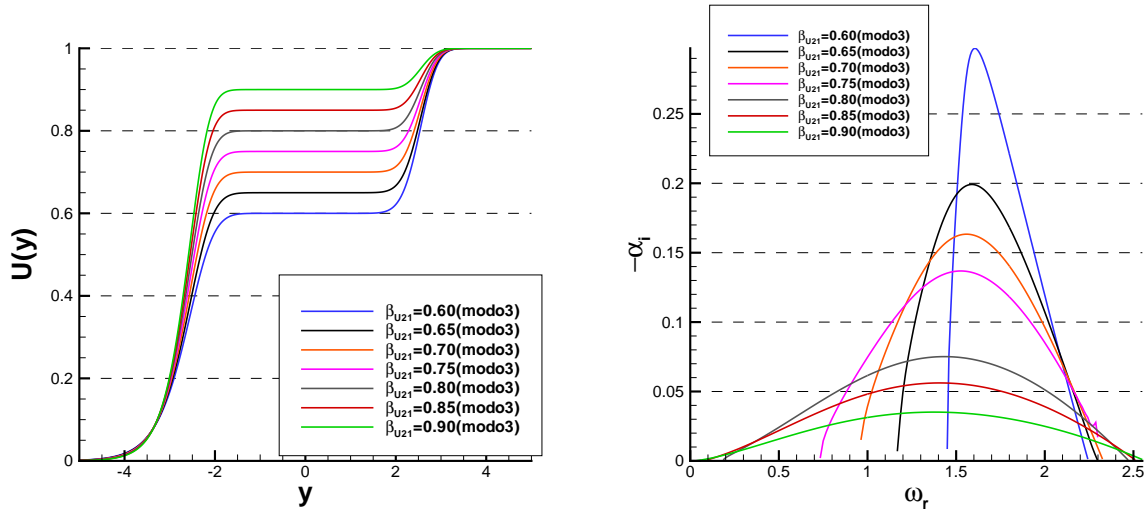


FIG. 4.6: terceiro modo para a taxa de variação espacial para β_{U21} variado para $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e $\delta/2 = 4.5$

A fase final deste estudo ira investigar o que ocorre nos dois casos acima quando a distância entre as camadas é reduzida. Para tal, são considerados apenas $\beta_{U21} = 0.5$ e $\beta_{U21} = 1.5$. Isto pode ser verificado no gráfico 4.8. Podemos observar que o modo 1 praticamente não sofre alterações. O mesmo pode ser dito sobre o modo 2. Porém, isso é verdade apenas com $2 < \delta < 4$. Uma mudança drástica de comportamento ocorre quando $\delta < 1.5$. Nos dois casos mostrados em que esta condição é verdadeira, apenas um modo instável foi encontrado. Logo, este não parece ser um indício de uma transição de instabilidades, mas sim de que uma distância mínima entre as duas camadas é necessária para que dois modos de Kelvin-Helmholtz co-existam.

Uma análise semelhante foi feita para $\beta_{u21} = 1.5$ e mostrada no gráfico 4.9. Nele, podemos observar que os dois modos de Kelvin-Helmholtz co-existem para valores ainda menores de delta, quando comparados ao caso onde $\beta_{U21} = 0.5$. Isso não é inesperado, uma vez que o modo 2 é significativamente mais forte neste caso, como comentado anteriormente.

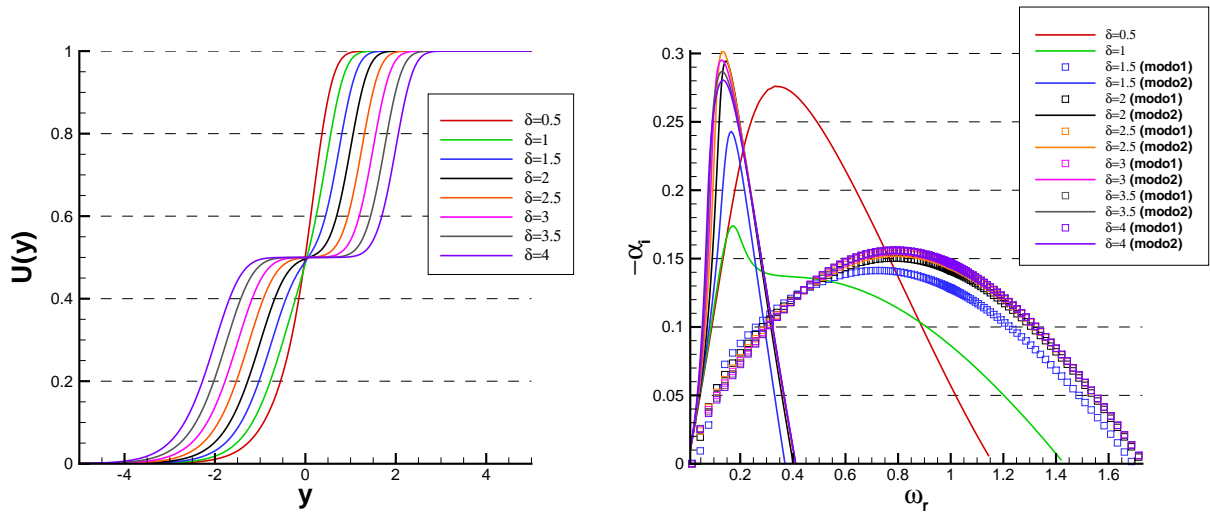


FIG. 4.7: Camada de mistura e taxa de variação espacial para $\beta_{U21} = 0.5$, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = \beta_{T21} = 1$ e δ variado

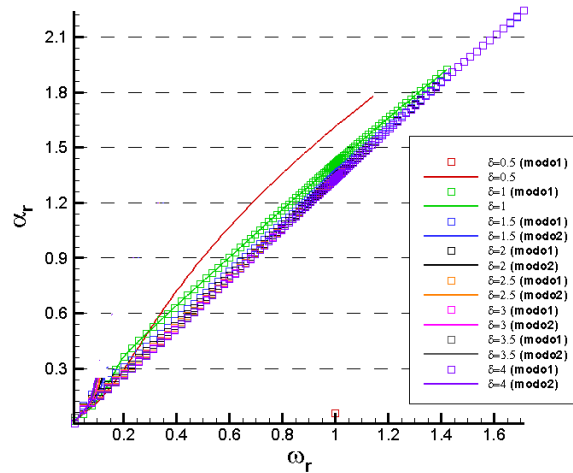


FIG. 4.8: Número de onda para $B_{u21} = 0.5$, $B_{u31} = 0$, $B_{T31} = B_{T21} = 1$ e δ variado

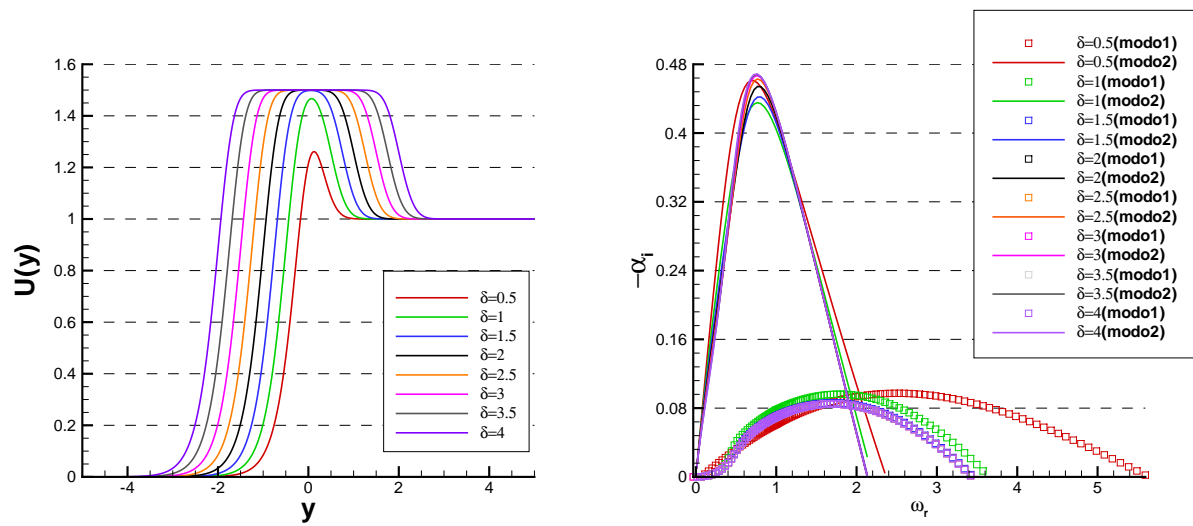


FIG. 4.9: Camada de mistura e taxa de variação espacial para $\beta_{U21} = 1.5$, $\beta_{U31} = 0$, $\beta_{T31} = B_{T21} = 1$ e δ variado

5 CONCLUSÕES E ESTUDOS FUTUROS

Esta dissertação desenvolveu uma metodologia para a construção de perfis de velocidade para camadas de mistura duplas para modelar o comportamento de um jato coaxial. Esta, por sua vez, foi utilizada para a análise de estabilidade linear deste escoamento. Apesar dos resultados apresentados estarem relacionados com escoamentos incompressíveis apenas, o código desenvolvido pode simular problemas com elevados números de Mach, variação de temperatura e, ainda, considerar até duas espécies diferentes.

A análise de estabilidade mostrou o surgimento de um terceiro modo instável além dos dois modos de Kelvin-Helmholtz esperados para uma camada dupla. Ele tem amplitude e frequências da mesma ordem destes modos. Além disso, diversas situações indicativas de uma transição de instabilidades foram detectadas e merecem atenção em estudos futuros, uma vez que o controle de jatos coaxiais nestes casos deve ser adaptado.

Desta forma, algumas sugestões para estudos futuros são mostradas abaixo:

- Simular a parede entre jatos com espessura finita
- Acrescentar o efeito da temperatura.
- Acrescentar o efeito da fração de massa.
- Análise da transição de instabilidades.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALSTON, T. M. e COHEN, I. M. **Decay of a laminar shear layer.** *Physics of Fluids*, 4(12): 2690–2699, Dezembro 1992.
- ALVES, L. S. D. B. **Transverse Jet Shear-Layer Instabilities: Linear Stability Analysis and Numerical Simulations.** Projeto Fim de Curso, University of California, Los Angeles, March 2006.
- ALVES, L. S. D. B. **Jatos - Camadas de Mistura Cilíndricas**, volume 2: Aplicações. J. da R. M. Pontes; N. Mangiavachi, Rio de Janeiro, No prelo 2012.
- ANDERSON, J. D. **Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics.** AIAA, 2000.
- BALARAC, G., MÉTAIS, O. e LESIEUR, M. **Mixing enhancement in coaxial jets through inflow forcing: A numerical study.** *Physics of Fluids*, 19:1070–6631, julho 2007.
- BRIGGS, R. J. **Electron-Stream Interaction with Plasmas.** MIT Press, Cambridge, 1964.
- BROWN, G. L. e ROSHKO, A. **On Density Effects and Large Structure in Turbulent Mixing Layers.** *Journal of Fluid Mechanics*, 64:775–816, 1974.
- COLE, J. **Perturbation Methods in Applied Mathematics.** Blaisdell Publishing Company, Massachusetts, 1968.
- DAHM, W. J. A. e FRIELER, C. E. AND TRYGGVASON, G. **Vortex structure and dynamics in the near field of a coaxial jet.** *Journal of Fluid Mechanics*, 241:371–402, 1992.
- DYKE, M. **Perturbation Methods in Fluid Mechanics.** Academic Press, New York, 1964.
- FACHINI, F. F. **Analysis of Eq. 4.82** Leonardo Msc Thesis. *Notas de Aula*, outubro 2010.
- GROPENGIESSER, H. **Study on the stability of boundary layers in compressible fluids.** National Aeronautics and Space Administration-NASA, F-12, 1970.
- HUERRE, P. e MONKEWITZ, P. A. **Absolute and Convective Instabilities in Free Shear Layers.** *Journal of Fluid Mechanics*, 159:151–168, 1985.
- JACKSON, T. L. e GROSCH, C. E. **Inviscid spatial stability of a compressible mixing layer.** *Journal of Fluid Mechanics*, 208:609–637, 1989.
- JENDOUBI, S. e STRYKOWSKI, P. **Absolute and convective instability of axisymmetric jets with external flow.** *Physics of Fluids*, 6:3000–3009, 1994.
- KENNEDY, C. A. e GATSKI, T. B. **Self-similar supersonic variable-density shear layers in binary systems.** *Physics of Fluids*, 6(2):662–673, Fevereiro 1994.
- KOZUSKO, F., GROSCH, C. E., JACKSON, T. L., KENNEDY, C. A. e GATSKI, T. B. **The structure of a variable property, compressible mixing layers in binary gas mixtures.** *Physics of Fluids*, 8(7):1945–1953, julho 2010.

- KUNDU, P. K. e COHEN, I. M. **Fluid Mechanics**. New York, 2002.
- KUPFER, K., BERS, A. e RAM, A. K. **The cusp map in the complex-frequency plane for absolute instabilities**. *Physics of Fluids*, 30:3075–3082, 1987.
- LARDJANE, N., FEDIOUN, I. e GOKALP, I. **Accurate initial conditions for the direct numerical simulation of temporal compressible binary shear layers with high density ratio**. *Computer & Fluids*, 33:549–576, 2004.
- LESS, L. **Laminar Heat Transfer over Blunt-Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds**. *Jet Propulsion*, 26(7):259–269, 1956.
- LEVY, S. **Effect of Large Temperature Changes (Including Viscous Heating) Upon Laminar Boundary Layers With Variable Free-Stream Velocity**. *Journal of Aeronautical Sciences*, 21(7):459–474, 1954.
- LEYVA, I. A., CHEHROUDI, B. e TALLEY, D. **Dark core analysis of coaxial injectors at sub-, near-, and supercritical pressures in a transverse acoustic field**. *AIAA Journal*, 43, 2007.
- LOCK, R. C. **The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams**. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 4:42–63, 1951.
- MICHALKE, A. **On the Inviscid Instability of the Hyperbolic-Tangent Velocity Profile**. *Journal of Fluid Mechanics*, 19:543 – 556, 1964.
- MICHALKE, A. **On Spatially Growing Disturbances in an Inviscid Shear Layer**. *Journal of Fluid Mechanics*, 23:521–544, 1965.
- MONKEWITZ, P. A. e HUERRE, P. **Influence of the velocity ratio on the spatial instability of mixing layers**. *Physics of Fluids*, 25:1137–1143, 1982.
- PERRAULT-JONCAS, D. e MASLOWE, S. A. **Linear stability of a compressible coaxial jet with continuous velocity and temperature profiles**. *Physics of Fluids*, 20:74102–74102–9, 2008.
- PLANCHÉ, O. H. R. **A numerical investigation of the compressible reacting mixing layer**. Dissertação de Mestrado, Stanford University, California, 1993.
- RODRIGUEZ, J. I. **Acoustic Excitation of Liquid Fuel Droplets and Coaxial Jets**, 2009.
- RODRIGUEZ, J. I., LEYVA, I. A., CHEHROUDI, B. e TALLEY, D. **Results on Subcritical One-Phase Coaxial Jet Spread Angles and Subcritical to Supercritical Acoustically-Forced Coaxial Jet Dark Core Lengths**. *AIAA Journal*, 44, 2008.
- SALEMI, L. C. e MENDONÇA, M. T. **Spatial and Temporal Linear Stability Analysis of Binary Compressible Shear Layer**. *AIAA Journal*, (38):2008–3841, 2008.
- SALEMI, L. D. C. **Análise de Estabilidade Linear de Camada de Mistura Laminar Compressível Binária**. Dissertação de Mestrado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Cachoeira Paulista, 2006.

- SANDHAM, N. D. **A Numerical Investigation of the Compressible Mixing Layer.** Dissertação de Mestrado, Stanford University, California, 1990.
- SANDHAM, N. D. e REYNOLDS, W. C. **Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer.** Journal of Fluid Mechanics, 224:133–158, 1991.
- SCHMID, P. J. e HENNINGSON, D. S. **Stability and Transition in Shear Flows**, volume 142. Springer, New York, 2001.
- TALAMELLI, A. e GAVARINI, I. **Linear instability characteristics of incompressible coaxial jets.** Flow Turbulence Combust, págs. 221–240, janeiro 2006.
- TING, L. **On the mixing of two parallel streams.** Journal of Mathematical Physics, 28:153–165, 1959.