

**MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Maj QEM LUCIANO VASCONCELOS ROCHA

**ALGORITMO DE NIVELAMENTO E ALINHAMENTO DE UM
SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL DO TIPO SOLIDÁRIO
("STRAPDOWN")**

Rio de Janeiro

2006

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Maj LUCIANO VASCONCELOS ROCHA

ALGORITMO DE NIVELAMENTO E ALINHAMENTO DE UM SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL DO TIPO SOLIDÁRIO (“STRAPDOWN”)

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Clódio Alberto Pastro Sarzeto – D.C.

Co-orientador: Prof. Carlos Renato Caputo Durão – M.C.

Rio de Janeiro

2006

c2006

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro-RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e do orientador.

R672 Rocha, Luciano Vasconcelos
Algoritmo de Alinhamento e Navegação de um Sistema de Navegação Inercial do tipo solidário (“strapdown”)/ Luciano Vasconcelos Rocha. - Rio de Janeiro : Instituto Militar de Engenharia, 2006.
165 p. : il., graf., tab.

Dissertação (mestrado) - Instituto Militar de Engenharia – Rio de Janeiro, 2006.

1. Sistemas de Navegação Inercial. 2. Algoritmo de Nivelamento e Alinhamento. I. Título. II. Instituto Militar de Engenharia

CDD 629.13251

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Maj LUCIANO VASCONCELOS ROCHA

ALGORITMO DE ALINHAMENTO E NIVELAMENTO DE UM SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL DO TIPO SOLIDÁRIO (“STRAPDOWN”)

Dissertação de Mestrado apresentada no Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Clódio Alberto Pastro Sarzeto – D.C.

Co-orientador: Prof. Carlos Renato Caputo Durão – M.C.

Aprovada em 05 de janeiro de 2006 pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Clódio Alberto Pastro Sarzeto – D.C. do IME - Presidente

Prof. Geraldo Magela Pinheiro – Dr. ENSAE do IME

Maj QEM Armando Morado Ferreira – Ph. D. do IME

Pedro Cunha Campos Roquette – D.Sc. do IPqM

Carlos Renato Caputo Durão – M.C. do IPqM

Rio de Janeiro

2006

AGRADECIMENTOS

A Deus em primeiro lugar, que, por sua graça e misericórdia, guiou os meus passos na escolha do tema e das cadeiras a cursar, na busca das fontes de consulta, além de colocar no meu caminho diversas pessoas que tiveram papel decisivo na elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, pela dedicação, apóio e esforços envidados, desde a minha tenra idade, que me deram o alicerce necessário para todos os empreendimentos de minha vida adulta, inclusive este.

A meu orientador, Dr. Clodio Alberto Pastro Sarzeto por sua valiosa orientação, apoio e todos os conhecimentos transmitidos.

Ao meu co-orientador, Prof. Carlos Renato Caputo Durão, que foi uma destas pessoas colocadas por Deus no meu caminho num momento de muitas dificuldades na consecução deste trabalho e, sem cuja preciosa colaboração, a chegada a um desfecho com êxito dificilmente seria possível.

“Levantarei os meus olhos para os montes, de onde vem o meu socorro.

O meu socorro vem do SENHOR que fez o céu e a Terra.

Não deixará vacilar o teu pé; aquele que te guarda não tosquenejará.

Eis que não tosquenejará nem dormirá o guarda de Israel.

O SENHOR é quem te guarda; o SENHOR é a tua sombra à tua direita.

O sol não te molestará de dia nem a lua de noite.

O SENHOR te guardará de todo o mal; guardará a tua alma.

O SENHOR guardará a tua entrada e a tua saída, desde agora e para sempre”.

(Salmo 121 – Bíblia Sagrada)

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	11
LISTA DE ABRAVIATURAS E SÍMBOLOS.....	14
1. INTRODUÇÃO.....	19
1.1. Conceitos Gerais.....	19
1.2. Histórico.....	20
1.3. Descrição de um Sistema de Navegação Inercial (SNI).....	21
1.4. Objetivo do Trabalho.....	21
1.5. Relevância do Trabalho.....	22
1.6. Organização do Trabalho.....	23
1.7. Posicionamento do Trabalho.....	24
1.8. Revisão Bibliográfica.....	24
2. CONCEITOS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL.....	26
2.1. Transformação de Coordenadas.....	26
2.1.1. Co-senos Diretores.....	27
2.1.2. Parâmetros de Euler ou Quaternions.....	30
2.1.3. Ângulos de Euler.....	31
2.2. Variáveis de Navegação.....	36
2.2.1. Variáveis de Posição.....	36
2.2.2. Variáveis de Velocidade.....	37
2.2.3. Variáveis de Atitude.....	38
2.3. Referenciais.....	38
2.3.1. Referencial inercial com origem no centro da Terra.....	39
2.3.2. Referencial da Terra.....	39
2.3.3. Referencial do corpo.....	40
2.3.4. Referencial Local ou de Navegação.....	41
2.3.4.1. Referencial Estável no Espaço (“Space Stable”).....	41
2.3.4.2. Referencial Localmente Nivelado (“Local Level”).....	41

2.3.4.2.1.	Configuração Geográfica.....	42
2.3.4.2.2.	Configuração “Free Azimuth”.....	45
2.3.4.2.3.	Configuração “Wander Azimuth”.....	46
2.4.	Navegação Inercial.....	46
2.4.1.	Fundamentos.....	46
2.4.1.1.	Princípio da Relatividade de Einstein-Galileu.....	46
2.4.2.	Sistemas de Navegação Inercial.....	49
2.5.	Mecanizações Típicas de um Sistema de Navegação Inercial.....	49
2.6.	Algoritmos de Alinhamento, de Navegação e de Atitude.....	51
2.6.1.	Algoritmo de Alinhamento.....	52
2.6.2.	Algoritmo de Navegação.....	53
2.6.3.	Algoritmo de Atitude.....	53
3.	ALGORITMO DE NAVEGAÇÃO E ATITUDE.....	54
3.1.	Navegação.....	54
3.1.1.	Princípio de Funcionamento de um Acelerômetro.....	54
3.1.2.	Obtenção da Força Específica.....	55
3.1.3.	Obtenção da posição do veículo em relação ao referencial da Terra.....	56
3.1.4.	Equações de Navegação.....	60
3.2.	Atitude.....	60
3.2.1.	Considerações Básicas.....	60
3.2.2.	Equação de Atualização da Matriz de Rotação do Referencial do Corpo para o Local (Equação de Atitude).....	62
3.2.3.	Modelo do Formato da Terra.....	65
3.2.4.	Modelo da Atração Gravitacional da Terra.....	67
3.3.	Algoritmo de Navegação.....	67
3.4.	Validação do Algoritmo de Navegação.....	70
3.4.1.	Trajetória Proposta.....	70
3.4.1.1.	Simulação das medidas dos acelerômetros.....	72
3.4.1.2.	Simulação das medidas dos giroscópios.....	76
3.4.1.3.	Resultados da simulação.....	78

4.	TRATAMENTO DOS ERROS	87
4.1.	Tipos de Erros.....	87
4.2.	Modelagem dos Erros dos Sensores.....	89
4.2.1.	Modelagem dos Erros do Giroscópio.....	90
4.2.2.	Modelagem dos Erros do Acelerômetro.....	87
4.3.	Equações de Propagação de Erros.....	88
5.	ALGORITMO DE ALINHAMENTO	94
5.1.	Definição.....	94
5.2.	Alinhamento.....	94
5.3.	Nivelamento.....	94
5.4.	Alinhamento Grosseiro.....	94
5.5.	Alinhamento Fino.....	102
6.	SIMULAÇÕES	107
6.1.	Objetivos das Simulações.....	107
6.2.	Parâmetros Usados nas Simulações.....	107
6.3.	Descrição.....	108
7.	ANÁLISE DOS RESULTADOS	110
8.	CONCLUSÃO	122
9.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123
10.	APÊNDICES	125
10.1.	APÊNDICE 1: ESTIMAÇÃO ÓTIMA.....	126
10.1.1.	MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.....	126
10.1.1.1.	O CASO MONOVARIÁVEL.....	127
10.1.1.2.	CASO MULTIVARIÁVEL.....	133
10.1.1.3.	INTERPRETAÇÃO ESTOCÁSTICA DOS MÍNIMOS QUADRADOS.....	135

10.1.1.4.	MÍNIMOS QUADRADOS COM PONDERAÇÃO.....	136
10.1.1.5.	EXEMPLO DE APLICAÇÃO.....	137
10.1.2.	O FILTRO DE KALMAN.....	139
10.1.2.1.	POSIÇÃO DO PROBLEMA.....	139
10.1.2.2.	O MODELO MATEMÁTICO.....	140
10.1.2.3.	EXEMPLO DE PROBLEMA DE FILTRAGEM.....	141
10.1.2.4.	A FORMULAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN.....	143
10.1.2.4.1.	DETERMINAÇÃO INTUITIVA DO FILTRO.....	144
10.1.2.4.2.	O FILTRO DE KALMAN DISCRETO.....	146
10.1.2.4.3.	O FILTRO DE KALMAN CONTÍNUO.....	148
10.1.2.4.4.	GENERALIZAÇÃO DO MODELO DO PROCESSO.....	150
10.1.2.4.4.1.	RUÍDOS CORRELACIONADOS.....	150
10.1.2.4.4.1.1.	ESTIMAÇÃO LINEAR COMO UM PROBLEMA DE PROJEÇÃO.....	150
10.1.2.4.4.1.2.	FORMA RECURSIVA PARA A ESTIMAÇÃO LINEAR.....	154
10.1.2.4.4.1.3.	FILTRO DE KALMAN.....	156
10.1.2.4.4.1.4.	FILTRO DE KALMAN PARA SISTEMAS COM ENTRADAS DETERMINÍSTICAS.....	160
10.2.	APÊNDICE 2: LEMA DA INVERSÃO MATRICIAL.....	161
11.	ANEXO.....	162
	FLUXOGRAMA DOS ALGORITMOS DE ALINHAMENTO, NAVEGAÇÃO E ATITUDE.....	163

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG. 2.1 – Ponto P e referenciais $o'-x'-y'-z'$ e $o-x-y-z$	26
FIG. 2.2 – Ilustração dos ângulos cujos co-senos vêm a se constituir nos co-senos diretores	28
FIG. 2.3 – Dois sistemas de coordenadas, $o-x-y-z$ e $o-x'-y'-z'$	29
FIG. 2.4 – Ângulos de Euler.....	31
FIG. 2.5 – Rotação de um ângulo ψ em torno do eixo z	32
FIG. 2.6 – Componentes do vetor r nos referenciais $o-x-y-z$ e $o-x'-y'-z'$	32
FIG. 2.7 – Variáveis de Posição.....	37
FIG. 2.8 – Variáveis de Atitude.....	38
FIG. 2.9 – Referencial Inercial $o-x_i-y_i-z_i$	39
FIG. 2.10 – Referencial da Terra $o-x_e-y_e-z_e$	40
FIG. 2.11 – Referencial do veículo $o-x_b-y_b-z_b$	41
FIG. 2.12 – Referencial Local na configuração geográfica e orientação do tipo ENU.....	42
FIG. 2.13 – Referencial Local na configuração geográfica e orientação do tipo NED.....	43
FIG. 2.14 – Navegação nas proximidades de um pólo.....	43
FIG. 2.15 – Componentes da Velocidade Angular da Terra no Referencial Local na configuração geográfica e orientação do tipo NED, no hemisfério Norte.....	44
FIG. 2.16 – Componentes da Velocidade Angular da Terra no Referencial Local na configuração geográfica e orientação do tipo NED, no hemisfério Sul.....	45
FIG. 2.17 – Referencial Local na configuração “free-azimuth” e orientação do tipo ENU.....	45
FIG. 2.18 – Cápsula auto-suficiente isolada do mundo exterior.....	47
FIG. 2.19 – Diagrama de Blocos de obtenção da velocidade e da posição em relação ao referencial da Terra, numa plataforma estabilizada.....	50
FIG. 2.20 – Diagrama de Blocos de obtenção da velocidade e da posição em relação ao referencial da Terra, numa plataforma solidária.....	51
FIG. 3.1 – Acelerômetro.....	54
FIG. 3.2 – Aceleração gravitacional, w , e aceleração da gravidade, \underline{g}	59
FIG. 3.3 – Diagrama de Blocos de obtenção da velocidade e da posição em relação ao referencial da Terra.....	59

FIG. 3.4 – Diagrama das Operações Realizadas para a Transformação de Coordenadas.....	61
FIG. 3.5 – Ponto P e referenciais $x'-y'-z'$ e $x-y-z$	65
FIG. 3.6 – Elipsóide de Referência.....	65
FIG. 3.7 – Representação esquemática da trajetória do veículo.....	72
FIG. 3.8 – Representação esquemática da aceleração centrípeta na manobra ascendente da terceira etapa.....	73
FIG. 3.9 – Latitude x tempo.....	79
FIG. 3.10 – Erros em Latitude.....	80
FIG. 3.11 – Longitude x tempo.....	80
FIG. 3.12 – Erros em Longitude.....	81
FIG. 3.13 – Altura x tempo.....	81
FIG. 3.14 – Erros em Altura.....	82
FIG. 3.15 – Longitude x Latitude.....	82
FIG. 3.16 – Ângulo de “roll” x tempo.....	83
FIG. 3.17 – Ângulo “pitch” x tempo.....	83
FIG. 3.18 – Ângulo “heading” x tempo.....	84
FIG. 3.19 – Velocidade Norte x tempo.....	85
FIG. 3.20 – Velocidade Vertical para baixo x tempo.....	85
FIG. 3.21 – Velocidade Leste x tempo.....	86
FIG. 5.1 – Indicação de acelerômetro colocado em elevador em três situações distintas.....	95
FIG. 5.2 – Representação das linhas da Matriz de Transformação de Coordenadas como vetores \underline{C}_1 , \underline{C}_2 e \underline{C}_3	99
FIG. 7.1 – Evolução da estimativa do desalinhamento em roll, durante o alinhamento fino....	111
Fig. 7.2 – Evolução da estimativa do desalinhamento em pitch, durante o alinhamento fino..	111
FIG. 7.3 – Evolução da estimativa do desalinhamento em heading, durante o alinhamento fino.....	112
FIG. 7.4 – Evolução da estimativa do bias do acelerômetro alinhado com o eixo x do corpo..	113
FIG. 7.5 – Evolução da estimativa do bias do giroscópio com eixo de entrada alinhado com o eixo z do corpo.....	113
FIG. 7.6 – Latitude x tempo.....	114
FIG. 7.7 – Longitude x tempo.....	115

FIG. 7.8 – Altura x tempo.....	115
FIG. 7.9 – Erro em Latitude.....	116
FIG. 7.10 – Erro em Longitude.....	116
FIG. 7.11 – Erro em Altura.....	117
FIG. 7.12 – Latitude x tempo.....	118
FIG. 7.13 – Longitude x tempo.....	118
FIG. 7.14 – Altura x tempo.....	119
FIG. 7.15 – Erro em Latitude.....	119
FIG. 7.16 – Erro em Longitude.....	120
FIG. 7.17 – Erro em Altura.....	120
FIG. 10.1 – Medidas de velocidades e reta de coeficiente angular igual a g	128
FIG. 10.2 – Evolução da estimativa de g , na ausência de ruído de medida.....	132
FIG. 10.3 – Evolução do parâmetro P , em presença de ruído de medida.....	132
FIG. 10.4 – Evolução da estimativa de g , em presença de ruído de medida.....	133
FIG. 10.5 – Trajetórias ideal e real, em altura, do foguete.....	142
FIG. 10.6 – Estrutura do filtro discreto.....	147
FIG. 10.7 – Estrutura do filtro contínuo.....	150
FIG. 10.8 – Estimativa de uma grandeza interpretada como uma projeção da mesma.....	153
FIG. 10.9 – Subespaço das observações.....	154
FIG. 10.10 – Interpretação vetorial de Z_2	155
FIG. 10.11 – Projeções de x_k em $S(Y_{k-1})$ e $S(Y_k)$	156

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABREVIATURAS

- SNI – Sistema de Navegação Inercial
C.M. – Centro de Massa
MTC – Matriz de Transformação de Coordenadas
ENU – *East North Up*
NED – *North East Down*
GPS – *Global Positioning System*
VANT – Veículo Aéreo Não Tripulado
PIG – *Pipeline Inspection Gauge*
WGS-84 – World Geodetic System – 1984

SÍMBOLOS

r	– Vetor r .
φ	– ângulo de <i>roll</i>
θ	– ângulo de <i>pitch</i>
ψ	– ângulo de <i>heading</i>
C_b^l	– Matriz de transformação de coordenadas do referencial do corpo (b) para o referencial local (l)
h	– altura
λ	– longitude
L_{gc}	– latitude geocêntrica
L	– latitude geodética
$\underline{\omega}_{ie}^l$	– velocidade angular do referencial da Terra em relação ao referencial inercial, em componentes no referencial local
$\underline{\omega}_{el}^l$	– velocidade angular do referencial local em relação ao referencial da Terra, em componentes no referencial local
$\underline{\omega}_{il}^l$	– velocidade angular do referencial local em relação ao referencial inercial, em componentes no referencial local
\underline{f}	– força específica ou aceleração não gravitacional
\underline{W}	– força gravitacional ou gravitação
\underline{w}	– aceleração gravitacional
\underline{g}	– aceleração da gravidade
\underline{a}_i	– aceleração em relação ao referencial inercial
$\underline{v}_e = \left(\frac{d\underline{r}}{dt} \right)_e$	– é o vetor variação no tempo, em relação ao referencial da Terra, do vetor posição do veículo, ou seja, é o vetor velocidade relativa à Terra;
v_N	– componente de \underline{v}_e na direção Norte
v_E	– componente de \underline{v}_e na direção Leste
v_D	– componente de \underline{v}_e na direção da vertical local, com orientação positiva para baixo

R_N	– raio de curvatura meridiano, ou seja, na direção Norte – Sul
R_E	– raio de curvatura transverso, ou seja, na direção Leste – Oeste
e	– excentricidade do elipsóide de referência do modelo do formato da Terra
\hat{x}	– estimativa do valor da grandeza x
\tilde{x}	– erro entre a estimativa e o valor verdadeiro da grandeza x
$bias_{ac}$	– bias, ou desvio do zero da escala, dia a dia do acelerômetro
$bias_g$	– bias, ou desvio do zero da escala, dia a dia do giroscópio
$(\underline{r}\times)$	– corresponde ao vetor \underline{r} na forma de matriz anti-simétrica
$P_{k/k}$	– matriz de covariância do erro de estimação, no instante k , tendo sido realizada observação (ões) no instante k
$\underline{\hat{x}}_{k/k}$	– melhor estimativa da grandeza x , no instante k , tendo sido realizada observação (ões) no instante k
Q_k	– matriz de covariância dos ruídos das medidas, no instante k
R_k	– matriz de covariância dos ruídos do modelo, no instante k
S_k	– matriz de covariância de correlacionamento dos ruídos das medidas e do modelo, no instante k
$E[x]$	– expectância ou esperança do valor da grandeza x

RESUMO

A exatidão das informações de posição e orientação fornecidas por um Sistema de Navegação Inercial é fortemente dependente tanto da exatidão dos dados de posição e orientação inicial do veículo, quanto da precisão dos giroscópios e acelerômetros.

Este trabalho objetiva, de forma precípua, propor um algoritmo de alinhamento e nivelamento para um Sistema de Navegação Inercial do tipo solidário (“strapdown”), que permite a obtenção de estimativas dos erros de orientação inicial, bem como de componentes de erros dos sensores, conhecidas como bias dia a dia. Tais estimativas permitem, respectivamente, a correção da atitude inicial do Sistema de Navegação Inercial e das leituras dos giroscópios e acelerômetros. Usa-se, na obtenção de tais estimativas, a formulação do Filtro de Kalman para o caso de ruídos correlacionados.

Um algoritmo de simulação de navegação também foi implementado, de forma a permitir a análise dos efeitos das correções realizadas nos erros, tanto de orientação inicial, quanto de leitura dos sensores.

Simulações permitem a verificação da melhora da exatidão das informações de posição e orientação do veículo fornecidas pelo Sistema de Navegação Inercial, quando as correções supracitadas são realizadas.

ABSTRACT

The accuracy of the position and attitude information provided by a Inertial Navigation System depends strongly on the accuracy of the initial position and attitude data and on the accuracy of the gyroscopes and accelerometers.

This work intends, as a main goal, to propose an alignment algorithm for a Strapdown Inertial Navigation System, as a way to estimate the initial attitude errors as well as sensor errors components, known as turn on-turn off bias. With such estimates, corrections can be made on the initial attitude and sensor lectures. A Kalman Filter for correlated noise formulation was used in such estimation.

An algorithm to simulate the navigation was also implemented, so that effects of the corrections could be checked.

From the simulations we verify an accuracy enhancement, in terms of the position and attitude information provided by the Inertial Navigation System.

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONCEITOS GERAIS

Navegação consiste basicamente no conhecimento, a cada instante, da localização de um corpo móvel ou veículo, em um sistema de referência bem determinado.

Guiagem vem a ser a condução deste veículo de um determinado local a um outro desejado. Pode ser, portanto, definida como o processo de comandar os movimentos de um corpo móvel modo a fazê-lo seguir para o ponto desejado. Entretanto, faz-se necessário ainda que os comandos realizados se tornem em forças e torques e, efetivamente, possam alterar o movimento do corpo, conforme o desejado. É aí que surge o controle.

Desta forma, pode-se dizer que o processo de partida de um veículo de uma determinada posição até a sua chegada a outra desejada envolve três operações: a primeira, chamada de navegação, que diz respeito à determinação da posição e velocidade do tal corpo móvel em relação a um sistema referencial conhecido; a segunda, chamada de guiagem, que consiste no envio dos comandos para alteração do curso do veículo tal que o destino desejado seja alcançado e, por fim, a terceira, o controle, que faz com que a guiagem se torne efetiva, fazendo com que os comandos gerem, de fato, a alteração desejada no curso do veículo.

A navegação, em sua forma mais simples, vale-se de referências externas para determinar a posição. Por exemplo, caso se esteja a pé, no terreno, pode-se recorrer a um rio, um bosque, uma montanha ou algum outro acidente geográfico como referência no deslocamento. Na hipótese de se estar em um automóvel, numa cidade, pode-se valer de uma praça, um posto de gasolina ou alguma outra referência destacada. Nos mares, durante muitos anos, os exploradores utilizaram as estrelas como referências para a navegação.

A subordinação à necessidade da existência de um auxílio externo constitui-se, no entanto, num fator limitante da navegação, tendo em vista que este auxílio pode, por vezes, não ser disponível ou sua utilização não ser desejada. Neste contexto, surge o conceito de navegação inercial.

A Navegação Inercial é definida como a navegação baseada em informações provenientes de sensores inerciais, que recebem esta denominação pelo fato de usarem como princípio de

funcionamento o fato de que, devido à inércia dos corpos, estes resistirem a mudanças em suas quantidades de movimento linear e angular.

Estes sensores inerciais são os giroscópios* e acelerômetros. Eles detectam mudanças de posição e de orientação angular do veículo, o que permite, a partir do conhecimento da posição e orientação iniciais do mesmo, determinar estas grandezas a cada instante e, assim, permitir a guiagem do veículo ao ponto final desejado, podendo prescindir de informações externas.

1.2. HISTÓRICO

Desde a década de 40, os sistemas de navegação, em especial os Sistemas de Navegação Inercial (SNI) tornaram-se importantes componentes em aplicações científicas e militares.

De 1940 a 1944, durante a Segunda Guerra Mundial, foram desenvolvidos na Alemanha os mísseis balísticos V-1 e V-2, empregando, pela primeira vez, um sistema simples de guiagem inercial.

Com o término da guerra, a maioria dos cientistas envolvidos nos projetos dos referidos mísseis transferiu-se para os Estados Unidos da América, onde a engenharia inercial ganhou grande impulso.

O Sistema de Navegação Inercial para Navios (SINS – “Ship’s Inertial Navigation System”) foi desenvolvido no final dos anos 1950 e início da década seguinte, para preencher os requisitos de posicionamento preciso dos submarinos nucleares portadores de mísseis balísticos. Após um primeiro modelo experimental instalado no submarino “Nautilus”, que cruzou o Pólo Norte navegando submerso, em 3 de agosto de 1958, o Sistema de Navegação Inercial foi empregado a bordo do submarino “George Washington”, em 1960. Desde então, tem sido continuamente refinado, aperfeiçoado e reduzido em tamanho e custo, de modo que, atualmente, seu uso foi estendido aos submarinos de ataque, navios-aeródromos e outros meios de superfície.

* Alguns autores, no que diz respeito aos sensores de rotação, usam o termo giroscópio para os que fornecem medidas de deslocamento angular e girômetro para os que fornecem velocidades angulares. Neste trabalho, foi utilizado o termo giroscópio para um e outro caso.

1.3. DESCRIÇÃO DE UM SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL (SNI)

Um Sistema de Navegação Inercial usa sensores chamados inerciais como forma de obter a posição e a orientação, ou atitude, do veículo a cada instante, possibilitando o guiamento do mesmo. Estes sensores são os giroscópios, que medem as rotações, e os acelerômetros, que medem a chamada força específica, grandeza que, como será visto adiante, permite a obtenção do valor da aceleração.

A integração das velocidades angulares medidas possibilita a obtenção da orientação do veículo em relação a um referencial desejado, o que permite que se chegue, a partir das forças específicas medidas pelos acelerômetros, às componentes das acelerações em relação a este referencial. As acelerações são, então, integradas para obtenção da velocidade e da posição, em relação a este referencial.

O Sistema de Navegação Inercial permite ao veículo conhecer sua posição e orientação, independente de qualquer sinal transmitido externamente. Há uma grande vantagem em um sistema de navegação que possa fornecer a posição do veículo continuamente e com exatidão, sem necessitar de qualquer informação externa. Esse sistema não requer a emissão ou recepção de sinais e é imune a interferências. Isto é de particular importância para os submarinos nucleares, que são projetados para permanecerem submersos durante suas patrulhas, por prolongados períodos.

Qualquer sistema de navegação inercial precisa resolver a equação de aceleração do corpo para obter a velocidade e a posição, a partir de informações da posição e orientação iniciais do corpo móvel. Para tal, torna-se necessário escolher o tipo de mecanização adequada a cada situação, tais como o melhor arranjo mecânico, o sistema de coordenadas apropriado e o sistema de hardware a ser empregado.

1.4. OBJETIVO DO TRABALHO

A estimativa mais exata da posição e orientação iniciais reveste-se de fundamental importância no processo de navegação inercial, posto que é a partir destas informações que o Sistema de Navegação Inercial, após computar as informações recebidas dos giroscópios e acelerômetros, fornece a posição e a orientação do veículo a cada instante.

Este trabalho propõe-se a conceber um algoritmo que permita uma redução dos erros na obtenção das informações concernentes à orientação inicial do Sistema de Navegação Inercial, provendo assim o alinhamento da mesma. O algoritmo concebido, além de contribuir para a redução dos erros citados, produz informações que permitem corrigir os sinais recebidos dos giroscópios e acelerômetros, no que diz respeito a uma fonte de erro caracterizada pelo “desvio do zero” na escala ou bias, de caráter aleatório, ocorrido sempre que os sensores são ligados.

1.5. RELEVÂNCIA DO TRABALHO

A importância da tecnologia de navegação inercial pode ser visualizada pelos esforços envidados pelos países que dominam a mesma de cercear o acesso dos demais países a ela, sobretudo no que diz respeito à fabricação de sensores inerciais.

O domínio da tecnologia de navegação inercial faz-se imprescindível para qualquer país que deseje avançar nas áreas de fabricação de aviões, de veículos aeroespaciais, de submarinos nucleares, de mísseis de médio e longo curso. Daí o interesse dos países que integram o pequeno grupo dos que possuem tal tecnologia de impedir o ingresso de outros países.

Além do que foi exposto, o fato de a tecnologia de navegação inercial estar conhecendo, nos últimos anos, avanços significativos, permite a visualização do uso cada vez maior de tal tecnologia.

O uso de sistemas de navegação inercial em veículos terrestres já é uma realidade e não seria utopia falar, num futuro próximo, em navegação inercial sem auxílio para percursos de algumas horas, tal o ritmo de aperfeiçoamento que se tem conseguido nos sensores inerciais.

Sob o risco de ver o abismo tecnológico nesta área entre os países que dominam a tecnologia de navegação inercial e países como o Brasil aumentar cada vez mais, faz-se necessário o estudo, a publicação e implementação de trabalhos e a consecução de projetos na área.

Este trabalho foi concebido visando sua implementação num projeto de um Veículo Aéreo Não Tripulado (VANT), que conta com esforços conjuntos das três Forças Armadas. O trabalho foi proposto inicialmente com vistas à estimação dos valores dos erros de orientação inicial, de sorte que se pudesse corrigi-los, realizando assim o alinhamento fino. Procedimento este que é de grande importância na navegação inercial. No entanto, o sucesso conseguido na estimação dos valores dos “desvios do zero” nas escalas dos sensores, de caráter aleatório, permitiu a

diminuição dos erros de leitura por parte dos sensores, contribuindo para a melhoria dos resultados obtidos durante a navegação.

Uma vez que este trabalho tem aplicações tanto na parte do alinhamento de um Sistema de Navegação Inercial quanto na parte de navegação, pode-se, inclusive, visualizar a contribuição da metodologia aqui proposta em outros projetos de interesse das Forças Armadas brasileiras, em particular, como o do Veículo Lançador de Satélites, e do Brasil, em geral, como em PIG inerciais para mapeamento de tubulações petrolíferas.

1.6. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho foi dividido em 09 (nove) capítulos, 01 (um) apêndice e 01 (um) anexo.

No primeiro capítulo (Introdução) são apresentados, além de conceitos gerais que situam o assunto de Navegação Inercial, no campo do conhecimento, um breve histórico sobre o referido tema. O objetivo, a organização e o posicionamento do trabalho são também parte integrante deste capítulo.

No capítulo 2 (Conceitos de Navegação Inercial) diversos conceitos utilizados na Navegação Inercial são abordados, de forma a facilitar a compreensão dos assuntos desenvolvidos nos demais capítulos.

No capítulo 3 (Algoritmo de Navegação e Atitude), após uma primeira parte onde são apresentados, além do princípio de funcionamento do acelerômetro, alguns conceitos, como aceleração gravitacional, aceleração da gravidade, a equação diferencial de navegação e a equação diferencial de atualização no tempo da orientação são desenvolvidas. Por fim são apresentados, os passos do algoritmo de Navegação e Atitude e, em seguida, os resultados de uma simulação, com vistas à validação de tal algoritmo.

Os tipos de erros que ocorrem nos sensores, as equações de compensação e de propagação no tempo dos mesmos são apresentados no capítulo 4 (Tratamento dos Erros).

No capítulo 5 (Algoritmo de Alinhamento e Nivelamento), os conceitos de alinhamento e de nivelamento são explicados. Em seguida, as duas etapas do alinhamento e nivelamento, quais sejam, o alinhamento grosseiro e o fino são apresentadas, com seus respectivos algoritmos.

O capítulo 6 (Simulações) aborda as simulações levadas a efeito no trabalho, apresentando os objetivos, os parâmetros dos sensores utilizados e uma descrição das mesmas.

No capítulo 7 (Análise dos Resultados), os resultados das simulações são expostos e analisados.

O capítulo 8 (Conclusão) consta de uma breve descrição do trabalho realizado, destacando a contribuição principal do mesmo, seguida de algumas sugestões de trabalhos futuros.

O capítulo 9 (Referências Bibliográficas) lista a bibliografia utilizada na realização deste trabalho.

O capítulo 10 (Apêndices) é constituído por 2 (dois) apêndices. O primeiro apresenta a Estimção Ótima, partindo do método dos mínimos quadrados até a filtragem de Kalman, que foi a ferramenta principal usada na consecução do trabalho. O segundo apresenta o Lema da Inversão Matricial, formulação que é empregada no primeiro apêndice.

Há ainda um anexo com um fluxograma que abrange tanto a parte de alinhamento, quanto de navegação.

1.7. POSICIONAMENTO DO TRABALHO

AQUINO, em 1984, apresenta algoritmos básicos de navegação para Sistemas de Navegação Inercial do tipo solidário, a bordo de engenhos destinados a trajetórias de curta duração.

DURÃO, em 1992, desenvolve um algoritmo de navegação inercial, usando um referencial local com configuração “free-azimut” e orientação ENU.

IORIO, em 1995, usa a filtragem de Kalman na navegação inercial auxiliada por GPS.

CAMPOS, em 2004, compra o uso da filtragem de Kalman com os filtros de partículas na Estimção de trajetórias em navegação inercial auxiliada por velocímetro.

1.8. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

SHABANA, em 1988 e HAUG, em 1989, ao tratarem do problema da Dinâmica de Multi-corpos, apresentam as ferramentas necessárias ao desenvolvimento das equações de navegação e atitude.

SAVAGE, em 1985, aborda de forma ampla o assunto Navegação Inercial com plataforma solidária, apresentando desde os conceitos mais importantes até algoritmo de navegação e tratamento de erros.

TITTERTON, em 1997, também apresenta o problema da Navegação Inercial com plataforma solidária. E o faz de forma ampla, abrangendo os vários tipos de sensores, navegação, alinhamento e mesmo um exemplo de projeto de um Sistema de Navegação Inercial.

FRANKLIN e POWELL, em 1997 abordam o problema do controle discreto, apresentando, entre outros assuntos, a filtragem de Kalman. Este último assunto também é apresentado de forma bastante completa por LABARRERE, KRIEF e GIMONET e por HERMERLY.

GUIZIOU, em 2004, apresenta conceitos e formulações importantes para Navegação Inercial, inclusive o princípio de Einstein-Galileu. De igual forma, ALONZO, em 1994, faz uma apresentação geral e sucinta do assunto.

NEBOT, em 1997, aborda o assunto da calibração e alinhamento iniciais de um Sistema de Navegação Inercial, servindo de subsídio a este trabalho quanto aos auxílios utilizados no procedimento de alinhamento fino.

UM, LEE, SEONG-TAEK PARK e GOOK PARK, em 2000, apresentam uma metodologia para tratar o problema dos bias dia a dia dos sensores.

2. CONCEITOS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

2.1. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Algo bastante comum no estudo da navegação inercial é a necessidade de mudança de sistema de coordenadas, matematicamente falando, ou de referencial, fisicamente falando. Serão usados, neste trabalho, basicamente, 04 (quatro) referenciais, que serão vistos mais adiante. Faz-se mister conhecimentos básicos de álgebra linear. HAUG, em 1989, trata do assunto e serviu de base para a explanação que se segue.

Conforme a FIG. 2.1, a localização de um ponto P no espaço pode ser definida tanto em relação ao referencial x - y - z quanto ao x' - y' - z' .

Ainda, de acordo com a FIG. 2.1, pode-se escrever:

$$\underline{r}^P = \underline{r} + C \cdot \underline{s}^P \quad (2.1)$$

onde:

\underline{r} é o vetor das coordenadas da origem do referencial x' - y' - z' no referencial x - y - z ;

\underline{s}^P é o vetor das coordenadas de P no referencial x' - y' - z' ; e

C é a Matriz de Transformação de Coordenadas do referencial x' - y' - z' para o referencial x - y - z .

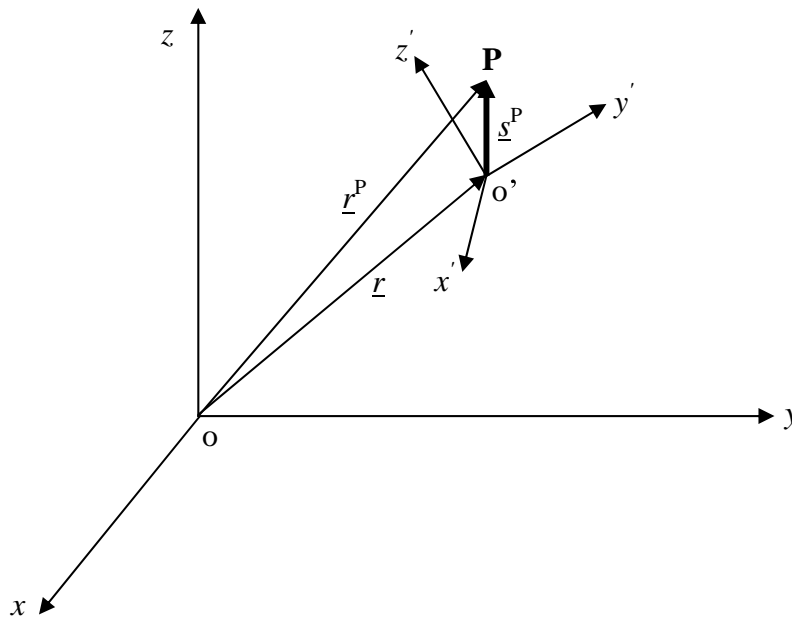


FIG. 2.1 – Ponto P e referenciais o' - x' - y' - z' e o - x - y - z

Basicamente as componentes de um vetor qualquer em relação a um sistema de coordenadas podem ser transformadas em componentes do mesmo vetor em relação a um outro sistema de coordenadas. Para isso bastam, no espaço tridimensional, 6 (seis) grandezas independentes: 03 (três) para definir o vetor que localiza a origem do novo sistema de coordenadas e outras 03 (três) para definir a orientação dos eixos do novo sistema.

É evidente que, se os dois sistemas de coordenadas têm a mesma origem, bastam, neste caso, 03 (três) grandezas para definir a orientação no novo sistema.

A definição da orientação de um sistema de coordenadas em relação a outro é feita através da Matriz C , que é chamada Matriz de Transformação de Coordenadas do sistema antes da rotação, ou sistema original, para o sistema após a rotação, ou sistema novo. Esta matriz C será função de apenas 3 (três) variáveis independentes.

Esta Matriz de Transformação de Coordenadas C pode ser expressa a partir de diferentes variáveis. Entre outros podem ser citados como os mais usuais os seguintes:

- Co-senos Diretores;
- Ângulos de Euler;
- Parâmetros de Euler.

2.1.1. CO-SENOS DIRETORES

Os co-senos diretores correspondem aos co-senos dos ângulos formados entre cada eixo do sistema novo e cada eixo do sistema original; ângulos estes tomados no sentido anti-horário. No espaço tridimensional, pelo fato de cada sistema de coordenadas possuir 03 (três) eixos, ao serem tomados dois a dois, esses eixos formam 09 ângulos e, portanto, tem-se 09 (nove) co-senos diretores e a matriz de tran tem a seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde o elemento c_{11} representa o co-seno formado entre o eixo x do sistema de coordenadas novo e o eixo x do sistema original, o elemento c_{12} representa o co-seno formado entre o eixo x do sistema de coordenadas novo e o eixo y do original, e assim por diante.

A FIG. 2.2 ilustra, através de uma rotação em torno do eixo z , como se obtém os elementos da matriz C em função dos co-senos diretores. O sistema $o-x-y-z$ corresponde ao sistema original e o $o-x'-y'-z'$, ao novo. Na figura, o co-seno do ângulo 11 vem a ser o elemento c_{11} e assim por diante.

Tomando-se os eixos dos sistemas de coordenadas, dois a dois, sendo o primeiro eixo o do sistema após a rotação e o segundo do sistema original, e medindo-se os ângulos no sentido anti-horário, pode-se, tomando-se os co-senos destes ângulos, obter, em função destes co-senos, a matriz C , que é a Matriz de Transformação de Coordenadas do sistema original para o novo.

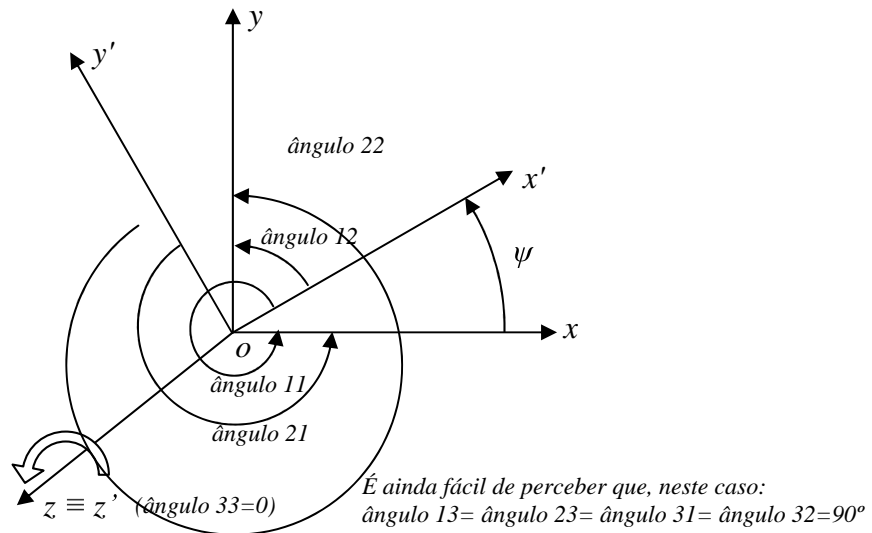


FIG 2.2 – Ilustração dos ângulos cujos co-senos vêm a se constituir nos co-senos diretores

O fato de a Matriz de Transformação de Coordenadas C em função dos co-senos diretores depender de 09 (nove) parâmetros diferentes implica na existência de relações de dependência que permitem, partindo-se de 03 (três) valores conhecidos dos co-senos diretores, obter-se os demais, pois, como foi visto, a orientação de um sistema de coordenadas em relação a outro fica completamente definida por apenas 03 (três) parâmetros.

Se o sistema original sofre uma rotação de um ângulo ψ em torno do eixo z , conforme ilustrado na FIG. 2.2, tem-se:

$$\text{ângulo } 11 = 360^\circ - \psi \Rightarrow \cos 11 = \cos \psi;$$

$$\text{ângulo } 12 = 90^\circ - \psi \Rightarrow \cos 12 = \text{sen } \psi;$$

$$\text{ângulo } 21 = 270^\circ - \psi \Rightarrow \cos 21 = -\text{sen } \psi;$$

ângulo 22 = $360^\circ - \psi \Rightarrow \cos 11 = \cos \psi$;

ângulo 13= ângulo 23= ângulo 31= ângulo 32= $90^\circ \Rightarrow \cos 13 = \cos 23 = \cos 31 = \cos 32 = 0$; e

ângulo 33 = $0^\circ \Rightarrow \cos 33 = 1$.

Portanto, tem-se, neste caso:

$$C = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sejam i, j e k os vetores unitários no sistema $o-x-y-z$ e de i', j' e k' os no sistema $o-x'-y'-z'$.

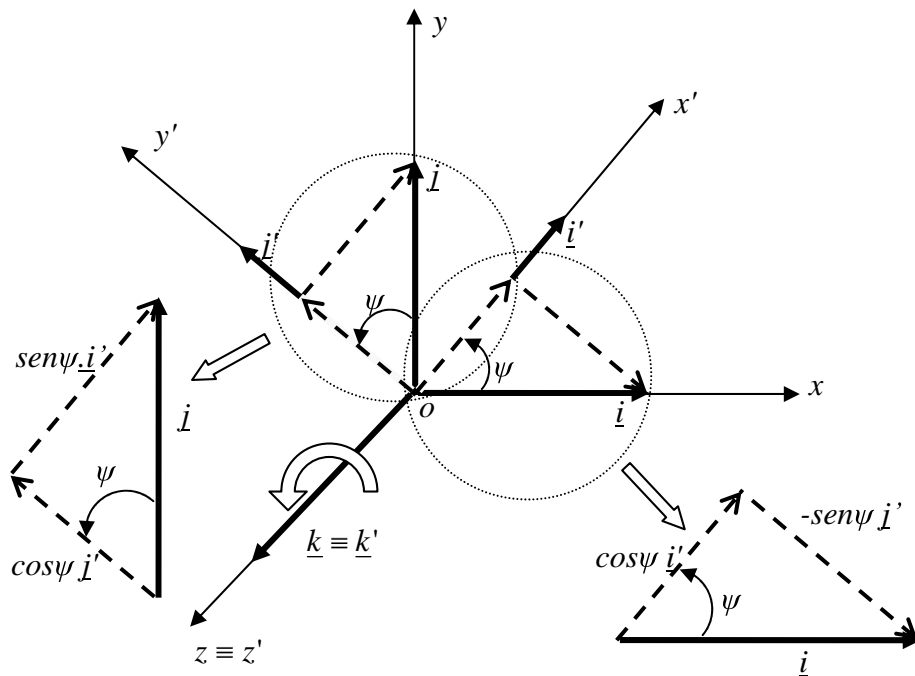


FIG. 2.3 – Dois sistemas de coordenadas, $o-x-y-z$ e $o-x'-y'-z'$.

Pela decomposição de vetores ilustrada na FIG 2.3, pode-se escrever:

$$\underline{i} = \cos \psi \cdot \underline{i}' - \text{sen} \psi \cdot \underline{j}' + 0 \cdot \underline{k}' \quad (2.3)$$

$$\underline{j} = \text{sen} \psi \cdot \underline{i}' + \cos \psi \cdot \underline{j}' + 0 \cdot \underline{k}' \quad (2.4)$$

E, obviamente:

$$\underline{k} = 0 \cdot \underline{i}' + 0 \cdot \underline{j}' + 1 \cdot \underline{k}' \quad (2.5)$$

Comparando-se a EQ. 2.3, a EQ. 2.4 e a EQ. 2.5 com a Matriz C, percebe-se que as colunas da mesma correspondem às componentes dos vetores unitários \underline{i} , \underline{j} e \underline{k} . Uma vez que tais vetores são ortogonais entre si e de módulo unitário, tem-se:

$$C.C^T = C^T C = \begin{bmatrix} |\underline{i}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |\underline{j}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\underline{k}|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (2.6)$$

onde I é a matriz identidade de dimensão 3x3.

Ou seja, a matriz C é ortonormal.

Então, a EQ. 2.6 fornece seis relações de dependência para os nove co-senos diretores, de sorte que se tem apenas três deles independentes.

2.1.2. PARÂMETROS DE EULER OU QUATERNIONS

Os elementos da Matriz de Transformação de Coordenadas C também podem ser expressos em função dos chamados Parâmetros de Euler ou “Quaternions”, cuja definição baseia-se no teorema de Euler:

“Se as origens de dois referenciais cartesianos (com eixos orientados segundo a regra da mão direita) coincidem, então eles podem ser levados à coincidência através de uma simples rotação sobre um eixo”.

Sendo \underline{u} o vetor unitário que define a orientação do eixo de rotação e θ a magnitude do ângulo de rotação entre os dois referenciais, os parâmetros de Euler são definidos da seguinte forma:

$$e_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\underline{e} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \underline{u} \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.7)$$

Os parâmetros de Euler estão relacionados através da seguinte expressão, de sorte a se ter apenas 03 (três) parâmetros independentes:

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (2.8)$$

Os elementos da matriz C podem ser expressos em função dos parâmetros de Euler da seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - \frac{1}{2} & e_1 \cdot e_2 - e_0 \cdot e_3 & e_1 \cdot e_3 - e_0 \cdot e_2 \\ e_1 \cdot e_2 - e_0 \cdot e_3 & e_0^2 + e_2^2 - \frac{1}{2} & e_2 \cdot e_3 - e_0 \cdot e_1 \\ e_1 \cdot e_3 - e_0 \cdot e_2 & e_2 \cdot e_3 - e_0 \cdot e_1 & e_0^2 + e_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

2.1.3. ÂNGULOS DE EULER

Os elementos da Matriz de Transformação de Coordenadas C podem também ser expressos em função dos ângulos de Euler.

Os ângulos de Euler são coordenadas angulares definidas por uma seqüência de 03 (três) rotações sobre os eixos coordenados do referencial. Uma seqüência usual de rotações é a seguinte: rotação de um ângulo ψ sobre o eixo z (ângulo de “yaw”); rotação de um ângulo θ sobre o novo eixo y (ângulo de “pitch”) e, finalmente, rotação de um ângulo ϕ sobre o novo eixo x (ângulo de “roll”).

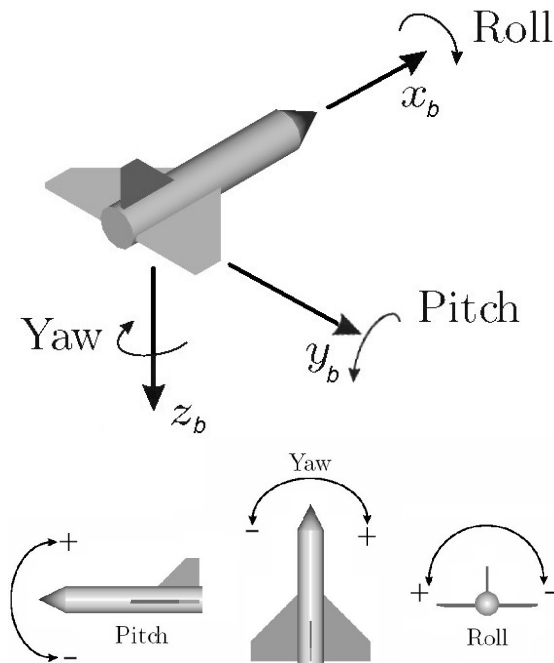


FIG. 2.4 – Ângulos de Euler

A obtenção da Matriz de Transformação de Coordenadas C quando o referencial sofre apenas uma rotação em torno de um dos eixos é muito simples.

Seja, portanto, o referencial $o-x-y-z$, que, ao sofrer uma rotação de um ângulo ψ em torno do eixo z , passa a ser denominado de referencial $o-x'-y'-z'$.

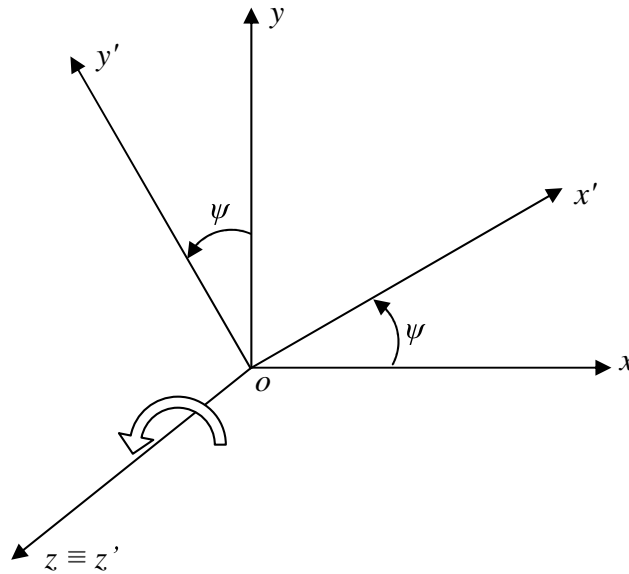


FIG. 2.5 – Rotação de um ângulo ψ em torno do eixo z

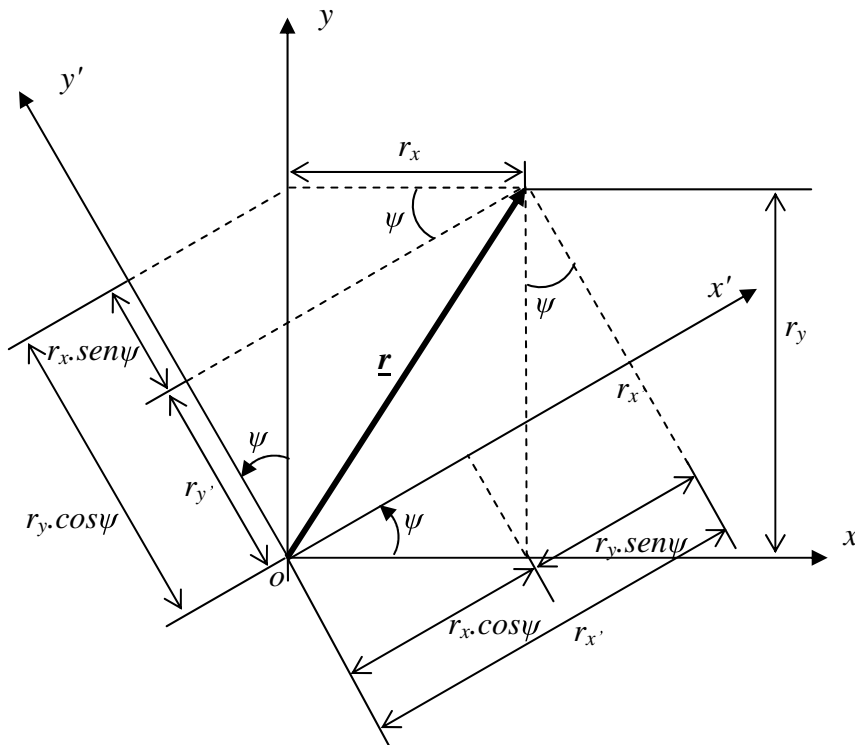


FIG. 2.6 – Componentes do vetor \underline{r} nos referenciais $o-x-y-z$ e $o-x'-y'-z'$

Observando-se a FIG. 2.6, pode-se, através de trigonometria elementar, obter as seguintes igualdades:

$$r_{x'} = r_x \cos \psi + r_y \sin \psi + r_z \cdot 0 \quad (2.10)$$

$$r_{y'} = -r_x \sin \psi + r_y \cos \psi + r_z \cdot 0 \quad (2.11)$$

E, evidentemente, tem-se:

$$r_{z'} = r_x \cdot 0 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 1 \quad (2.12)$$

Escrevendo as EQ. 2.7, 2.8 e 2.9 na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} r_{x'} \\ r_{y'} \\ r_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix}$$

Ou seja:

$$C_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente, tem-se:

- Para rotação de um ângulo θ sobre o eixo y:

$$C_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}; \quad (2.13)$$

- Para rotação de um ângulo ϕ sobre o eixo x:

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Se as três rotações acima forem executadas na seqüência em que foram descritas, chamando-se o sistema de coordenadas, após a primeira rotação, de II, o após a segunda de III e o após a terceira de final, pode-se escrever:

$$C_{inicial}^{II} = C_1; C_{II}^{III} = C_2 \text{ e } C_{III}^{final} = C_3 \quad (2.15)$$

onde o índice subscrito designa o sistema de coordenadas antes da rotação e o sobrescrito o depois.

Desta forma, a Matriz de Transformação de Coordenadas do sistema inicial para o final, após uma rotação em torno do eixo z , seguida de uma rotação em torno do novo eixo y e, finalmente, após uma em torno do novo eixo x , é obtida da seguinte maneira:

$$C_{inicial}^{final} = C_{III}^{final} \cdot C_{II}^{III} \cdot C_{inicial}^{II} = C_3 \cdot C_2 \cdot C_1 \quad (2.16)$$

ou seja:

$$C_{inicial}^{final} = \begin{bmatrix} \cos\psi \cdot \cos\theta & \sin\psi \cdot \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\phi \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi - \sin\psi \cdot \cos\phi & \sin\phi \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi + \cos\psi \cdot \cos\phi & \sin\phi \cdot \cos\theta \\ \sin\psi \cdot \sin\phi + \sin\theta \cdot \cos\psi \cdot \cos\phi & \cos\phi \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi - \sin\phi \cdot \cos\psi & \cos\phi \cdot \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

É importante ressaltar que a ordem das rotações sobre cada eixo tem que ser respeitada. Essa característica das rotações no espaço é facilmente verificada ao recordar-se que, na álgebra linear, o produto de matrizes não é comutativo. No caso de rotações infinitesimais, no entanto, a ordem não mais influi na formulação da Matriz de Transformação de Coordenadas. Se não, considere-se as rotações acima como infinitesimais, de sorte que se pode aproximar os co-senos dos ângulos por um e os senos pelo valor do próprio ângulo, bem como se desprezar os valores decorrentes do produto de dois ângulos. Assim, a expressão da matriz C , no caso de rotações infinitesimais, tem a forma que se segue e, neste caso, a ordem das rotações não é mais importante:

$$C_{inicial}^{final} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix} = I_{(3 \times 3)} - \begin{bmatrix} 0 & -\psi & \theta \\ \psi & 0 & -\phi \\ -\theta & \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde $I_{(3 \times 3)}$ é a matriz identidade de dimensão 3×3 e $\begin{bmatrix} 0 & -\psi & \theta \\ \psi & 0 & -\phi \\ -\theta & \phi & 0 \end{bmatrix}$ corresponde ao vetor

dos ângulos de Euler, $\begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix}$, na forma anti-simétrica.

Como cada um dos ângulos de Euler, ϕ, θ, ψ , são medidos em relação a sistemas de coordenadas diferentes, a velocidade angular do referencial final em relação ao referencial inicial, com componentes no referencial final, não é a simples derivada temporal dos ângulos de Euler; antes se relacionam através da seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}^{final} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^{final} + C_{III}^{final} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}^{III} + C_{III}^{final} \cdot C_{II}^{III} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}^{II} \quad (2.18)$$

Portanto:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen} \phi \\ 0 & -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \phi \cdot \text{sen} \theta & \cos \phi & \text{sen} \phi \cdot \cos \theta \\ \cos \phi \cdot \text{sen} \theta & -\text{sen} \phi & \cos \phi \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \cdot \text{sen} \theta \\ \omega_y &= \dot{\theta} \cdot \cos \phi + \dot{\psi} \cdot \text{sen} \phi \cdot \cos \theta \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta - \dot{\theta} \cdot \text{sen} \phi \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dividindo a segunda equação da EQ. 2.17 por $\cos \phi$ e a terceira por $\text{sen} \phi$ e, em seguida, somando as duas equações, tem-se:

$$\frac{\omega_y}{\cos \phi} + \frac{\omega_z}{\text{sen} \phi} = \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \left(\frac{\text{sen} \phi}{\cos \phi} + \frac{\cos \phi}{\text{sen} \phi} \right)$$

Assim, obtém-se:

$$\frac{\omega_y \cdot \text{sen} \phi + \omega_z \cdot \cos \phi}{\cos \phi \cdot \text{sen} \phi} = \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \left(\frac{\text{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi}{\cos \phi \cdot \text{sen} \phi} \right)$$

E, portanto:

$$\dot{\psi} = (\omega_y \cdot \text{sen} \phi + \omega_z \cdot \cos \phi) \cdot \sec \theta \quad (2.20)$$

Substituindo a EQ. 2.20 na primeira equação da EQ. 2.19, tem-se:

$$\dot{\phi} = (\omega_y \cdot \text{sen} \phi + \omega_z \cdot \cos \phi) \cdot \tan \theta \quad (2.21)$$

Por fim, dividindo a segunda equação da EQ. 2.19 por $\text{sen} \phi$ e a terceira por $-\cos \phi$ e, em seguida, somando as duas equações, tem-se:

$$\frac{\omega_y}{\text{sen} \phi} - \frac{\omega_z}{\cos \phi} = \dot{\theta} \cdot \left(\frac{\cos \phi}{\text{sen} \phi} + \frac{\text{sen} \phi}{\cos \phi} \right)$$

Assim, obtém-se:

$$\frac{\omega_y \cdot \cos \phi - \omega_z \cdot \text{sen} \phi}{\cos \phi \cdot \text{sen} \phi} = \dot{\theta} \cdot \left(\frac{\text{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi}{\cos \phi \cdot \text{sen} \phi} \right)$$

E, portanto:

$$\dot{\theta} = \omega_y \cdot \cos \phi - \omega_z \cdot \text{sen} \phi \quad (2.22)$$

Desta maneira, as EQ. 2.20, 2.21 e 2.22 são as equações de atualização dos ângulos de Euler, em função das componentes da velocidade angular do referencial final em relação ao referencial inicial:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= (\omega_y \cdot \text{sen} \phi + \omega_z \cdot \cos \phi) \cdot \tan \theta + \omega_x \\ \dot{\theta} &= \omega_y \cdot \cos \phi - \omega_z \cdot \text{sen} \phi \\ \dot{\psi} &= (\omega_y \cdot \text{sen} \phi + \omega_z \cdot \cos \phi) \cdot \sec \theta \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.2. VARIÁVEIS DE NAVEGAÇÃO

As variáveis de navegação utilizadas neste trabalho, bem como os seus conceitos seguem o apresentado por SAVAGE, em 1985, DURÃO, em 1992 e IORIO, em 1995.

As variáveis de navegação são constituídos pelas variáveis de posição, que definem a posição do corpo, variáveis de velocidade, que especificam o movimento do corpo e variáveis de atitude, que especificam a orientação do corpo.

2.2.1. VARIÁVEIS DE POSIÇÃO

A posição de um veículo (corpo) em relação à Terra é descrita através de três parâmetros: longitude, latitude e altura.

Altitude (h) é definida como a distância vertical acima da Terra, ao longo da perpendicular à superfície da Terra.

Longitude (λ) é definida como a distância angular, medida no plano equatorial, entre o plano que contém o eixo polar e o meridiano correspondente à posição do veículo e o que contém o eixo polar e o meridiano que passa por Greenwich, na Inglaterra.

Para definir latitude, tem-se que primeiramente definir a posição de referência na superfície como a interseção com a superfície da Terra da perpendicular à superfície da Terra baixada a partir da posição real do veículo. Latitude é o ângulo medido em relação ao plano equatorial a partir da posição de referência na superfície. A latitude pode ser geocêntrica ou geodética.

Latitude Geocêntrica (L_{gc}) é o ângulo formado entre o plano equatorial e a linha formada entre a posição do veículo e o centro da Terra.

Latitude Geodética (L) é o ângulo formado entre o plano equatorial e a linha perpendicular à superfície da Terra passando pela posição real do veículo. É a mais comumente utilizada como referência de posicionamento em relação à Terra.

A FIG. 2.7 ilustra as variáveis de posição.

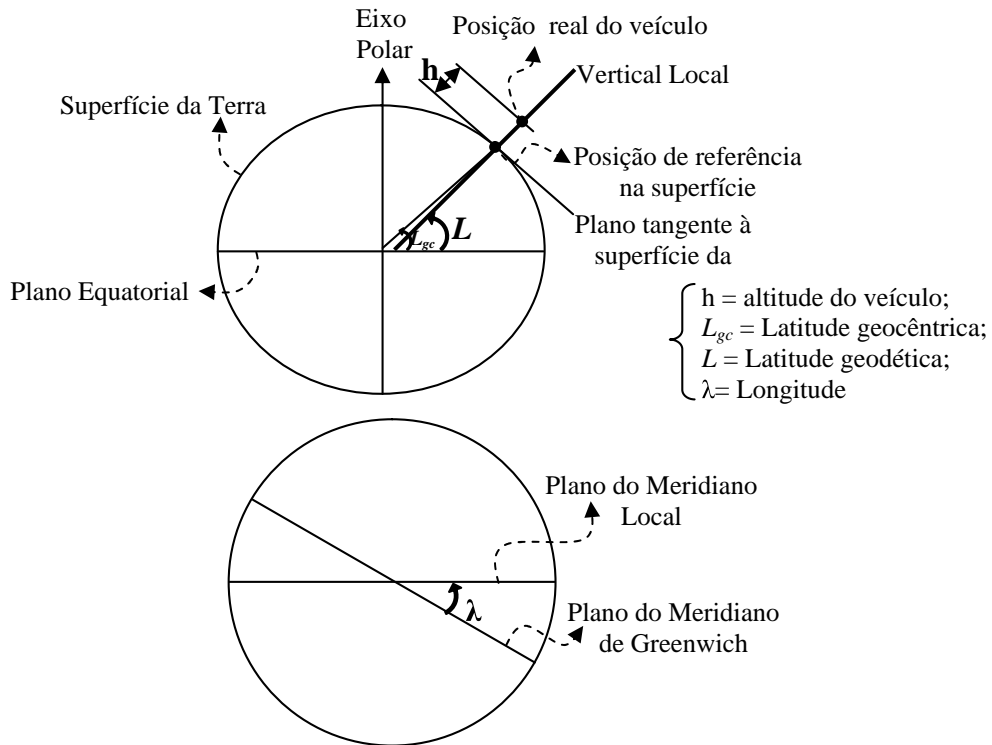


FIG. 2.7 – Variáveis de Posição

2.2.2. VARIÁVEIS DE VELOCIDADE

Os variáveis de velocidade são em geral expressos em termos de componentes verticais e horizontais do movimento translacional do veículo em relação à Terra.

A componente vertical da velocidade é definida como a variação temporal da altura.

A componente horizontal da velocidade é a projeção, no plano tangente à superfície da Terra na posição de referência do corpo, do vetor velocidade do corpo em relação à Terra. Esta componente, por sua vez, é expressa em duas componentes, nas direções norte e leste.

2.2.3. VARIÁVEIS DE ATITUDE

A FIG. 2.8 mostra os ângulos usualmente usados como parâmetros para definir a atitude (orientação) de um corpo veículo.

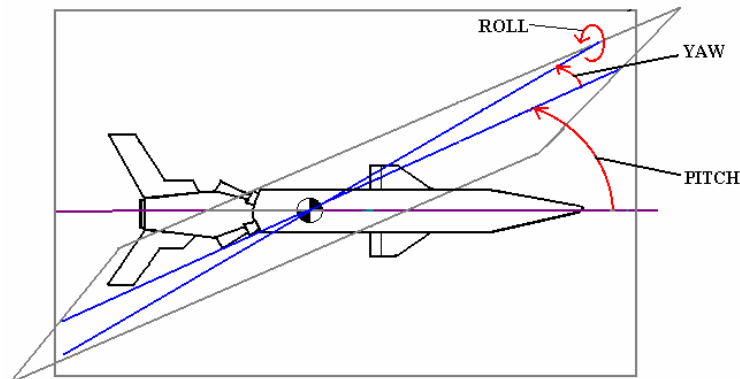


FIG. 2.8 – Variáveis de Atitude

As variáveis de atitude são, portanto, os seguintes:

Ângulo de rolagem (“roll”) - φ : é o ângulo medido em torno do eixo longitudinal do veículo.

Ângulo de inclinação (“pitch”) - θ : é definido como o ângulo, medido no plano vertical (plano que contém o eixo longitudinal do corpo e que é perpendicular ao plano tangente à superfície da Terra na posição de referência do corpo), entre o eixo longitudinal do corpo e um plano que, contendo o Centro de Massa (C.M.) do corpo, é paralelo ao plano tangente à superfície da Terra na posição de referência do corpo.

Ângulo de guinagem (“yaw”) - ψ : é o ângulo, medido num plano paralelo ao plano horizontal (plano tangente à superfície da Terra na posição de referência do corpo), contendo o C.M. do corpo, entre uma direção de referência e o eixo longitudinal do corpo. Se a direção de referência é o Norte Geográfico, o ângulo de guinagem recebe a denominação de ângulo de rumo (“heading”).

2.3. REFERENCIAIS

Na referenciação dos parâmetros de posição, de velocidade e de orientação são usados 04 (quatro) sistemas de coordenadas:

- referencial inercial (i) com origem no centro da Terra;
- referencial da Terra (e). Este acompanha a rotação da Terra; e
- referencial local ou de navegação (l . Algumas vezes representado pela letra n).
- referencial do corpo (b).

2.3.1. REFERENCIAL INERCIAL COM ORIGEM NO CENTRO DA TERRA

Neste sistema, o eixo z_i é alinhado com o eixo polar da Terra e os eixos x_i e y_i se estendem no plano equatorial. O referencial não acompanha a rotação da Terra e sua origem coincide com o seu centro de massa, como pode ser observado na FIG. 2.9.

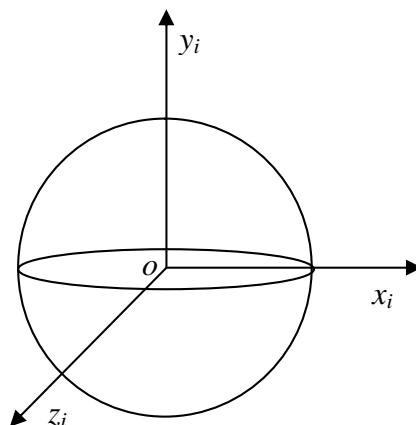


FIG. 2.9 – Referencial Inercial $o-x_i-y_i-z_i$

2.3.2. REFERENCIAL DA TERRA

O referencial da Terra é composto por 3 (três) eixos ortogonais (orientados segundo a regra da mão direita) com origem no centro da Terra, em que o eixo z_e está orientado na direção do pólo Norte, os eixos x_e e y_e estão no plano equatorial, sendo que o eixo x_e aponta sempre para o meridiano que passa pela cidade de Greenwich, na Inglaterra, e o eixo y_e encontra-se a 90° daquele.

Este referencial gira em relação ao referencial inercial segundo uma velocidade angular Ω de aproximadamente 15,04 graus por hora (correspondente à rotação da Terra), tendo o eixo z_e como eixo de rotação.

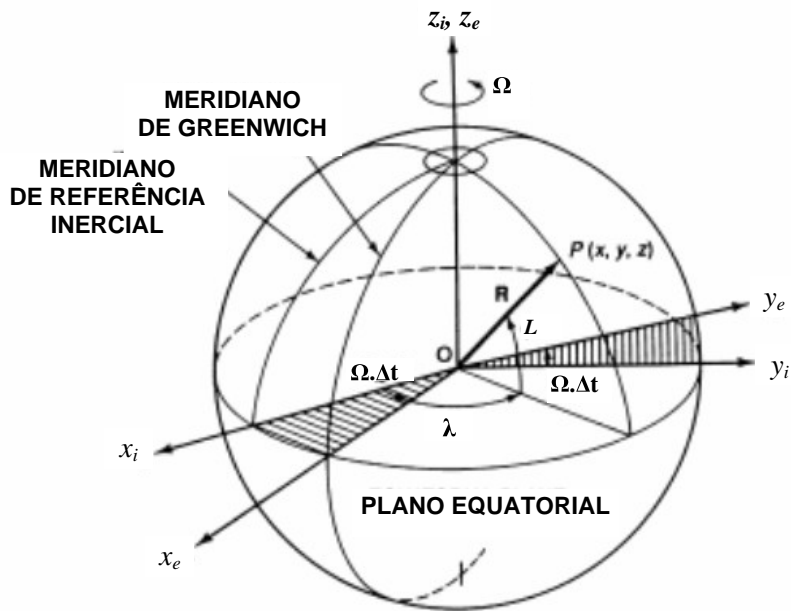


FIG. 2.10 – Referencial da Terra $o-x_e-y_e-z_e$

2.3.3. REFERENCIAL DO CORPO

Este sistema é um conjunto de três eixos ortogonais fixos na estrutura do veículo. A origem do sistema é o centro de gravidade do corpo e as direções são os eixos principais de inércia.

Os sentidos dos eixos são:

x_b : positivo para a frente.

y_b : positivo para a direita.

z_b : positivo para baixo.

A FIG. 2.11 apresenta o referencial do veículo.

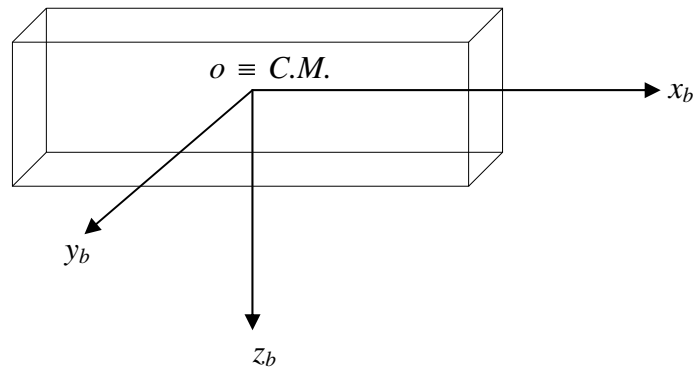


FIG. 2.11 – Referencial do veículo $o-x_b-y_b-z_b$

2.3.4. REFERENCIAL LOCAL OU DE NAVEGAÇÃO

O referencial local pode ser configurado, basicamente, de 02 (duas) formas:

- Estável no Espaço (*Space Stable*); e
- Localmente Nivelado (*Local Level*).

2.3.4.1. REFERENCIAL ESTÁVEL NO ESPAÇO (*SPACE STABLE*)

Neste caso, o referencial local permanece com sua orientação constante em relação ao espaço inercial.

2.3.4.2. REFERENCIAL LOCALMENTE NIVELADO (*LOCAL LEVEL*)

O referencial local, neste caso, é constituído por três eixos orientados segundo a regra da mão direita, sendo que dois dos eixos estão sobre o plano tangente à superfície da Terra e o terceiro eixo está alinhado com a vertical local, que é a perpendicular ao plano tangente à superfície da Terra baixada a partir da posição do veículo.

O referencial localmente nivelado pode ser orientado, basicamente de duas maneiras:

- Sistema ENU (*East North Up*): Com a origem no ponto de referência do veículo na superfície da Terra, seus eixos estão orientados segundo a direção do leste geográfico terrestre (eixo x), do norte geográfico (eixo y) e na direção da vertical local, apontando para cima (eixo z);

- Sistema NED (*North East Down*): Similar ao Sistema ENU, possui, no entanto, os eixos orientados para o norte geográfico terrestre (eixo x), para o leste (eixo y) e na direção da vertical local, apontando para baixo (eixo z).

Com relação à componente na vertical local de sua velocidade de rotação em relação ao referencial da Terra, o referencial localmente nivelado pode ser configurado de diferentes formas:

- Configuração geográfica;
- Configuração “wander azimuth”; e
- Configuração “free azimuth”.

2.3.4.2.1. CONFIGURAÇÃO GEOGRÁFICA

Nesta configuração, o referencial mantém um eixo de coordenadas sempre apontado para o Norte, outro sempre apontado para o Leste. O terceiro fica apontado na direção da vertical local e sentido para cima, para orientação do tipo ENU, ou para baixo, no caso de orientação do tipo NED.

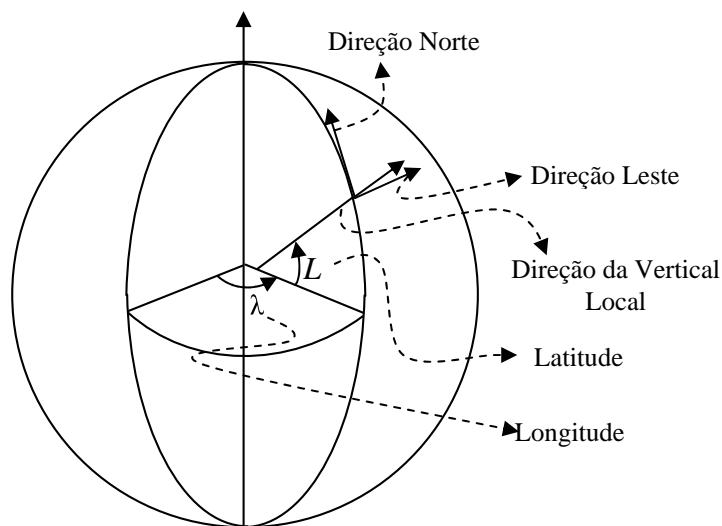


FIG. 2.12 – Referencial Local na configuração geográfica e orientação do tipo ENU

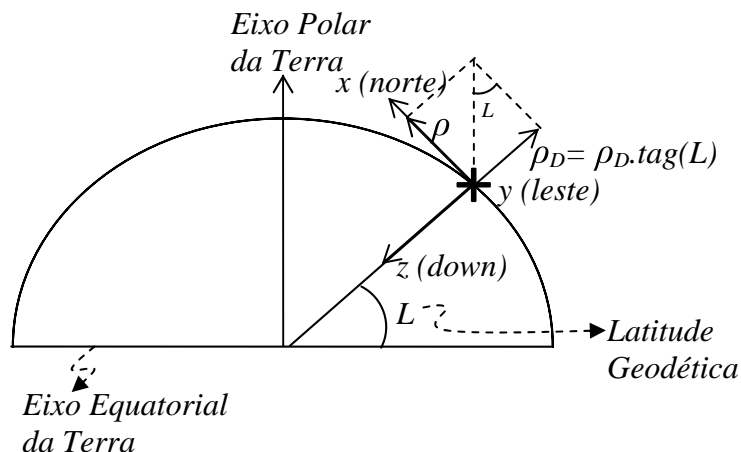


FIG. 2.13 – Referencial Local na configuração geográfica e orientação do tipo NED

Chamando-se de ρ_N a componente da velocidade angular do referencial local na direção Norte, pode-se observar, através da FIG. 2.13, que a componente na direção da vertical local, com o referencial local segundo a orientação NED, será:

$$\rho_D = -\rho_N \cdot \tan(L) \quad (2.24)$$

Não é difícil de concluir que, no caso de o referencial local ter orientação do tipo ENU, ter-se-ia:

$$\rho_U = \rho_N \cdot \tan(L) \quad (2.25)$$

Esta configuração facilita o cálculo da latitude e da longitude.

Um problema que ocorre com a utilização da configuração geográfica é a existência de singularidades para navegação nas proximidades dos pólos, que exige uma variação de ângulo de rumo (“heading”) excessivamente alta para manter o alinhamento com o Norte.

Na FIG. 2.14, percebe-se que o veículo, ao cruzar o pólo Norte, se vê obrigado a mudar instantaneamente a sua referência do Norte de um ângulo de 180°.

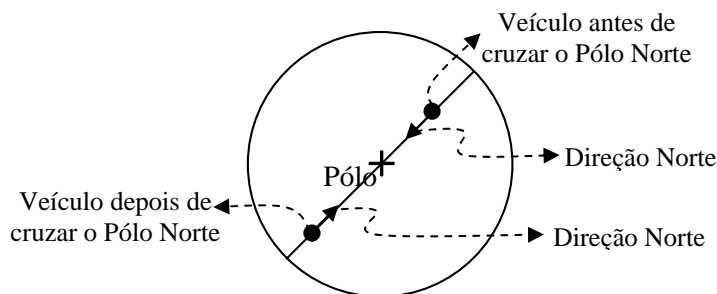


FIG. 2.14 – Navegação nas proximidades de um pólo

No algoritmo de navegação apresentado neste trabalho será utilizada esta configuração, com orientação NED.

Com configuração geográfica e orientação NED e a plataforma estacionária em relação à Terra, pode-se obter as componentes do vetor velocidade angular da Terra em relação ao referencial inercial, que são as seguintes, conforme pode ser observado nas FIG. 2.15 e 2.16:

no hemisfério Norte:

$$\underline{\omega}_{ie}^l = \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ -\Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

e, no hemisfério Sul:

$$\underline{\omega}_{ie}^l = \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ \Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

onde Ω é a magnitude da velocidade de rotação da Terra em relação ao referencial inercial, que é de, aproximadamente, 15,04 graus por hora.

Pode-se observar que a EQ. 2.24 se verifica tanto na EQ. 2.26 como na 2.27, como não poderia deixar de ser.

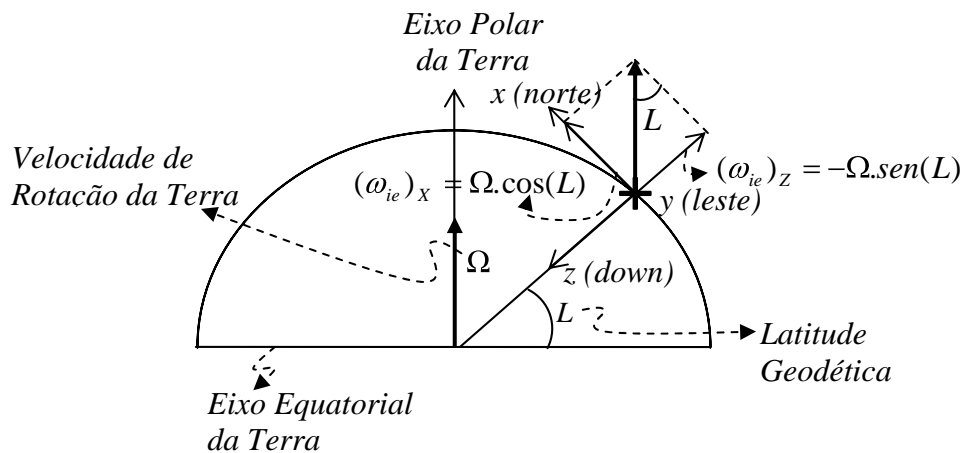


FIG. 2.15 – Componentes da Velocidade Angular da Terra no Referencial Local na configuração geográfica e orientação do tipo NED, no hemisfério Norte

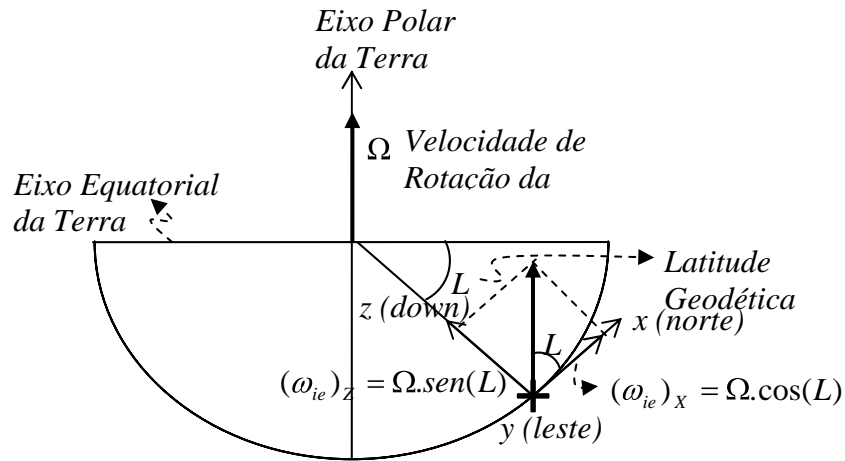


FIG. 2.16 – Componentes da Velocidade Angular da Terra no Referencial Local na configuração geográfica e orientação do tipo NED, no hemisfério Sul

2.3.4.2.2. CONFIGURAÇÃO “FREE AZIMUTH”

Na configuração “Free Azimuth”, os eixos situados no plano horizontal não são corrigidos de modo a se alinharem com o Norte e com o Leste. Esta característica elimina a existência de singularidades no cálculo da posição do corpo. O referencial com esta configuração apresenta velocidade de rotação nula, em relação à vertical local, com referência ao espaço inercial; o que significa que os eixos situados sobre o plano tangente à superfície da Terra na posição de referência do corpo apresentam velocidade de rotação sobre a vertical, igual e oposta à projeção da velocidade de rotação da Terra sobre a vertical local.

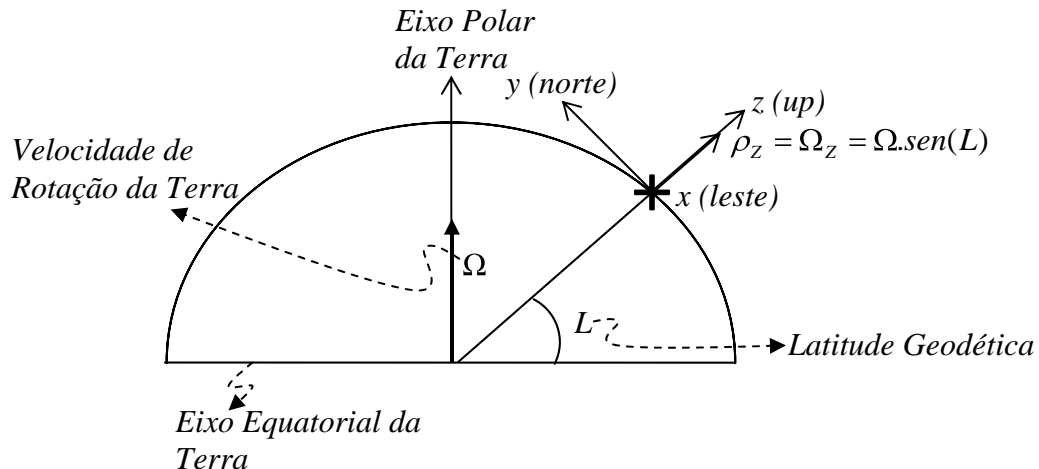


FIG. 2.17 – Referencial Local na configuração “free-azimuth” e orientação do tipo ENU

Pode-se observar, através da FIG. 2.17, que a componente da velocidade angular do referencial local em relação ao referencial da Terra na direção da vertical local, ρ_z , com o referencial local segundo a orientação ENU, será:

$$\rho_z = \Omega_z = \Omega \cdot \text{sen}(L) \quad (2.28)$$

No caso de o referencial local ter orientação do tipo NED, ter-se-ia:

$$\rho_z = -\Omega_z = -\Omega \cdot \text{sen}(L) \quad (2.29)$$

Desta maneira, tendo-se um veículo parado na superfície e associando-se ao mesmo um referencial com a configuração “free azimuth”, este referencial, se observado da Terra, girará horizontalmente, com velocidade de rotação igual em magnitude e oposta em sentido à projeção do vetor velocidade de rotação da Terra na vertical local.

2.3.4.2.3. CONFIGURAÇÃO “WANDER AZIMUTH”

Nesta configuração os eixos situados sobre o plano tangente à superfície da Terra na posição de referência do veículo na superfície (plano horizontal local) não têm rotação em relação à Terra; o que equivale a dizer que esses eixos têm velocidade de rotação sobre a vertical, em relação ao referencial inercial, igual à projeção do vetor velocidade de rotação da Terra na vertical local.

Desta forma, tem-se, para o referencial local na configuração “Wander Azimuth”, tanto para a orientação NED quanto para a ENU, o seguinte:

$$\rho_z = 0 \quad (2.30)$$

2.4. NAVEGAÇÃO INERCIAL

2.4.1. FUNDAMENTOS

2.4.1.1. PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE DE EINSTEIN-GALILEU

GUIZIOU, em 2004, apresenta o Princípio da Relatividade de Einstein-Galileu.

Seja R_i um Referencial Inercial, baseado em três direções estelares. Sabe-se que 2 (dois) giroscópios de 2 (dois) graus de liberdade, com seus eixos de rotação ortogonais, podem materializar tal referencial.

Seja uma cabine em movimento dentro do campo de gravitação \underline{w} , resultante do conjunto das massas do universo (apenas as mais próximas são consideradas), que está submetida a um conjunto de forças. Este conjunto de forças submete a cabine a uma aceleração absoluta \underline{a} .

Designa-se como força específica ou aceleração estática ou aceleração não gravitacional o vetor:

$$\underline{f} = \underline{a} - \underline{w},$$

onde:

\underline{a} é o vetor aceleração em relação ao referencial inercial R_i e

\underline{w} é a aceleração decorrente do campo gravitacional.

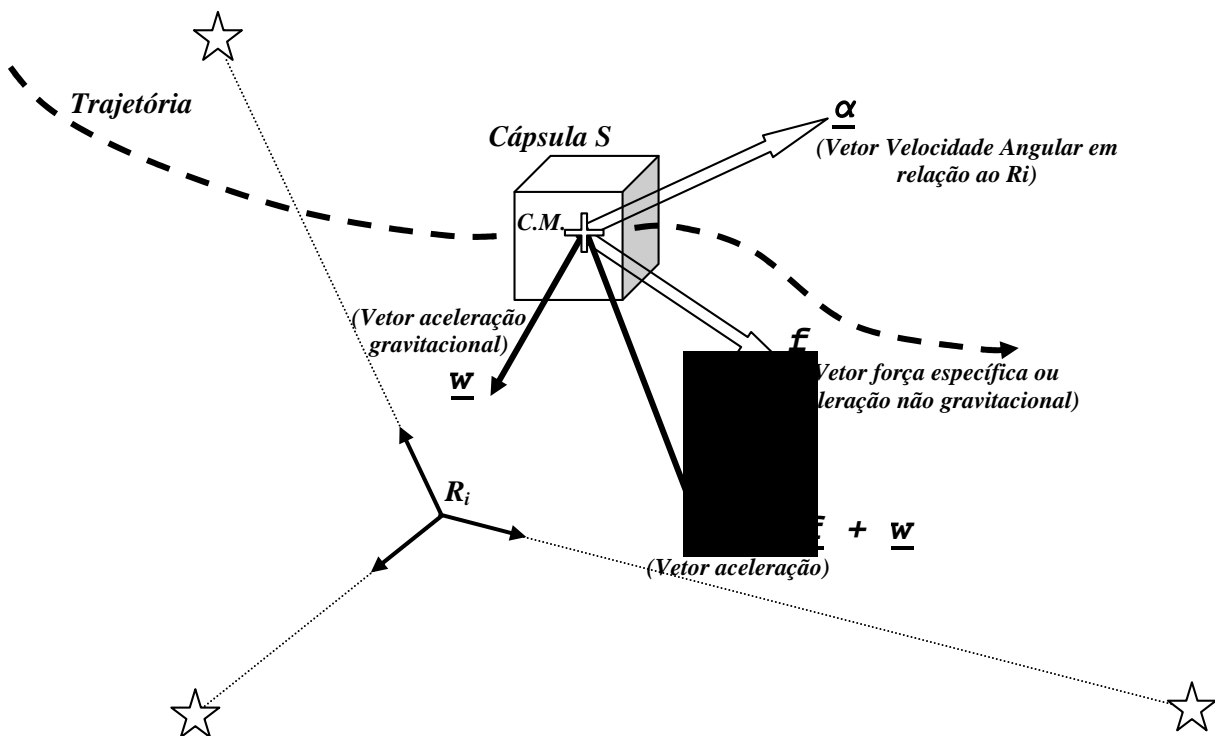


FIG. 2.18 – Cápsula auto-suficiente isolada do mundo exterior

Questão proposta por Einstein:

Imagine-se um veículo totalmente isolado do mundo exterior, no que diz respeito a :

- telecomunicações;
- emissões de todo tipo (eletromagnéticas, acústicas entre outras).

Não podendo, portanto, nada receber nem emitir. No entanto:

- autônomo no que diz respeito à energia;
- com capacidade de transportar todo tipo de conhecimento (discos, livros, “CD-ROM” e outros tipos de memória digital entre outros);
- com a possibilidade de utilizar todos os meios de cálculos imagináveis.

O que se poderia, estando no interior do veículo, conhecer do movimento do mesmo?

Resposta:

Princípio da Relatividade de Einstein-Galileu: “É possível medir, a bordo do veículo, dois vetores: o vetor **rotação instantânea** $\underline{\alpha}$ do veículo, em relação ao referencial inercial e o vetor **força específica** \underline{f} ; e nada além disso”.

Conseqüências deste princípio:

a) Este princípio mostra que, em missões espaciais e em vôos balísticos, sob ação apenas do campo gravitacional, é impossível medir o que quer que seja deste campo. Estando em órbita da Terra, ou de Marte ou até do Sol, nada permite se perceber a diferença. Em todos os casos o veículo (ou o corpo em movimento) e os objetos dentro dele estão em queda livre, implicando na sensação de flutuação, o que não significa absolutamente em ausência de gravidade, que, antes, é a única agente.

b) Como, então, evidencia-se g sobre a Terra?

Sobre a Terra, o contato da superfície de um corpo imóvel (o assoalho de uma casa, por exemplo) sobre um objeto permite avaliar a gravidade, não através da medida do peso deste objeto, mas da reação desta superfície sobre o objeto cujo peso se quer medir, que tem sentido oposto. Uma balança mede, portanto, esta reação entre a superfície imóvel e o objeto cujo peso se quer medir. A medição desta reação é impossível num vôo balístico.

Sensores foram concebidos de maneira a medirem esses vetores. O sensor que mede a rotação instantânea de um corpo em relação ao Referencial Inercial chama-se giroscópios. O que mede a força específica é denominado acelerômetro.

2.4.2. SISTEMAS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

Conforme visto no item 2.4.1.1, as únicas informações que um veículo pode obter de forma autônoma, ou seja, sem recorrer a nenhum auxílio externo, acerca de seu próprio movimento são a velocidade angular em relação ao referencial inercial e a força específica. Uma vez que estas grandezas são vetoriais e os sensores inerciais utilizados, quais sejam, os giroscópios e os acelerômetros, via de regra, são capazes de realizar medidas em apenas um eixo, os Sistemas de Navegação Inercial são, em geral, constituídos por 3 (três) giroscópios montados formando um triedro e 3 (três) acelerômetros montados da mesma forma, de sorte que, tendo-se três componentes mutuamente ortogonais dos dois vetores desejados, possa-se, no espaço tridimensional, obter os referidos vetores.

2.5. MECANIZAÇÕES TÍPICAS DE UM SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

ALONZO, em 1994, entre outros, apresenta as mecanizações típicas de um Sistema de Navegação Inercial.

Denomina-se mecanizações o arranjo mecânico que une a plataforma, onde estão os sensores inerciais, ao veículo.

Basicamente, há dois tipos de mecanizações possíveis para os Sistemas de Navegação Inercial: sistemas com plataforma estabilizada (“mechanized platform” ou “gimballed platform”) e sistemas com plataforma solidária (“strapdown”).

Nos sistemas com plataforma estabilizada, esta é suspensa de forma a poder ser girada sobre três eixos ortogonais por um servomecanismo, de forma a se manter sempre alinhada com o referencial local.

O sinal de saída dos giroscópios fornece a velocidade angular do referencial do corpo em relação ao inercial. De posse da velocidade angular do referencial local em relação ao inercial, dado este fornecido pelo algoritmo de navegação, obtém-se a velocidade angular do corpo em relação ao referencial local e, assim, a atitude do veículo em relação ao referencial local. Esta informação é enviada ao servomecanismo que mantém a plataforma alinhada com o referencial local, como foi dito. A plataforma, portanto, não experimenta nenhuma rotação em relação ao

referencial local, apesar do veículo estar em movimento. Nessa situação, os acelerômetros, uma vez que permanecem com seus eixos sempre alinhados com o referencial local, medem as componentes da força específica diretamente neste referencial.

Assim, os acelerômetros podem medir as forças específicas medidas diretamente ao algoritmo de navegação, de forma a se obter a velocidade e posição, via 2 (duas) sucessivas integrações.

A FIG. 2.19 ilustra o Diagrama de Blocos de obtenção da velocidade, da posição e da atitude do veículo em relação ao referencial local, ou de navegação, numa plataforma estabilizada.

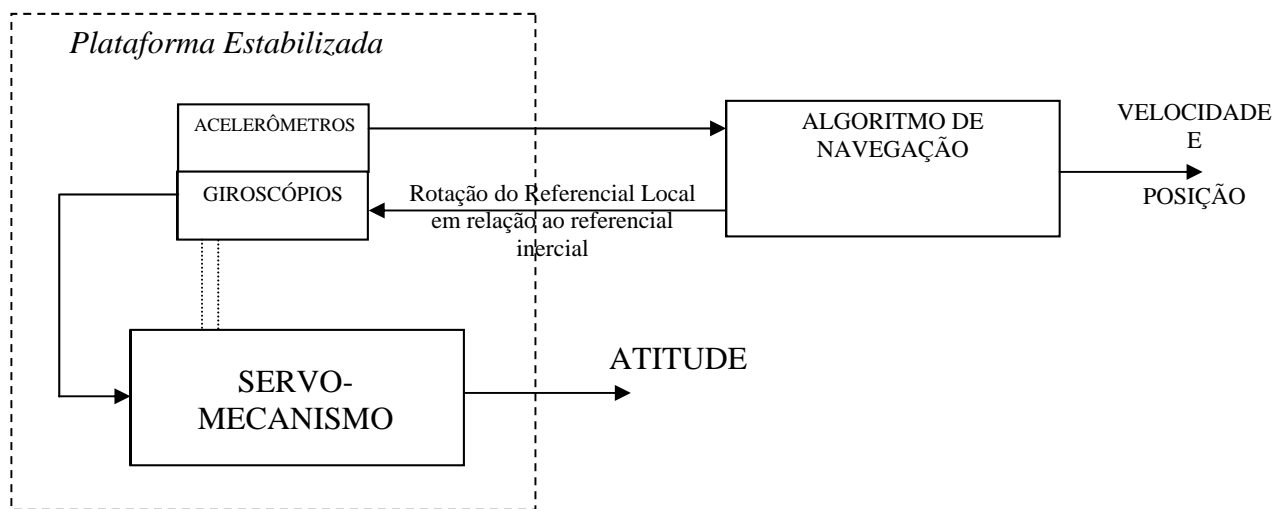


FIG. 2.19 - Diagrama de Blocos de obtenção da velocidade, da posição em relação ao referencial da Terra, numa plataforma

Já nos sistemas do tipo plataforma solidária (“strapdown”), a plataforma é fixada diretamente no veículo, acompanhando o referencial do corpo.

Neste tipo de plataforma, os acelerômetros fornecem as componentes da força específica no referencial do corpo, havendo, portanto a necessidade de transformá-las em componentes no referencial local, que é o de navegação.

Os giroscópios enviam as velocidades de rotação do referencial do corpo em relação ao inercial a um algoritmo de atitude, que, de posse da informação da velocidade de rotação do referencial local em relação ao inercial, proveniente do algoritmo de navegação, pode calcular os parâmetros de atitude do corpo e, por conseguinte, a Matriz de Transformação de Coordenadas do Referencial do Corpo para o Local. As forças específicas geradas pelos acelerômetros no

referencial do corpo podem, então, ser levadas ao referencial local e, assim, usadas no algoritmo de navegação, que fornece a velocidade e a posição em relação ao referencial da Terra.

Pode-se concluir, portanto, que é exigido um aparato computacional bem maior neste tipo de sistema, já que a tarefa do servo-mecanismo da plataforma estabilizada é substituída por cálculos de transformação de coordenadas. Desta maneira, não seria equivocado dizer que a plataforma solidária é uma plataforma estabilizada “virtualmente”.

A FIG. 2.20 apresenta o diagrama de blocos de uma plataforma solidária.

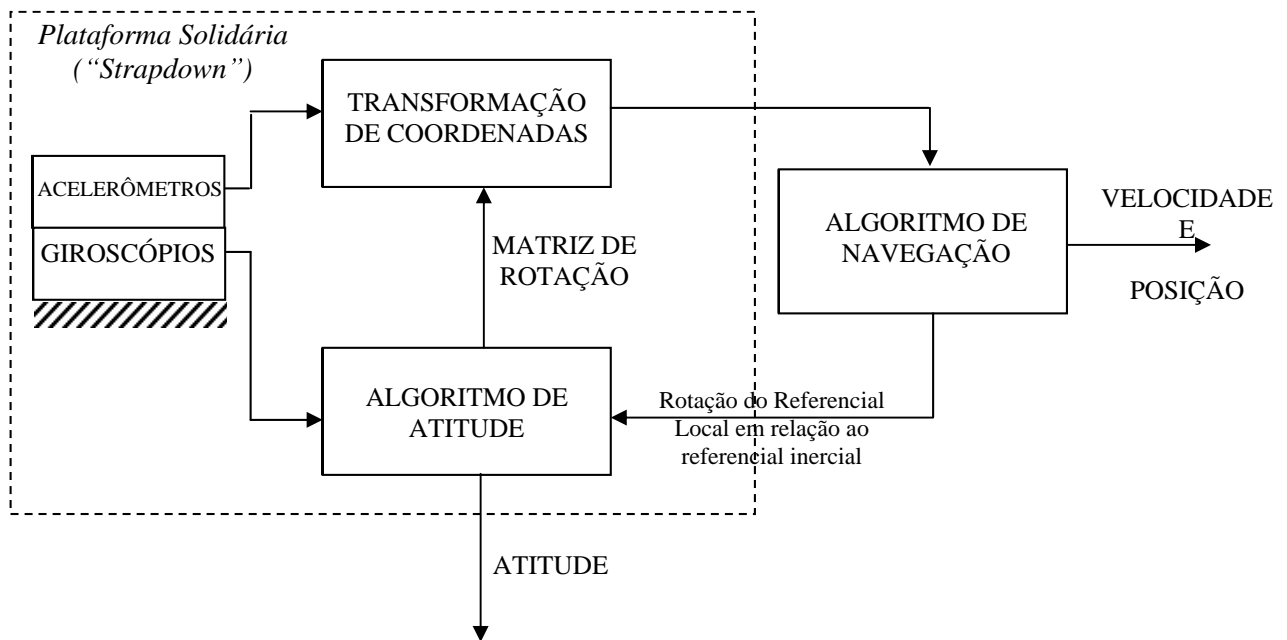


FIG. 2.20 – Diagrama de Blocos de obtenção da velocidade e da posição em relação ao referencial da Terra, numa plataforma solidária

2.6. ALGORITMOS DE ALINHAMENTO, DE NAVEGAÇÃO E DE ATITUDE

Os algoritmos de alinhamento, de navegação e de atitude implementados neste trabalho tomaram por base uma plataforma do tipo solidária, com referencial local ou de navegação na configuração geográfica e orientação do tipo NED, no hemisfério Sul.

2.6.1. ALGORITMO DE ALINHAMENTO

Inicialmente, necessita-se fornecer ao Sistema de Navegação Inercial os dados de posição e orientação iniciais da plataforma. A informação da posição inicial pode ser obtida através de recursos topográficos ou outro meio, como pelo GPS (“Global Positioning System”).

A informação da orientação pode ser fornecida pelo próprio Sistema de Navegação Inercial, usando os seus giroscópios e acelerômetros e tomando como referência o vetor gravidade e o vetor rotação da Terra, que são conhecidos, no que diz respeito a direção, sentido e magnitude.

O vetor gravidade permite conhecer a orientação da Plataforma com relação à vertical local. Este procedimento, que será detalhado adiante, é chamado de nivelamento.

Tomando-se por base o vetor rotação da Terra, realiza-se o chamado alinhamento, que será abordado à frente, obtendo a orientação da Plataforma em relação ao Norte Verdadeiro.

O nivelamento e o alinhamento, designados para efeito de simplificação neste trabalho simplesmente como alinhamento, são realizados em duas etapas, que se constituirão nas duas partes do algoritmo de alinhamento concebido neste trabalho: o Alinhamento Grosseiro e o Alinhamento Fino.

No Alinhamento Grosseiro, usam-se as informações fornecidas tão somente pelos giroscópios e acelerômetros.

No Alinhamento Fino, considera-se, além das informações fornecidas pelos giroscópios e acelerômetros, às de outros instrumentos de medida, de forma a, através de uma filtragem ótima dos dados obtidos das diversas fontes, obter-se uma maior precisão quanto à orientação da plataforma.

Neste trabalho, são utilizados dois giroscópios de medição de deslocamento angular e um girocompasso, que é o sensor que mede o deslocamento angular em relação ao Norte Verdadeiro, como instrumentos de medida auxiliares para a realização da filtragem ótima. Estes sensores não possuem, no entanto, dinâmica para acompanhar os movimentos do corpo na navegação. Embora a precisão destes sensores seja da mesma ordem dos giroscópios da plataforma, obtém-se, na filtragem, uma acurácia melhor do que no caso do uso dos sensores isoladamente.

No Alinhamento Fino, que será detalhado mais adiante, o equacionamento da filtragem concebido neste trabalho permite, além do refinamento das informações de orientação da

plataforma, a estimação, e posterior compensação, de um tipo de erro, chamado de bias dia a dia, que será detalhado mais adiante e que ocorre em cada um dos giroscópios e dos acelerômetros.

2.6.2. ALGORITMO DE NAVEGAÇÃO

O algoritmo de navegação consiste basicamente em duas integrações. Na primeira, integra-se a aceleração do veículo, em componentes em relação ao referencial local, obtendo-se as componentes da velocidade neste referencial. As mesmas são usadas nas equações diferenciais que definem a atualização no tempo das variáveis de posição, quais sejam, latitude, longitude e altura. Estas equações, uma vez integradas, fornecem os valores de tais variáveis.

2.6.3. ALGORITMO DE ATITUDE

Como o algoritmo de navegação necessita das componentes da força específica em relação ao referencial local e os giroscópios fornecem-na em relação ao referencial do corpo, necessita-se, a cada instante, conhecer a Matriz de Transformação de Coordenadas do referencial do corpo para o referencial local (C_b^l). Por conseguinte, necessita-se resolver, para cada instante de tempo, a equação diferencial de atualização temporal da referida matriz. Aos procedimentos que envolvem esta atualização dá-se o nome de algoritmo de atitude.

Neste trabalho, os algoritmos de navegação e atitude foram implementados em conjunto. Estes algoritmos foram baseados nos trabalhos de SAVAGE, em 1985, e TITTERTON e WESTON, em 1997.

3. ALGORITMO DE NAVEGAÇÃO E ATITUDE

3.1. NAVEGAÇÃO

3.1.1. PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DE UM ACELERÔMETRO

O princípio de funcionamento de um acelerômetro é apresentado, entre outros, por ALONZO, 1994.

Um acelerômetro é, basicamente, um transdutor que relaciona o movimento de uma massa em relação a uma câmara instrumentada, através de uma restrição elástica, viscosa ou eletromagnética.

Todos os acelerômetros operam segundo o mesmo princípio, qual seja, o de medir o deslocamento relativo de uma pequena massa, chamada massa de prova ou massa sísmica, restrita no interior de uma câmara submetida a uma aceleração.

A restrição imposta ao movimento relativo da massa em relação à câmara do acelerômetro é captada por um transdutor que retorna um sinal proporcional a esse movimento.

A aceleração inercial da massa de prova do acelerômetro é igual e oposta à aceleração inercial do corpo onde o acelerômetro está fixado e que, em última análise, é a grandeza de interesse.

De acordo com a Segunda Lei de Newton, a aceleração inercial da massa (\underline{a}_i) é proporcional à soma das forças aplicadas à massa (\underline{F}_{res}), neste caso, a força gravitacional (\underline{W}) e a força elástica (\underline{F}). Pode-se, portanto, escrever:

$$m \cdot \underline{a}_i = \underline{F}_{res} = \underline{F} + \underline{W} \quad (3.1)$$

A saída de um acelerômetro é um sinal elétrico que é proporcional à força específica ($\frac{\underline{F}}{m}$).

A FIG. 3.1 apresenta um esquema do princípio de funcionamento de um acelerômetro.

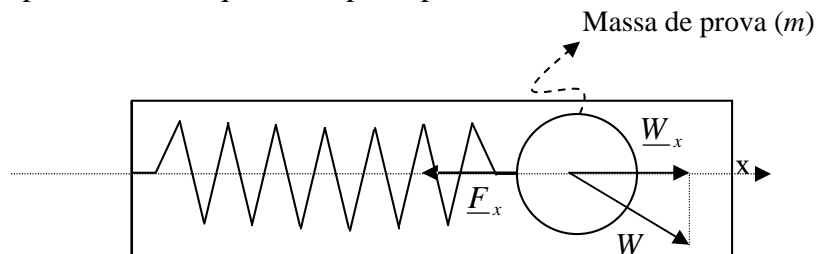


FIG. 3.1 - Acelerômetro

Na FIG. 3.1, \underline{F} é a força elástica a que a massa de prova é submetida; \underline{F}_x é a componente da força \underline{F} no eixo longitudinal do acelerômetro (suposto como x); \underline{W} é a força de atração da Terra sobre a massa do acelerômetro e \underline{W}_x é a componente da força \underline{W} no eixo longitudinal do acelerômetro (suposto como x).

3.1.2. OBTENÇÃO DA FORÇA ESPECÍFICA

A segunda lei de Newton aplicada ao acelerômetro pode ser expressa como se segue.

$$\underline{F}_{res_x} = \underline{F}_x + \underline{W}_x = m(\underline{a}_x)_i \quad (3.2)$$

onde \underline{F}_x é a componente da força elástica a que a massa de prova é submetida no eixo longitudinal do acelerômetro (suposto como x); \underline{W}_x é a componente da força de atração da Terra sobre a massa de teste no eixo longitudinal do acelerômetro (suposto como x); m é a massa de teste e $(\underline{a}_x)_i$ é a componente, no eixo longitudinal do veículo, da aceleração do veículo no referencial inercial.

Pode-se, portanto, escrever o seguinte:

$$(\underline{a}_i)_x = \frac{\underline{F}_x}{m} + \frac{\underline{W}_x}{m} = \underline{f}_x + \underline{w}_x$$

onde a quantidade \underline{f}_x é a componente em x de \underline{f} , que é denominada de Força Específica, e \underline{w}_x é a componente em x (eixo longitudinal do acelerômetro) de \underline{w} , que é denominada de aceleração gravitacional.

O acelerômetro fornece, portanto, a componente \underline{f}_x da força específica. Dispondo-se da componente da aceleração gravitacional, em relação ao mesmo eixo, \underline{w}_x , pode-se obter a a componente da aceleração inercial da massa, e portanto do corpo, em relação a esse mesmo eixo, $(\underline{a}_i)_x$.

Procedendo analogamente em relação aos eixos y e z, pode-se obter, da soma das três componentes, o vetor \underline{a}_i , que é a aceleração do corpo na qual se está interessado.

3.1.3. OBTENÇÃO DA POSIÇÃO DO VEÍCULO EM RELAÇÃO AO REFERENCIAL DA TERRA

ALONZO, em 1994, e TITTERTON e WESTON, em 1997, apresentam as equações envolvidas na obtenção da posição do veículo em relação ao referencial da Terra.

Seja a rotação da Terra em relação ao referencial inercial constante e dada por $\underline{\omega}_{ie}$.

Seja a rotação do referencial local em relação ao referencial da Terra dada por $\underline{\omega}_{el}$.

A rotação do referencial local em relação ao referencial inercial é, portanto, dada pela seguinte expressão:

$$\underline{\omega}_{il}^l = \underline{\omega}_{ie}^l + \underline{\omega}_{el}^l \quad (3.3)$$

onde o sobrescrito l indica apenas que as componentes dos vetores dizem respeito ao referencial local.

A velocidade de um veículo em relação à superfície da Terra, que é, na verdade, o vetor velocidade usual e de interesse, pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\underline{v}_e = \left(\frac{d\underline{r}}{dt} \right)_e = \left(\frac{d\underline{r}}{dt} \right)_i - \underline{\omega}_{ie} \times \underline{r} \quad (3.4)$$

onde:

$\left(\frac{d\underline{r}}{dt} \right)_e$ é o vetor variação no tempo, em relação ao referencial da Terra, do vetor posição do

veículo, ou seja, é o vetor velocidade relativa à Terra;

$\left(\frac{d\underline{r}}{dt} \right)_i$ é vetor variação no tempo, em relação ao referencial inercial, do vetor posição do

veículo, em relação ao centro da Terra, ou seja, é o vetor velocidade absoluta;

$\underline{\omega}_{ie}$ é a velocidade de rotação da Terra em relação ao referencial inercial;

\underline{r} é o vetor posição do veículo, em relação à origem do referencial da Terra.

Como $\underline{\omega}_{ie}$ é constante no tempo, diferenciando-se a EQ. 3.4 em relação ao tempo, tem-se:

$$\left(\frac{d\underline{v}_e}{dt} \right)_i = \left(\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} \right)_e - \underline{\omega}_{ie} \times \left(\frac{d\underline{r}}{dt} \right)_i \quad (3.5)$$

Como, da EQ. 3.4, $\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_i = \underline{v}_e + \underline{\omega}_{ie} \times \underline{r}$, substituindo-se na EQ. 3.5, tem-se:

$$\left(\frac{d\underline{v}_e}{dt}\right)_i = \left(\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}\right)_i - \underline{\omega}_{ie} \times [\underline{v}_e + \underline{\omega}_{ie} \times \underline{r}] \quad (3.6)$$

As componentes de \underline{v}_e em relação ao referencial local são de maior interesse, uma vez que definem componentes da velocidade nos planos horizontal e vertical em relação à superfície da Terra. Por conseguinte, seria mais conveniente se a equação diferencial para \underline{v}_e estivesse expressa em relação ao referencial local.

Como:

$$\left(\frac{d\underline{v}_e}{dt}\right)_i = \left(\frac{d\underline{v}_e}{dt}\right)_l + \underline{\omega}_{ie} \times \underline{v}_e \quad (3.7)$$

onde:

$$\left(\frac{d\underline{v}_e}{dt}\right)_i \text{ é a variação no tempo, em relação ao referencial inercial, do vetor velocidade do}$$

corpo em relação ao referencial da Terra;

$$\left(\frac{d\underline{v}_e}{dt}\right)_l \text{ é a variação no tempo, em relação ao referencial local, do vetor velocidade do corpo}$$

em relação ao referencial da Terra.

Substituindo-se a EQ. 3.7 na EQ. 3.6, tem-se:

$$\left(\frac{d\underline{v}_e}{dt}\right)_l = \left(\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}\right)_i - \underline{\omega}_{ie} \times (\underline{v}_e + \underline{\omega}_{ie} \times \underline{r}) - \underline{\omega}_{il} \times \underline{v}_e \quad (3.8)$$

Como $\underline{a}_i = \left(\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}\right)_i = \underline{f} + \underline{w}$, da EQ. 3.8 tem-se:

$$\left(\frac{d\underline{v}_e}{dt}\right)_l = \underline{f} - (\underline{\omega}_{il} + \underline{\omega}_{ie}) \times \underline{v}_e + \underline{w} - \underline{\omega}_{ie} \times (\underline{\omega}_{ie} \times \underline{r}) \quad (3.9)$$

Pode-se integrar duas vezes a equação, de modo a se obter, sucessivamente, a velocidade e a posição do veículo em relação ao referencial da Terra, no referencial local.

Os dois últimos termos da equação são funções apenas da posição e são agrupados, recebendo a designação de gravidade.

$$\underline{g} = \underline{w} - \underline{\omega}_{ie} \times (\underline{\omega}_{ie} \times \underline{r}) \quad (3.10)$$

Desta forma, a EQ. 3.9 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{d\underline{v}_e}{dt} \right)_l = \underline{f} - (\underline{\omega}_{il} + \underline{\omega}_{ie}) \times \underline{v}_e + \underline{g} \quad (3.11)$$

Como $\underline{\omega}_{il} = \underline{\omega}_{ie} + \underline{\omega}_{el}$, pode-se ainda reescrever a EQ. 3.11 da seguinte maneira:

$$\left(\frac{d\underline{v}_e}{dt} \right)_l = \underline{f} - (2\underline{\omega}_{ie} + \underline{\omega}_{el}) \times \underline{v}_e + \underline{g} \quad (3.12)$$

Uma vez que se trabalha com as componentes dos vetores no referencial local e os acelerômetros fornecem a força específica no referencial do corpo, faz-se o seguinte:

$$\left(\frac{d\underline{v}_e}{dt} \right)_l = C_b^l \cdot \underline{f}^b - (2\underline{\omega}_{ie} + \underline{\omega}_{el}) \times \underline{v}_e + \underline{g} \quad (3.13)$$

A aceleração da gravidade é a aceleração que decorre da gravitação ou aceleração gravitacional e da aceleração centrífuga.

Gravidade é definida como a força requerida para manter uma massa de teste com a velocidade vertical constante ou nula, em relação à Terra.

É interessante notar que o vetor \underline{g} é localmente perpendicular à superfície da Terra. Esse fato parece resultar do provável processo de formação da Terra, como decorrente de um resfriamento de uma massa fluida em rotação. Nesse processo, a superfície da Terra teria assumido um formato equipotencial em relação à gravidade, de maneira a não haver tensões horizontais na superfície. Conseqüentemente, a superfície da Terra teria ficado perpendicular ao vetor \underline{g} em qualquer lugar do planeta. Assim, para fins de navegação, a superfície da Terra pode ser representada por um elipsóide de revolução sobre o eixo de rotação da Terra.

A Gravitação é a força de atração entre os corpos, que é diretamente proporcional às massas dos mesmos e inversamente proporcional à distância entre eles. Ao se dividir a gravitação pela massa do corpo de interesse, obtém-se a aceleração gravitacional deste corpo:

$$\underline{w} = \frac{W}{m} = \frac{1}{m} \left[\frac{GMm}{R^2} \right] \cdot \left(-\frac{\underline{R}}{|\underline{R}|} \right) = - \left[\frac{GM}{R^3} \right] \underline{R} \quad (3.14)$$

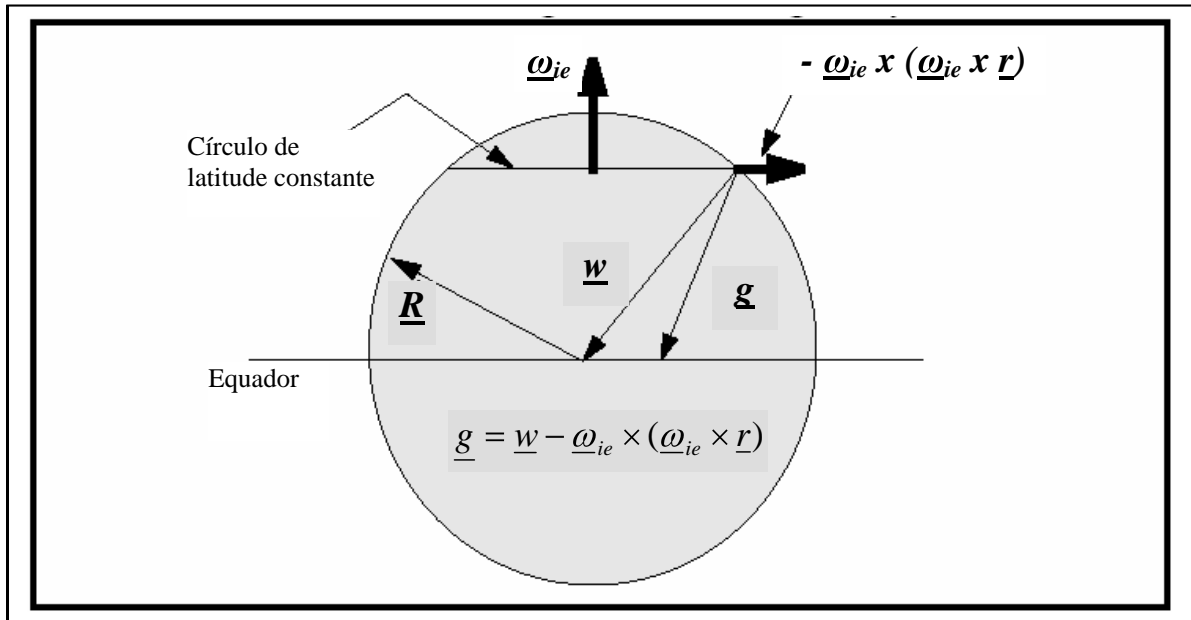


FIG. 3.2 – aceleração gravitacional, \underline{w} , e aceleração da gravidade, \underline{g}

Pode-se, então, sistematizar o seguinte algoritmo para obtenção do vetor posição do veículo, em relação ao referencial da Terra, no referencial local:

- 1) Adicionar a aceleração gravitacional, \underline{w} , à força específica;
- 2) Remover a aceleração centrífuga, devida ao desalinhamento do veículo em relação ao centro da Terra;
- 3) Remover a aceleração de coriolis, devida ao movimento do veículo sobre a superfície da Terra;
- 4) Integrar duas vezes, incorporando as condições iniciais.

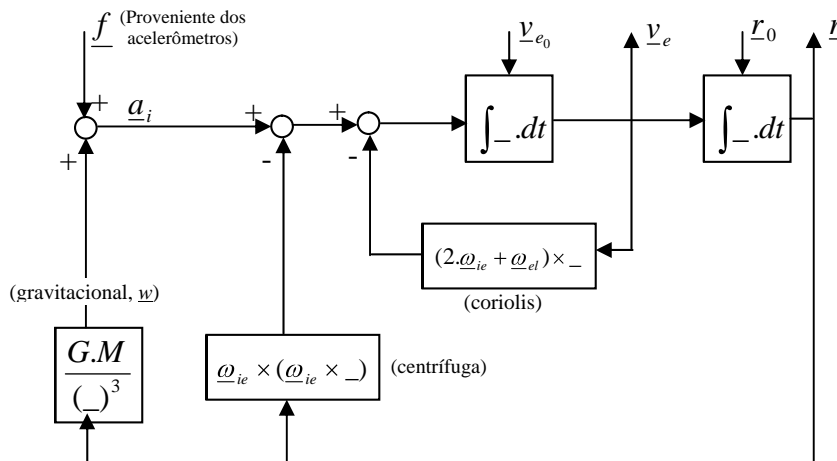


FIG. 3.3 – Diagrama de blocos de obtenção da velocidade e da posição em relação ao referencial da Terra

3.1.4. EQUAÇÕES DE NAVEGAÇÃO

A expressão da aceleração, obtida no item anterior, equação (3.12), é a seguinte:

$$\left(\frac{d\underline{v}_e}{dt} \right)_l = \underline{f} - (2\underline{\omega}_{ie} + \underline{\omega}_{el}) \times \underline{v}_e + \underline{g}$$

Com o referencial local na configuração geográfica e orientação NED, os vetores das equações acima, no hemisfério sul, podem ser expressos como se segue:

$$\begin{aligned} \underline{v}_e^l &= [v_N \quad v_E \quad v_D]^T \\ \underline{r}^l &= [x_N \quad x_E \quad -h]^T \\ \underline{\omega}_{ie}^l &= [\Omega \cdot \cos(L) \quad 0 \quad -\Omega \cdot \text{sen}(L)]^T \\ \underline{\omega}_{el}^l &= \left[\frac{v_E}{(R_E + h)} \quad -\frac{v_N}{(R_N + h)} \quad -\frac{v_E \cdot \tan(L)}{(R_N + h)} \right]^T \\ \underline{g}^l &= [0 \quad 0 \quad g]^T \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pode-se substituir as expressões 3.15 na EQ. 3.12, obtendo-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{v}_N &= f_N + 2 \cdot \Omega \cdot \text{sen}(L) \cdot v_E - \frac{\tan(L)}{R_N + h} \cdot v_E^2 + \frac{1}{R_N + h} \cdot v_N \cdot v_D \\ \dot{v}_E &= f_E - 2 \cdot \Omega \cdot \text{sen}(L) \cdot v_N + 2 \cdot \Omega \cdot \cos(L) \cdot v_D + \frac{1}{R_E + h} \cdot v_E \cdot v_D + \frac{\tan(L)}{R_E + h} \cdot v_N \cdot v_E \\ \dot{v}_D &= f_D - 2 \cdot \Omega \cdot \cos(L) \cdot v_E - \frac{1}{R_N + h} \cdot v_N^2 - \frac{1}{R_E + h} \cdot v_E^2 + g \end{aligned} \quad (3.16)$$

Evidentemente, o algoritmo de navegação pode ser concebido tanto resolvendo as equações de navegação na forma da EQ. 3.12 quanto na forma da EQ. 3.16.

3.2. ATITUDE

3.2.1. CONSIDERAÇÕES BÁSICAS

Em sistemas de navegação inercial dotados de plataformas do tipo solidária ou “strapdown”, faz-se necessária a transformação das medidas das forças específicas, fornecidas pelos acelerômetros e referenciadas em relação ao sistema de coordenadas do corpo, para o referencial local, a fim de que possam ser usadas nas equações de navegação. Essa transformação é feita através de um algoritmo computacional que consiste, basicamente, na integração da equação

diferencial de atualização no tempo da matriz de transformação de coordenadas do sistema do corpo para o local. Assim, pode-se dizer que o algoritmo de atitude fornece, a cada instante, a Matriz de Transformação de Coordenadas, C_b^l , permitindo, desta forma, obter-se tanto as componentes da força específica no referencial local, como também os parâmetros de atitude do veículo em relação ao mesmo referencial, que, para este trabalho, são os ângulos de Euler.

Para a resolução da equação de atualização temporal da atitude, como será visto adiante (EQ. 3.33), necessita-se da velocidade angular do referencial do corpo em relação ao inercial, em componentes no referencial do corpo, que é fornecida pelos giroscópios, e da velocidade angular do referencial local em relação ao inercial, em componentes no referencial local (passo 5.2 do algoritmo de navegação, que será apresentado adiante).

As operações realizadas na transformação das coordenadas são apresentadas por IORIO, em 1995, e podem ser visualizadas na FIG. 3.4.

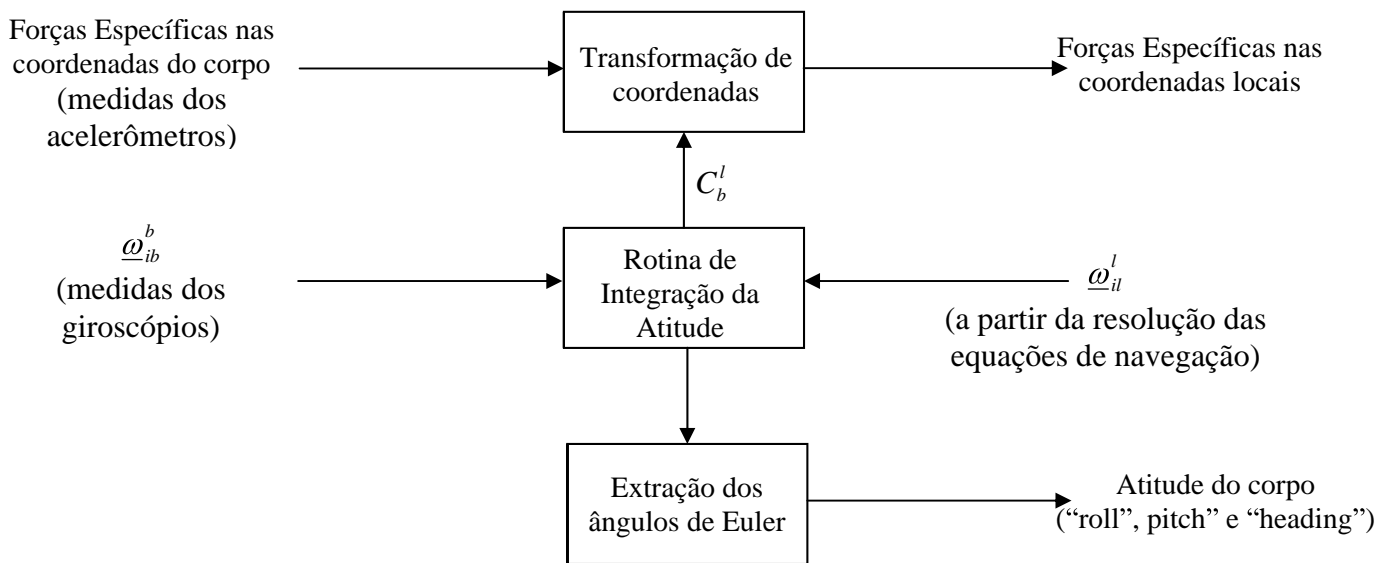


FIG. 3.4 – Diagrama das Operações Realizadas para a Transformação de Coordenadas

No diagrama apresentado na FIG. 3.4, tem-se que:

$\underline{\omega}_{ib}^b$ é a velocidade angular do referencial do corpo em relação ao referencial inercial, projetada no referencial do corpo. Essas componentes são fornecidas pelos giroscópios;

ω_{il}^l é a velocidade angular do referencial local em relação ao referencial inercial, projetada no referencial local. Essas componentes são obtidas a partir da resolução das equações de navegação, como será mostrado mais adiante, na apresentação do algoritmo de navegação (Passo 5.2 do item 3.3).

3.2.2. EQUAÇÃO DE ATUALIZAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS DO REFERENCIAL DO CORPO PARA O LOCAL (EQUAÇÃO DE ATITUDE)

Como a plataforma inercial adotada neste trabalho é do tipo solidária ou “strapdown”, os acelerômetros irão fornecer as componentes da força específica em relação ao referencial do corpo. Desta forma, faz-se mister a obtenção da Matriz de Transformação de Coordenadas do referencial do Corpo para o Local.

Inicialmente, será abordado o conceito de velocidade angular de um referencial em relação a outro.

Partir-se-á da equação (2.1), que apresenta a relação entre os vetores posição de um ponto P, em relação a dois sistemas de coordenadas, e que será reescrita abaixo.

$$\underline{r}^P = \underline{r} + C \cdot \underline{s}^P \quad (3.17)$$

onde:

\underline{r} é o vetor das coordenadas da origem do referencial $x'-y'-z'$ no referencial $x-y-z$;

\underline{s}^P é o vetor das coordenadas de P no referencial $x'-y'-z'$; e

C é a Matriz de Transformação de Coordenadas do referencial $x'-y'-z'$ para o referencial $x-y-z$.

Derivando em relação ao tempo a EQ. 3.17 tem-se:

$$\dot{\underline{r}}^P = \dot{\underline{r}} + \dot{C} \cdot \underline{s}^P \quad (3.18)$$

Como

$$\underline{s}^P = C^T \cdot \underline{s}^P \quad (3.19)$$

onde:

\underline{s}^P é o vetor das coordenadas de P no referencial $x-y-z$; e

C^T , que é igual a C^{-1} , é a Matriz de Transformação de Coordenadas do referencial x - y - z para o referencial x' - y' - z' .

substituindo-se a EQ. 3.19 na EQ. 3.19, tem-se:

$$\dot{\underline{r}}^P = \dot{\underline{r}} + \dot{C}.C^T.\underline{s}^P \quad (3.20)$$

Neste ponto, é útil derivar uma identidade que envolve a Matriz de Transformação de Coordenadas C . Derivando em relação ao tempo ambos os lados de $C.C^T = I$, tem-se:

$$\dot{C}.C^T + C.\dot{C}^T = 0 \quad (3.21)$$

Portanto:

$$(\dot{C}.C^T)^T = C.\dot{C}^T = -\dot{C}.C^T \quad (3.22)$$

Da EQ. 3.22, pode-se concluir que $\dot{C}.C^T$ é uma matriz anti-simétrica e, dessa forma, existe um vetor $\underline{\omega}$, chamado velocidade angular do referencial x' - y' - z' em relação ao referencial x - y - z , tal que:

$$(\underline{\omega} \times) = \dot{C}.C^T \quad (3.23)$$

onde $(\underline{\omega} \times)$ é o vetor $\underline{\omega}$ na forma de matriz anti-simétrica.

Pós-multiplicando a EQ. 3.23 por C tem-se:

$$(\underline{\omega} \times).C = \dot{C} \quad (3.24)$$

Passando-se à notação utilizada neste trabalho, pode-se reescrever a EQ. 3.24, considerando as componentes em relação ao referencial local, da seguinte forma:

$$\dot{C}_b^l = (\underline{\omega}_{lb}^l \times).C_b^l \quad (3.25)$$

onde:

\dot{C}_b^l é a derivada em relação ao tempo da matriz de rotação do referencial do corpo para o referencial local;

$(\underline{\omega}_{lb}^l \times)$ é matriz anti-simétrica correspondente ao vetor velocidade angular do referencial do corpo em relação ao referencial local com componentes expressas em relação ao referencial local $\underline{\omega}_{lb}^l$.

No entanto, como as medições dos giroscópios são em relação ao referencial do corpo, pode-se reescrever a EQ. 3.25, pré-multiplicando por $(C_b^l)^{-1}$, obtendo-se a seguinte expressão:

$$(C_b^l)^{-1}.\dot{C}_b^l = (C_b^l)^{-1}.\underline{\omega}_{lb}^l \times.C_b^l \quad (3.26)$$

Como $(C_b^l)^{-1} \cdot (\underline{\omega}_{lb}^l \times) \cdot C_b^l = (\underline{\omega}_{lb}^b \times)$, tem-se:

$$(C_b^l)^{-1} \cdot \dot{C}_b^l = (\underline{\omega}_{lb}^b \times) \quad (3.27)$$

Pré-multiplicando-se a EQ. 3.27 por C_b^l , tem-se:

$$\dot{C}_b^l = C_b^l \cdot (\underline{\omega}_{lb}^b \times) \quad (3.28)$$

A velocidade angular do referencial do corpo em relação ao referencial local é igual à velocidade angular do referencial do corpo em relação ao referencial inercial menos a velocidade angular do referencial local em relação ao referencial inercial. Em notação vetorial e considerando-se as componentes em relação ao referencial do corpo, pode-se escrever:

$$\underline{\omega}_{lb}^b = \underline{\omega}_{ib}^b - \underline{\omega}_{il}^b \quad (3.29)$$

A expressão também é verdadeira com os vetores tomados na forma de matrizes anti-simétricas, ou seja:

$$(\underline{\omega}_{lb}^b \times) = (\underline{\omega}_{ib}^b \times) - (\underline{\omega}_{il}^b \times) \quad (3.30)$$

Portanto, substituindo-se a EQ. 3.30 na EQ. 3.28, tem-se:

$$\dot{C}_b^l = C_b^l \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times) - C_b^l \cdot (\underline{\omega}_{il}^b \times) \quad (3.31)$$

Sabe-se que:

$$(\underline{\omega}_{il}^b \times) = (C_b^l)^{-1} \cdot (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l \quad (3.32)$$

Onde $(\underline{\omega}_{il}^l \times)$ é a forma anti-simétrica do vetor velocidade angular do referencial local em relação ao referencial inercial, projetada no referencial local. Como anteriormente mencionado, seu valor é obtido a partir das equações de navegação, como será visto mais adiante, quando da apresentação do algoritmo de navegação (Passo 5.2 do item 3.3).

Assim, substituindo-se a EQ. 3.32 em 3.31, tem-se:

$$\dot{C}_b^l = C_b^l \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times) - C_b^l \cdot (C_b^l)^{-1} \cdot (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l$$

Obtém-se, portanto:

$$\dot{C}_b^l = C_b^l \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times) - (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l \quad (3.33)$$

A EQ. 3.33 constitui-se, portanto, na equação de atualização no tempo da matriz de transformação de coordenadas do referencial do corpo para o local, também chamada equação de atitude.

3.2.3. MODELO DO FORMATO DA TERRA

A fim de gerar a posição de um corpo em relação à Terra, a partir das medidas fornecidas pelos sensores inerciais, isto é, giroscópios e acelerômetros, faz-se necessário definir um modelo para o formato da Terra.

Para navegação com um grau mais elevado de exatidão, o modelo esférico não se mostra suficientemente representativo.

Devido ao achatamento da Terra nos pólos, a Terra é geralmente modelada como um elipsóide, que se aproxima bastante da verdadeira geometria.

Vários modelos para este elipsóide que simula o formato da Terra foram propostos, sendo que o mais usual, e que foi adotado neste trabalho, o definido pelo World Geodetic System Committee, em 1984, o chamado WGS-84 system. A FIG. 3.6 representa, de forma esquemática, o elipsóide de referência para modelo do formato da Terra.

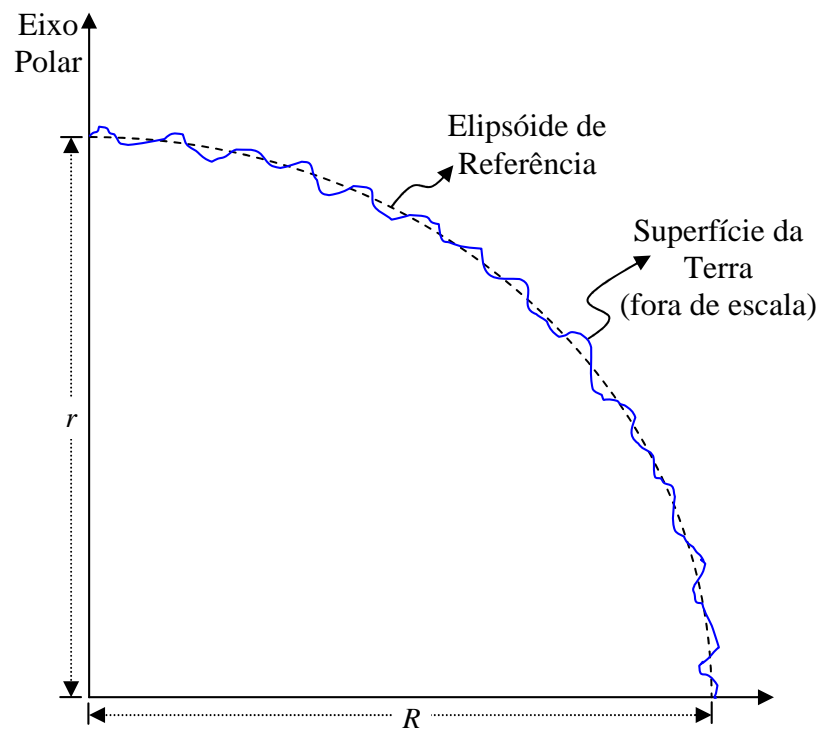


FIG. 3.5 – Elipsóide de Referência

De acordo com o referido modelo, os seguintes parâmetros são definidos:

- R ,	comprimento do semi-eixo maior:	6378137,0 m;
- $r = R.(1 - f)$,	comprimento do semi-eixo menor:	6356752,3142 m;
- $f = (R - r)/R$,	achatamento do elipsóide:	1/298,257223563;
- $e = [f.(2 - f)]^{1/2}$,	excentricidade maior do elipsóide:	0,0818191908426;
- Ω ,	velocidade de rotação da Terra:	7,292115 x 10 ⁻⁵ rad/s (15,041067°/hora).

Segundo o modelo da Terra de acordo com o elipsóide de referência do WGS-84, têm-se as seguintes expressões para o raio de curvatura meridiano (R_N) e para o raio de curvatura transversal (R_E):

$$R_N = \frac{R.(1 - e^2)}{[1 - e^2.\text{sen}^2(L)]^{3/2}} \quad (3.34)$$

$$R_E = \frac{R}{[1 - e^2.\text{sen}^2(L)]^{1/2}} \quad (3.35)$$

Usando-se os parâmetros acima, tem-se, para a velocidade angular do referencial local em relação ao referencial da Terra, a chamada “transporte rate”, com componentes em relação ao referencial local, a seguinte forma:

$$\underline{\omega}_{el}^l = \left\{ \begin{array}{c} \frac{v_E}{R_E + h} \\ \frac{-v_N}{R_N + h} \\ \frac{-v_E.\text{tan}(L)}{R_E + h} \end{array} \right\} \quad (3.36)$$

Para a variação no tempo da latitude e da longitude, as expressões são as que se seguem:

$$\dot{L} = \frac{v_N}{R_N + h} \quad (3.37)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v_E.\text{sec}(L)}{R_E + h} \quad (3.38)$$

3.2.4. MODELO DA ATRAÇÃO GRAVITACIONAL DA TERRA

Como os acelerômetros fornecem, conforme visto anteriormente, a força específica, para que se possa obter o valor da aceleração, é necessário conhecer-se o valor da magnitude do vetor gravidade, g . Assim, a exatidão do valor da aceleração depende, além de acelerômetros precisos, do valor de g usado.

A gravidade varia com a latitude, devido à aceleração centrífuga, e com a altura, devido à distância entre os centro de massas do corpo e da Terra.

Neste trabalho o vetor gravidade será considerado na direção da vertical local, ou seja perpendicular ao elipsóide de referência, o que, apesar de, em função da não homogeneidade da distribuição de massa da Terra e das diferenças entre a superfície da Terra a o elipsóide de referência, não corresponder com exatidão à realidade, fornece uma boa aproximação.

Vários modelos para a variação da gravidade com a latitude e com a altura têm sido propostos na literatura. O modelo é apresentado por TITTERTON e WESTON, em 1997:

$$g = \frac{9,780318.[1 + 5,3024 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}^2(L) - 5,9 \cdot 10^{-6} \cdot \text{sen}^2(2L)]}{\left(1 + \frac{h}{R_0}\right)^2} \quad (3.39)$$

onde:

$$R_0 = \sqrt{R_E \cdot R_N}$$

3.3. ALGORITMO DE NAVEGAÇÃO

Com vistas à implementação computacional, segue uma proposta de um algoritmo de navegação para um Sistema de Navegação Inercial do tipo solidário, com referencial local ou de navegação na configuração geográfica e orientação do tipo NED, e veículo no hemisfério Sul.

→ 1º Passo: Condições iniciais de posição e velocidade;

$$L, \lambda, h, v_N, v_E \text{ e } v_D$$

→ 2º Passo: Cálculo das condições iniciais de R_E e R_N , usando a EQ. 3.34 e a EQ. 3.35;

→ 3º Passo: Cálculo das componentes no referencial local da velocidade angular do referencial local em relação ao referencial da Terra, a “transport rate”, usando as expressões 3.36:

$$\underline{\omega}_{el}^l = \begin{Bmatrix} \frac{v_E}{R_E + h} \\ \frac{-v_N}{R_N + h} \\ \frac{-v_E \cdot \tan(L)}{R_N + h} \end{Bmatrix}$$

→ 4º Passo: Cálculo da Matriz de Rotação do Referencial do Corpo para o Local (C_b^l), usando a transposta da matriz da EQ. 2.14:

$$C_b^l = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta & \text{sen}\phi \text{sen}\theta \cos\psi - \text{sen}\psi \cos\phi & \text{sen}\psi \text{sen}\psi + \text{sen}\theta \cos\psi \cos\phi \\ \text{sen}\psi \cos\theta & \text{sen}\phi \text{sen}\theta \text{sen}\psi + \cos\psi \cos\phi & \cos\phi \text{sen}\theta \text{sen}\psi - \text{sen}\phi \cos\psi \\ -\text{sen}\theta & \text{sen}\phi \cos\theta & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix}$$

→ 5º Passo: “Loop”

(início do “Loop”)

→ Passo 5.1: Cálculo das velocidades angulares do referencial da Terra em relação ao referencial inercial e do referencial local em relação ao referencial da Terra, com componentes em relação ao referencial local, ou seja, $\underline{\omega}_{ie}^l$ e $\underline{\omega}_{el}^l$, respectivamente.

→ Passo 5.2: Cálculo da Matriz anti-simétrica correspondente ao vetor velocidade angular do referencial local em relação ao referencial inercial:

$$(\omega_{il}^l \times) = (\omega_{ie}^l \times) + (\omega_{el}^l \times)$$

→ Passo 5.3: Cálculo da gravidade, usando a EQ. 3.39 e expressão do vetor no referencial local:

$$g = \frac{9,780318 \cdot [1 + 5,3024 \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen}^2(L) - 5,9 \cdot 10^{-6} \cdot \text{sen}^2(2L)]}{\left(1 + \frac{h}{R_0}\right)^2} \text{ e } \underline{g} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{Bmatrix}$$

→ Passo 5.4: Leitura dos acelerômetros (no referencial do corpo):

$$\underline{f}^b = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}$$

→ Passo 5.5: Cálculo das componentes da força específica no referencial local:

$$\underline{f}^l = C_b^l \cdot \underline{f}^b$$

→ Passo 5.6: Integração da equação diferencial da velocidade, usando a EQ 3.12:

$$\dot{\underline{v}}_e = \underline{f} - (2\underline{\omega}_{il} + \underline{\omega}_{el}) \times \underline{v}_e + \underline{g}$$

→ Passo 5.7: Cálculo da altura:

$$h(t + \Delta t) = h(t) - \int^{t+\Delta t} v_N \cdot dt$$

→ Passo 5.8: Cálculo da Latitude, a partir da EQ. 3.37:

$$L(t + \Delta t) = L(t) + \int^{t+\Delta t} \frac{v_N}{R_N + h} \cdot dt$$

→ Passo 5.9: Cálculo da Longitude, a partir da EQ. 3.38:

$$\lambda(t + \Delta t) = \lambda(t) + \int^{t+\Delta t} \frac{v_E \cdot \sec(L)}{R_E + h} \cdot dt$$

→ Passo 5.10: Atualização das componentes da velocidade angular do referencial local em relação ao da Terra, a “transport rate”, usando as expressões 3.36;

$$\underline{\omega}_{el}^l = \left\{ \begin{array}{c} \frac{v_E}{R_E + h} \\ -\frac{v_N}{R_N + h} \\ -\frac{v_E \cdot \tan(L)}{R_N + h} \end{array} \right\}$$

→ Passo 5.11: Leitura dos Giroscópios (no referencial do corpo):

$$\underline{\omega}_{ib}^b = \left\{ \begin{array}{c} (\underline{\omega}_{ib}^b)_x \\ (\underline{\omega}_{ib}^b)_y \\ (\underline{\omega}_{ib}^b)_z \end{array} \right\}$$

→ Passo 5.12: Integração da equação diferencial de atualização no tempo de C_b^l , isto é, da EQ. 3.33:

$$C_b^l(t + \Delta t) = C_b^l(t) + \int^{t+\Delta t} [C_b^l \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times) - (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l] \cdot dt$$

→ Passo 5.13: Ortogonalização da Matriz C_b^l , usando o seguinte procedimento:

$$C_b^l = \{I + 0,5 \cdot [I - C_b^l \cdot (C_b^l)^T]\} C_b^l$$

(Fim do “Loop”).

Nas integrações dos passos 5.6 e 5.12 foi usado o método Preditor-Corretor, conforme DIEGUEZ, em 1992, que será apresentado sucintamente na seqüência.

Seja a Equação Diferencial Ordinária $y' = f^*(x, y) = \frac{dy}{dx}$, onde $y = f(x)$. A rotina para a integração de y' , a cada variação Δx da variável independente x , pelo Método Preditor-Corretor, usando Runge-Kutta de 4ª ordem é a seguinte:

$$F0 = f^*(x, y)$$

Para I de 1 até N

$$K1 = \Delta x \cdot f^*(x, y)$$

$$K2 = \Delta x \cdot f^*(x + (\Delta x)/2, y + (K1)/2)$$

$$K3 = \Delta x \cdot f^*(x + (\Delta x)/2, y + (K2)/2)$$

$$K4 = \Delta x \cdot f^*(x + \Delta x, y + K3)$$

$$y = y + (K1 + 2 \cdot (K2 + K3) + K4) / 6$$

$$x = x + \Delta x$$

$$F(I) = f^*(x, y)$$

Se $I=1$, então $F1 = F(1)$

Se $I=2$, então $F2 = F(2)$

Se $I=3$, então $F3 = F(3)$

Se $I > 3$, então:

$$yP = y + \Delta x \cdot [55 \cdot F3 - 59 \cdot F2 + 37 \cdot F1 - 9 \cdot F0] / 24 \quad \rightarrow (\text{Preditor})$$

$$FP = f^*(x, yP)$$

$$y = y + \Delta x \cdot [9 \cdot FP + 19 \cdot F3 - 5 \cdot F2 + F1] / 24 \quad \rightarrow (\text{Corretor})$$

$$F0 = F1; F1 = F2; F2 = F3; F3 = f^*(x, y)$$

Fim (Para)

3.4. VALIDAÇÃO DO ALGORITMO DE NAVEGAÇÃO

3.4.1. TRAJETÓRIA PROPOSTA

A trajetória proposta é a seguinte:

Conforme a FIG. 3.7, o veículo parte da cidade do Rio de Janeiro, do nível do mar, ou seja:

Latitude: 22,83° Sul;

Longitude: 43,18° Oeste;

Altura: 0 m.

O veículo parte com velocidade inicial nula e, durante 1 s, é submetido a uma aceleração de 100 m/s^2 . Em seguida, numa primeira etapa, se desloca em direção ao Norte verdadeiro, com aceleração constante de 60 m/s^2 , durante 4 s. Numa segunda etapa, desloca-se, ainda em direção ao Norte Verdadeiro, com velocidade constante durante 4 s. Em seguida, na terceira etapa, sofre uma inclinação em “pitch”, sempre com uma velocidade constante, de forma que, após 6 s, o veículo tenha descrito um arco de $\pi/3 \text{ rad}$ (60°), com um raio de 1948,06 m. Segue-se a quarta etapa, na qual o veículo prossegue com essa inclinação por mais 4 s, com velocidade constante. Em seguida, na quinta etapa, o veículo sofre uma inclinação, de forma a que o ângulo “pitch” retorne a zero, novamente descrevendo um arco de $\pi/3 \text{ rad}$ (60°), com um raio de 1948,06 m, desta feita no sentido contrário. Seguem-se mais 4 s com velocidade constante. É a sexta etapa. Na sétima etapa, o veículo sofre uma inclinação em “heading”, descrevendo um arco de $2 \pi \text{ rad}$ (360°), também com um raio de 1948,06 m, voltando, em seguida, o veículo a alinhar-se novamente com o norte. A partir daí, o veículo permanece com velocidade constante até completar 100 s de navegação.

Esta trajetória foi escolhida não baseada em alguma que seja característica de algum veículo específico, mas tendo em vista a sua representatividade em termos de manobras por parte do corpo móvel.

Outro fator determinante para esta escolha foi o fato de, a menos de uma altura inicial de 2000 m ao invés de 0 m, a mesma ter sido utilizada numa das simulações levadas a efeito por IORIO, em 1995, de sorte que os resultados puderam ser comparados.

A trajetória proposta é ilustrada na FIG. 3.6.

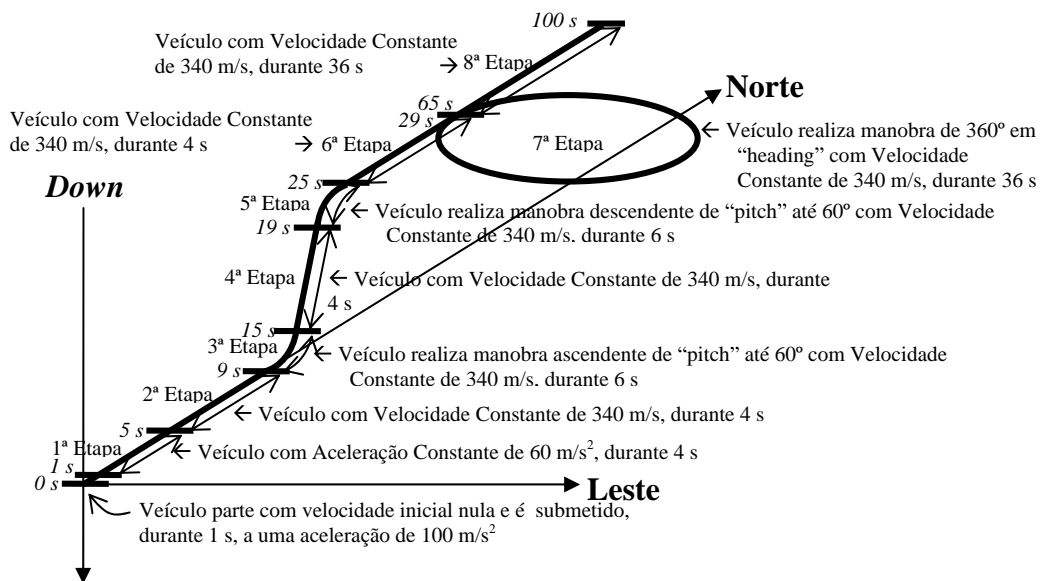
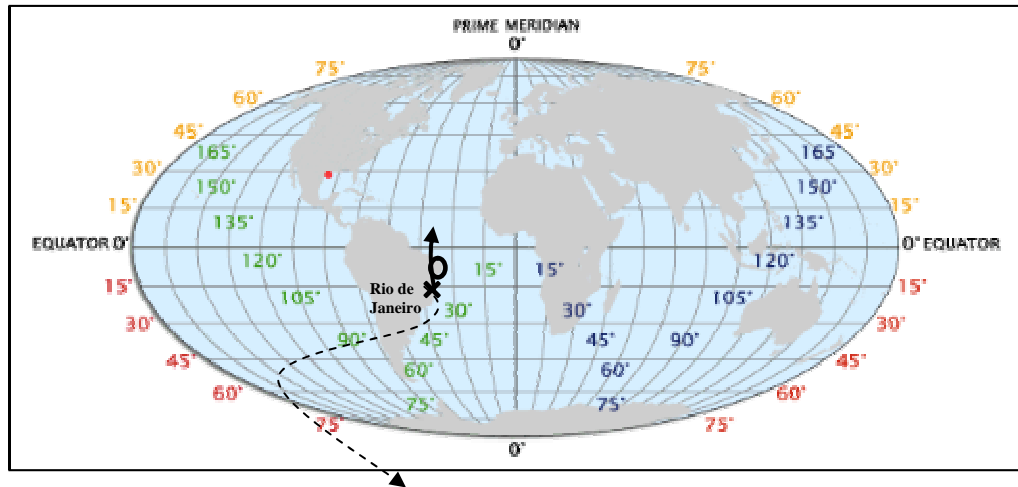


FIG. 3.6– Representação esquemática da trajetória do veículo

3.4.2. SIMULAÇÃO DAS MEDIDAS DOS ACELERÔMETROS

A simulação das medidas dos acelerômetros seguem o apresentado por IORIO, em 1995.

Far-se-á, nas EQ. 3.16, as componentes da força específica anularem os demais termos de suas respectivas equações, quando a velocidade for constante. Nos períodos em que houver alguma componente de aceleração, a força específica correspondente deverá tanto anular as demais componentes como também fornecer a aceleração necessária. Na terceira etapa, em que o veículo realiza uma manobra ascendente, de forma a que seu ângulo “pitch” chegue a 60° ($\pi/3$ rad), submete-se o veículo a uma aceleração centrípeta tal que, em 6 segundos, faça o veículo

descrever um arco de 60° , o que implica na subtração algébrica das componentes desta aceleração nas expressões das forças específicas Norte e *down*, conforme descrito na FIG. 3.7.

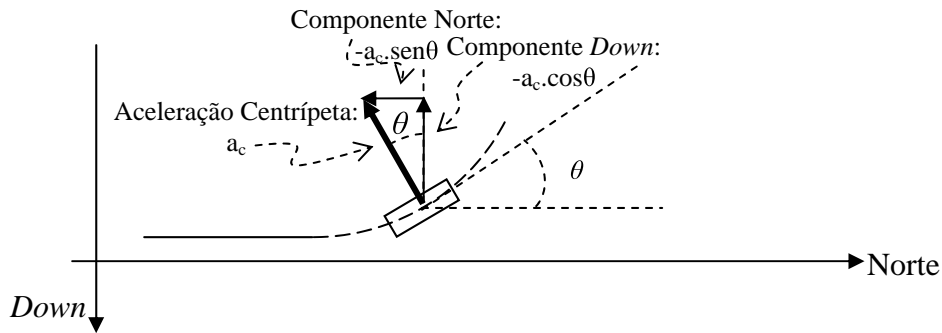


FIG. 3.7– Representação esquemática da aceleração centrípeta na manobra ascendente da terceira etapa

Raciocínio análogo é empregado nas manobras das quinta e sétima etapas.

Desta forma:

No primeiro segundo da trajetória, quando o veículo é submetido a uma aceleração de 100 m/s^2 , tem-se:

$$f_N = -2 \cdot \Omega \cdot \text{sen}(L) \cdot v_E + \frac{\tan(L)}{Rn+h} \cdot v_E^2 - \frac{1}{Rn+h} \cdot v_N \cdot v_D + 100$$

$$f_E = 2 \cdot \Omega \cdot \text{sen}(L) \cdot v_N - 2 \cdot \Omega \cdot \text{cos}(L) \cdot v_D - \frac{1}{Re+h} \cdot v_E \cdot v_D - \frac{\tan(L)}{Rn+h} \cdot v_N \cdot v_E$$

$$f_D = 2 \cdot \Omega \cdot \text{cos}(L) \cdot v_E + \frac{1}{Rn+h} \cdot v_N^2 + \frac{1}{Re+h} \cdot v_E^2 - g$$

Para a primeira etapa da trajetória, na qual o veículo tem aceleração constante de 60 m/s^2 , durante 4 s, tem-se:

$$f_N = -2 \cdot \Omega \cdot \text{sen}(L) \cdot v_E + \frac{\tan(L)}{Rn+h} \cdot v_E^2 - \frac{1}{Rn+h} \cdot v_N \cdot v_D + 60$$

$$f_E = 2 \cdot \Omega \cdot \text{sen}(L) \cdot v_N - 2 \cdot \Omega \cdot \text{cos}(L) \cdot v_D - \frac{1}{Re+h} \cdot v_E \cdot v_D - \frac{\tan(L)}{Rn+h} \cdot v_N \cdot v_E$$

$$f_D = 2 \cdot \Omega \cdot \text{cos}(L) \cdot v_E + \frac{1}{Rn+h} \cdot v_N^2 + \frac{1}{Re+h} \cdot v_E^2 - g$$

Para a segunda etapa da trajetória, na qual o veículo tem velocidade constante, durante 4 s, tem-se:

$$f_N = -2.\Omega.\text{sen}(L).v_E + \frac{\tan(L)}{Rn+h}.v_E^2 - \frac{1}{Rn+h}.v_N.v_D$$

$$f_E = 2.\Omega.\text{sen}(L).v_N - 2.\Omega.\text{cos}(L).v_D - \frac{1}{Re+h}.v_E.v_D - \frac{\tan(L)}{Rn+h}.v_N.v_E$$

$$f_D = 2.\Omega.\text{cos}(L).v_E + \frac{1}{Rn+h}.v_N^2 + \frac{1}{Re+h}.v_E^2 - g$$

Para a terceira etapa da trajetória, na qual o veículo realiza uma manobra ascendente até o ângulo de “pitch” de 60° ($\pi/3$), durante 6 s, tem-se:

$$f_N = -2.\Omega.\text{sen}(L).v_E + \frac{\tan(L)}{Rn+h}.v_E^2 - \frac{1}{Rn+h}.v_N.v_D - \frac{v_{res1}^2}{R_1}.\text{sen}\theta_1$$

$$f_E = 2.\Omega.\text{sen}(L).v_N - 2.\Omega.\text{cos}(L).v_D - \frac{1}{Re+h}.v_E.v_D - \frac{\tan(L)}{Rn+h}.v_N.v_E$$

$$f_D = 2.\Omega.\text{cos}(L).v_E + \frac{1}{Rn+h}.v_N^2 + \frac{1}{Re+h}.v_E^2 - g - \frac{v_{res1}^2}{R_1}.\text{cos}\theta_1$$

onde:

$$v_{res1} = \sqrt{v_N^2 + v_D^2}$$

$$\theta_1 = \frac{v_{res1}}{R_1}.t$$

Para um $t_{max} = 6$ s e um $\theta_{max} = \pi/3$, tem-se:

$$R_1 = \frac{340}{\pi/3}.6 = 1948,06m$$

Para a quarta etapa da trajetória, na qual o veículo tem velocidade constante, durante 4 s, tem-se:

$$f_N = -2.\Omega.\text{sen}(L).v_E + \frac{\tan(L)}{Rn+h}.v_E^2 - \frac{1}{Rn+h}.v_N.v_D$$

$$f_E = 2.\Omega.\text{sen}(L).v_N - 2.\Omega.\text{cos}(L).v_D - \frac{1}{Re+h}.v_E.v_D - \frac{\tan(L)}{Rn+h}.v_N.v_E$$

$$f_D = 2.\Omega.\text{cos}(L).v_E + \frac{1}{Rn+h}.v_N^2 + \frac{1}{Re+h}.v_E^2 - g$$

Para a quinta etapa da trajetória, na qual o veículo realiza uma manobra descendente, na qual o ângulo de “pitch” passa de 60° ($\pi/3$) a 0°, em 6 s, tem-se:

$$f_N = -2.\Omega.\text{sen}(L).v_E + \frac{\tan(L)}{Rn+h}.v_E^2 - \frac{1}{Rn+h}.v_N.v_D + \frac{v_{res2}^2}{R_2}.\text{sen}\theta_2$$

$$f_E = 2.\Omega.\text{sen}(L).v_N - 2.\Omega.\text{cos}(L).v_D - \frac{1}{Re+h}.v_E.v_D - \frac{\tan(L)}{Rn+h}.v_N.v_E$$

$$f_D = 2.\Omega.\text{cos}(L).v_E + \frac{1}{Rn+h}.v_N^2 + \frac{1}{Re+h}.v_E^2 - g + \frac{v_{res2}^2}{R_2}.\text{cos}\theta_2$$

onde:

$$v_{res2} = \sqrt{v_N^2 + v_D^2}$$

$$\theta_2 = \frac{v_{res1}}{R_1}.t$$

Para um $t_{max} = 6$ s e um $\theta_{max} = \pi/3$, tem-se:

$$R_2 = \frac{340}{\pi/3}.6 = 1948,06m$$

Para a sexta etapa da trajetória, na qual o veículo tem velocidade constante, durante 4 s, tem-se:

$$f_N = -2.\Omega.\text{sen}(L).v_E + \frac{\tan(L)}{Rn+h}.v_E^2 - \frac{1}{Rn+h}.v_N.v_D$$

$$f_E = 2.\Omega.\text{sen}(L).v_N - 2.\Omega.\text{cos}(L).v_D - \frac{1}{Re+h}.v_E.v_D - \frac{\tan(L)}{Rn+h}.v_N.v_E$$

$$f_D = 2.\Omega.\text{cos}(L).v_E + \frac{1}{Rn+h}.v_N^2 + \frac{1}{Re+h}.v_E^2 - g$$

Para a sétima etapa da trajetória, na qual o veículo realiza uma manobra circular, de forma a que o ângulo “heading” vai de 0° a 360° (2π), em 36 s, tem-se:

$$f_N = -2.\Omega.\text{sen}(L).v_E + \frac{\tan(L)}{Rn+h}.v_E^2 - \frac{1}{Rn+h}.v_N.v_D - \frac{v_{res3}^2}{R_3}.\text{sen}\theta_3$$

$$f_E = 2.\Omega.\text{sen}(L).v_N - 2.\Omega.\text{cos}(L).v_D - \frac{1}{Re+h}.v_E.v_D - \frac{\tan(L)}{Rn+h}.v_N.v_E + \frac{v_{res3}^2}{R_3}.\text{cos}\theta_3$$

$$f_D = 2.\Omega.\text{cos}(L).v_E + \frac{1}{Rn+h}.v_N^2 + \frac{1}{Re+h}.v_E^2 - g$$

onde:

$$v_{res3} = \sqrt{v_N^2 + v_D^2}$$

$$\theta_3 = \frac{v_{res3}}{R_3} \cdot t$$

Para um $t_{max} = 36$ s e um $\theta_{max} = 2\pi$, tem-se:

$$R_3 = \frac{340}{2\pi} \cdot 36 = 1948,06m$$

Para a oitava etapa da trajetória, na qual o veículo tem velocidade constante, durante 36 s, tem-se:

$$f_N = -2 \cdot \Omega \cdot \text{sen}(L) \cdot v_E + \frac{\tan(L)}{Rn+h} \cdot v_E^2 - \frac{1}{Rn+h} \cdot v_N \cdot v_D$$

$$f_E = 2 \cdot \Omega \cdot \text{sen}(L) \cdot v_N - 2 \cdot \Omega \cdot \text{cos}(L) \cdot v_D - \frac{1}{Re+h} \cdot v_E \cdot v_D - \frac{\tan(L)}{Rn+h} \cdot v_N \cdot v_E$$

$$f_D = 2 \cdot \Omega \cdot \text{cos}(L) \cdot v_E + \frac{1}{Rn+h} \cdot v_N^2 + \frac{1}{Re+h} \cdot v_E^2 - g$$

A simulação dos sinais de tais sensores é obtida multiplicando o vetor força específica no Referencial Local pela Matriz de Rotação do Referencial Local para o Referencial do Corpo (C_l^b), ou seja:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = C_l^b \begin{Bmatrix} f_N \\ f_E \\ f_D \end{Bmatrix}$$

3.4.3. SIMULAÇÃO DAS MEDIDAS DOS GIROSCÓPIOS

A simulação das medidas dos giroscópios seguem o apresentado por IORIO, em 1995.

Tem-se que:

$$\underline{\omega}_{ib}^l = \underline{\omega}_{ie}^l + \underline{\omega}_{el}^l + \underline{\omega}_{lb}^l$$

No cálculo da velocidade angular do Corpo em relação ao Referencial Inercial (ω_{ib}^l), que é a grandeza que é medida pelos giroscópios, durante grande parte do percurso, o corpo não sofre mudança de orientação, ou seja, a velocidade angular do referencial do corpo em relação ao local (ω_{lb}^l) é nula, e, portanto, ω_{ib}^l é obtida pelas somas das velocidades angulares do Referencial

Local em relação ao Referencial da Terra, (ω_{el}^l), e do Referencial da Terra para o Inercial, (ω_{ie}^l). As expressões da mesma se encontram na EQ. 3.15. Apenas nas manobras que implicam em movimentos do corpo em relação ao Referencial Local, ou seja, no movimento ascendente de até o ângulo de “pitch” (θ) de 60° , no movimento descendente, com o mesmo ângulo variando de 60° a 0° e no movimento em “heading” (ψ) de 360° , a velocidade angular do corpo em relação ao Referencial Local (ω_{ib}^l) é diferente de zero. Em tais casos a mesma pode ser facilmente obtida, uma vez que, em cada um dos referidos movimentos, só ocorre uma rotação simples em um dos eixos. Assim, basta fazer-se a componente de ω_{ib}^l correspondente ao eixo sobre o qual ocorre a rotação igual à velocidade do veículo dividida pelo raio da manobra.

Assim:

Para as primeira, segunda, quarta, sexta e oitava etapas da trajetória, nas quais o Referencial do Corpo permanece alinhado com o Referencial Local, tem-se:

$$\underline{\omega}_{ib}^l = \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ \Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\underline{\omega}_{el}^l)_N \\ (\underline{\omega}_{el}^l)_E \\ (\underline{\omega}_{el}^l)_D \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ \Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{v_E}{R_e + h} \\ -v_N \\ \frac{R_n + h}{-v_E \cdot \tan \varphi} \\ \frac{R_n + h}{R_n + h} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para a terceira etapa da trajetória, na qual o veículo realiza uma manobra ascendente até o ângulo de “pitch” de 60° ($\pi/3$), durante 6 s, tem-se:

$$\underline{\omega}_{ib}^l = \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ \Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\underline{\omega}_{el}^l)_N \\ (\underline{\omega}_{el}^l)_E \\ (\underline{\omega}_{el}^l)_D \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ v_{res1} \\ R_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ \Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{v_E}{R_e + h} \\ -v_N \\ \frac{R_n + h}{-v_E \cdot \tan(L)} \\ \frac{R_n + h}{R_n + h} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ v_{res1} \\ R_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde:

$$v_{res1} = \sqrt{v_N^2 + v_D^2} \text{ e } R_1 = 1948,06 \text{ m}$$

Para a quinta etapa da trajetória, na qual o veículo realiza uma manobra descendente, na qual o ângulo de “pitch” passa de 60° ($\pi/3$) a 0° , em 6 s, tem-se:

$$\underline{\omega}_{ib}^l = \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ \Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\underline{\omega}_{el}^l)_N \\ (\underline{\omega}_{el}^l)_E \\ (\underline{\omega}_{el}^l)_D \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{v_{res2}}{R_2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ \Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{v_E}{Rn+h} \\ -\frac{v_N}{Rn+h} \\ \frac{Rn+h}{-v_E \cdot \tan(L)} \\ \frac{Rn+h}{Rn+h} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{v_{res2}}{R_2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde:

$$v_{res2} = \sqrt{v_N^2 + v_D^2} \text{ e } R_2 = 1948,06m$$

Para a sétima etapa da trajetória, na qual o veículo realiza uma manobra circular, de forma a que o ângulo “heading” vai de 0° a 360° (2π), em 36 s, tem-se:

$$\underline{\omega}_{ib}^l = \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ \Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\underline{\omega}_{el}^l)_N \\ (\underline{\omega}_{el}^l)_E \\ (\underline{\omega}_{el}^l)_D \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v_{res3}}{R_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ \Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{v_E}{Rn+h} \\ -\frac{v_N}{Rn+h} \\ \frac{Rn+h}{-v_E \cdot \tan(L)} \\ \frac{Rn+h}{Rn+h} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v_{res3}}{R_3} \end{Bmatrix}$$

onde:

$$v_{res3} = \sqrt{v_N^2 + v_D^2} \text{ e } R_3 = 1948,06m$$

3.4.4. RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

Os resultados da simulação estão apresentados da FIG. 3.9 à FIG. 3.21.

Nas FIG. 3.9, 3.11 e 3.13, tem-se em vermelho, com marcadores em formato de circunferência, a trajetória calculada através da integração das equações de navegação. Os mesmos parâmetros de posição também foram calculados de forma analítica, a cada iteração, tomando-se por base as seguintes equações da cinemática:

$$v = v_0 + a.t \text{ e } s = s_0 + v_0.t + \frac{1}{2}.a.t^2,$$

onde:

a é a aceleração no período de uma iteração;

v_0 é a velocidade no início da iteração e v , ao final;

s_0 é a posição no início da iteração e s , ao final;

t é o intervalo de tempo correspondente a uma iteração, ou seja, 0,01 s.

Os parâmetros calculados desta última maneira foram representados nos gráficos das referidas figuras na cor verde, com marcadores na forma de triângulos.

Pode-se perceber, mormente através das FIG. 3.10, 3.12 e 3.14, que apresentam os erros, baseados nas diferenças de valores entre os parâmetros calculados das duas maneiras e que as diferenças dos valores são devidas aos erros na integração e, sobretudo ao fato de as leituras dos sensores, sendo discretas no tempo, numa frequência de 100 Hz, não traduzirem o aspecto contínuo da evolução das forças específicas e das velocidades angulares.

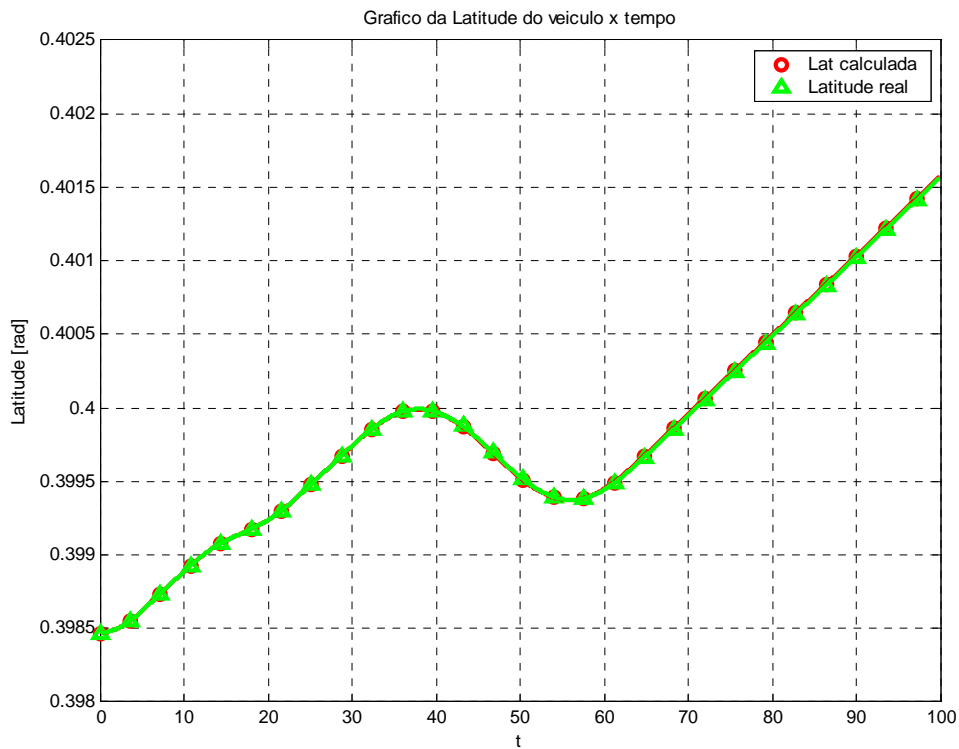
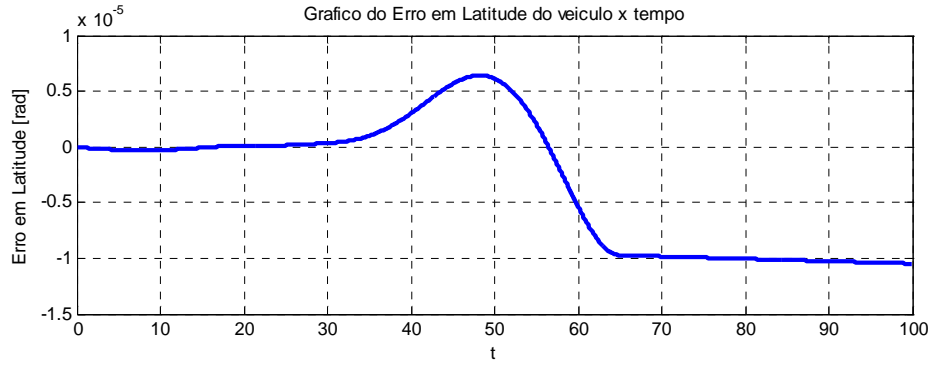


FIG. 3.9 – Latitude x tempo



Grandezas estatísticas do Erro em LATITUDE:

Valor Medio..... :	-3.1577e-006
Desvio Padrao..... :	5.8078e-006
Valor de Pico a Pico.. :	1.6904e-005

FIG. 3.10 – Erros em Latitude

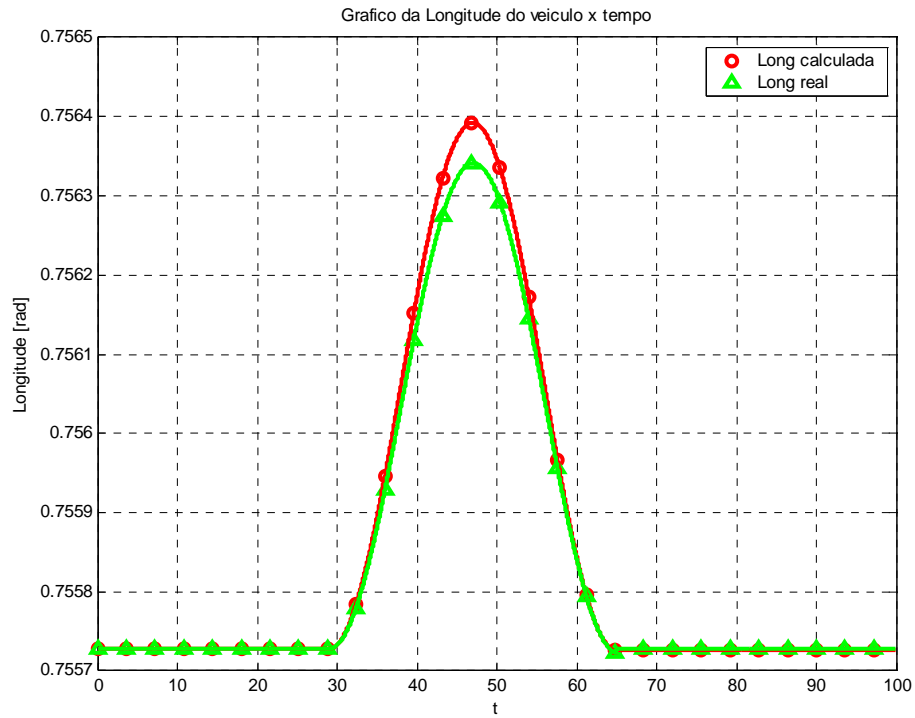
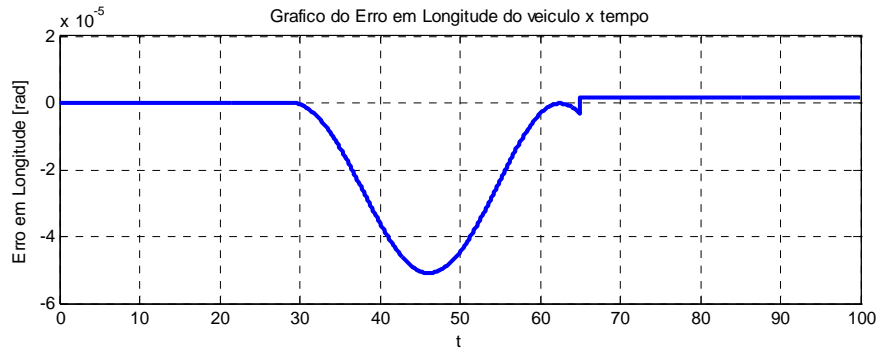


FIG. 3.11 – Longitude x tempo



Grandezas estatísticas do Erro em LONGITUDE:

Valor Medio..... :	-7.9998e-006
Desvio Padrao..... :	1.6247e-005
Valor de Pico a Pico.. :	5.2599e-005

FIG. 3.12 – Erros em Longitude

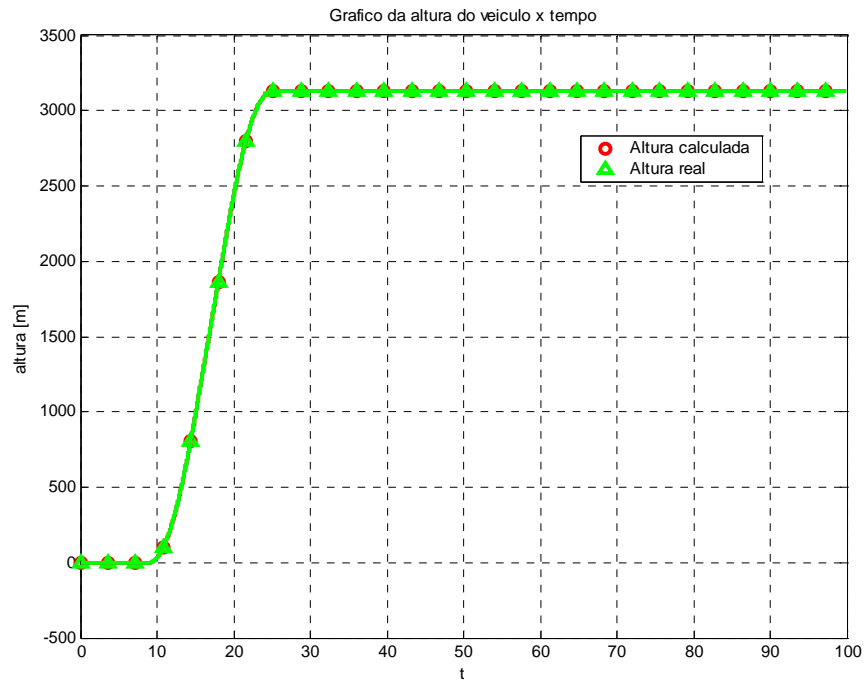
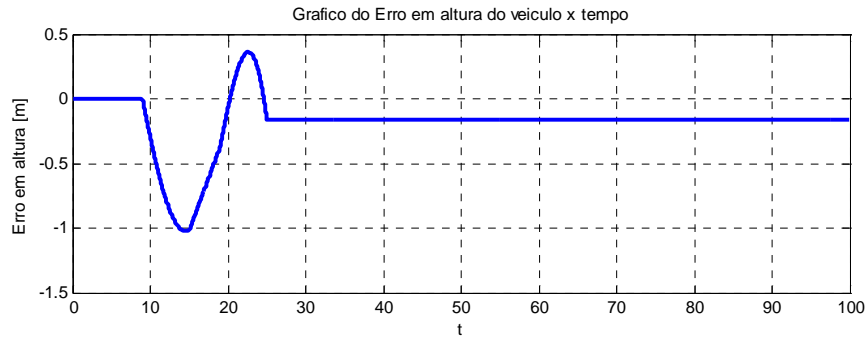


FIG. 3.13 – Altura x tempo



Grandezas estatísticas do Erro em ALTURA:

Valor Medio..... :	0.17938
Desvio Padrao..... :	0.21196
Valor de Pico a Pico.. :	1.3861

FIG. 3.14 – Erros em Altura

A FIG. 3.15 apresenta um gráfico da longitude em função da latitude, onde fica evidenciada a manobra correspondente à mudança do ângulo “heading” em 360°.

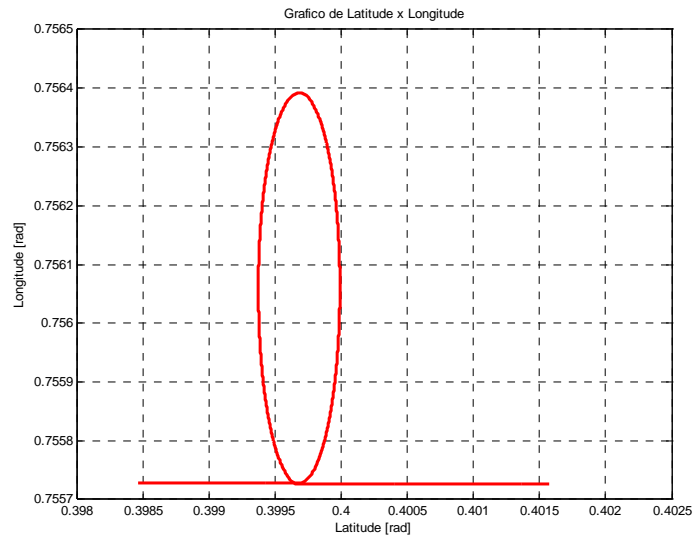


FIG. 3.15 – Longitude x Latitude

O ângulo “roll” não sofre alteração durante a trajetória, permanecendo sempre igual a zero, no entanto, a FIG 3.16 mostra uma pequena variação do seu valor, durante o período

correspondente à manobra em “heading”. Esta variação decorre, como foi explanado anteriormente, sobretudo do fato de as leituras dos sensores serem discretas no tempo.

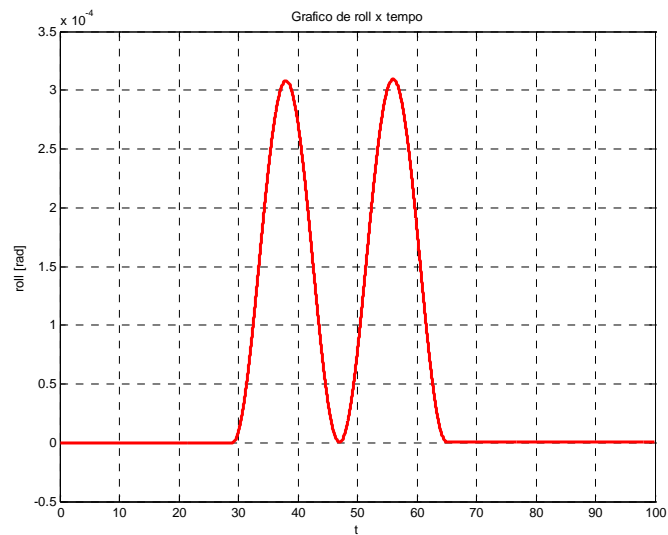


FIG. 3.16 – Ângulo de “roll” x tempo

Na FIG. 3.17, pode-se verificar as manobras ascendente e descendente do veículo, correspondentes às alterações do ângulo “pitch”, inicialmente de 0° a 60° (1,05 rad) e, depois, de 60° a 0° .

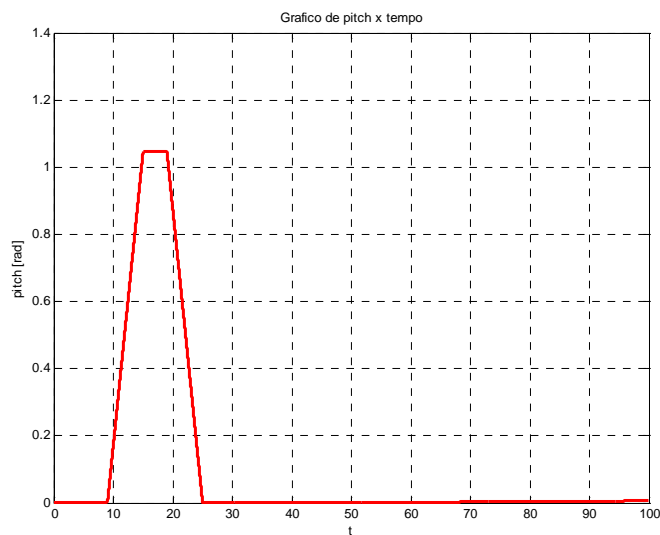


FIG. 3.17 – Ângulo “pitch” x tempo

A FIG. 3.18 apresenta o gráfico da evolução do ângulo “heading” com o tempo. A única manobra que implica na alteração do referido ângulo, correspondendo a uma variação de 0° a 360°, fica evidenciada na figura.

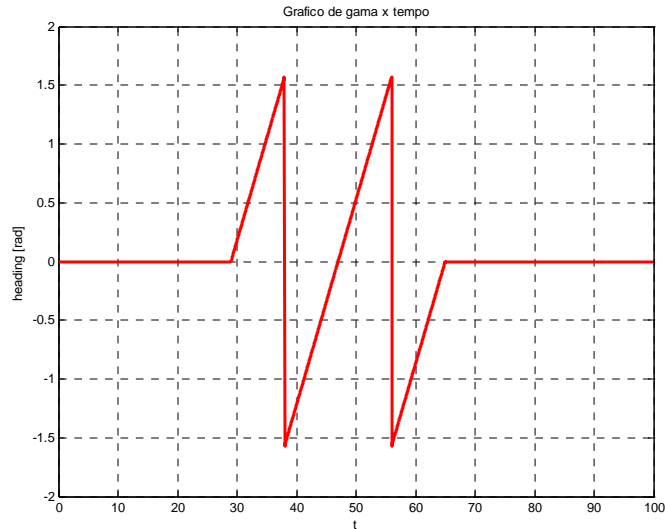


FIG. 3.18 – Ângulo “heading” x tempo

O valor máximo do módulo da velocidade é de 340 m/s pode ser facilmente obtido pelas equações da cinemática, lembrando que os únicos períodos em que o veículo é submetido a acelerações longitudinais são, inicialmente, por 1 s, a 100 m/s² e, logo em seguida, por 4 s, a 60 m/s². Portanto, empregando-se a equação $v = v_0 + a.t$, tem-se:

$$v = (0 + 100.1) + 60.4 = 340 \text{ m/s}$$

Na FIG. 3.19 pode-se observar o aumento da velocidade norte no início da trajetória até atingir o valor de 340 m/s; valor este que só é alterado nas manobras de variação de “pitch” e “heading”, uma vez que surgem, respectivamente, componentes verticais e leste da velocidade, como pode-se observar na FIG 3.20 e FIG. 3.21.

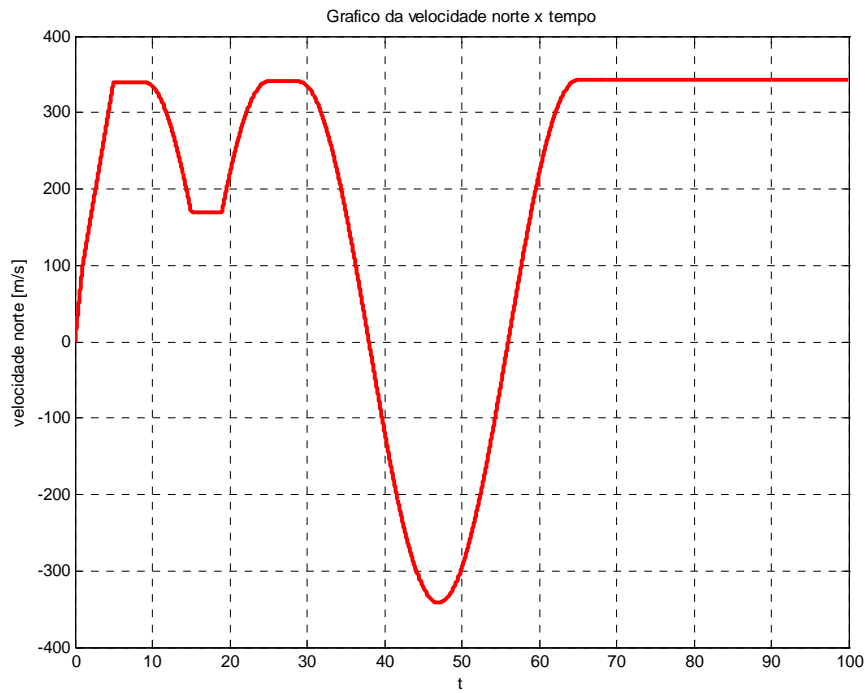


FIG. 3.19 – Velocidade Norte x tempo

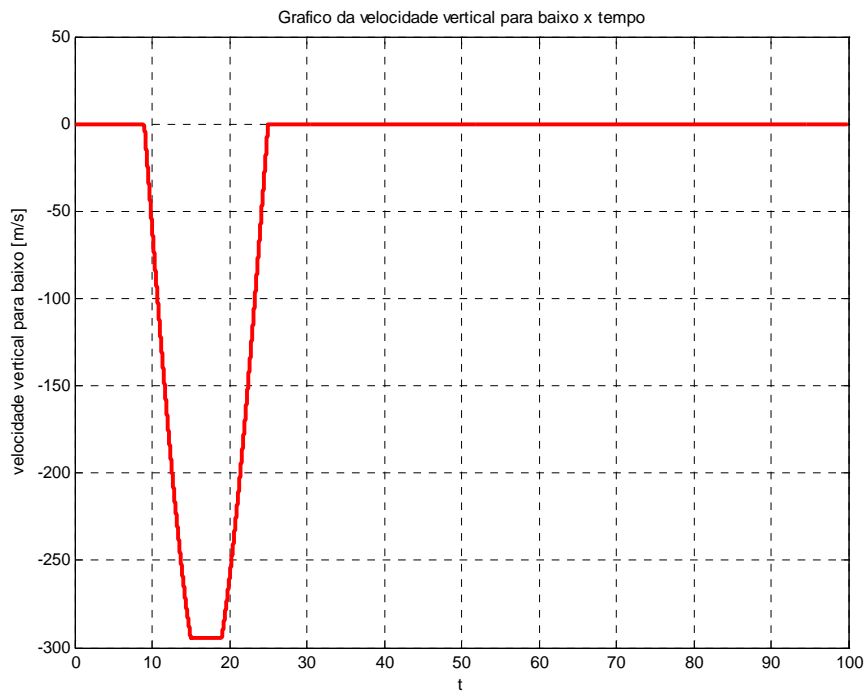


FIG. 3.20 – Velocidade Vertical para baixo x tempo

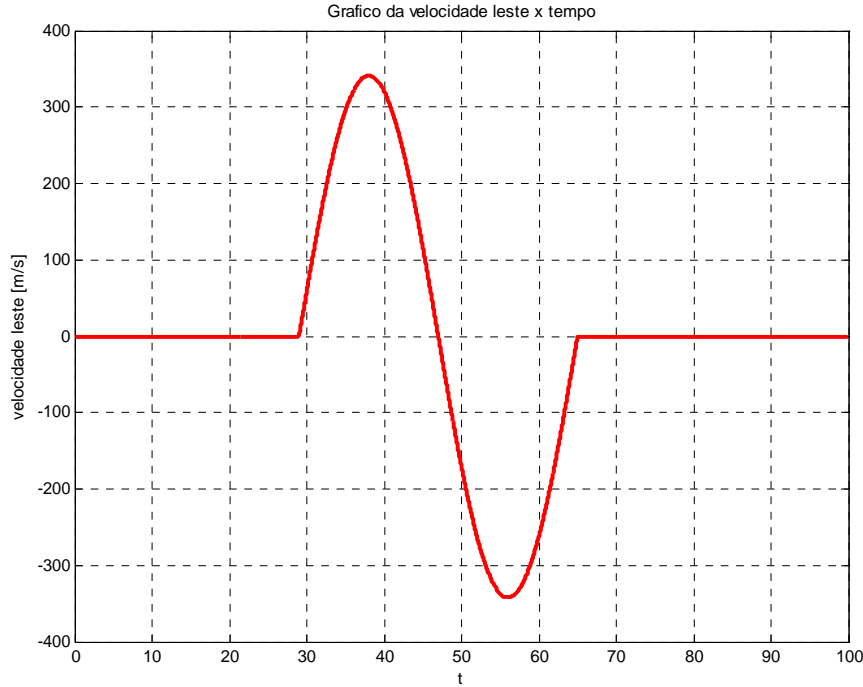


FIG. 3.21 – Velocidade Leste x tempo

Da comparação dos resultados em latitude, longitude e altura obtidos via integração das equações de navegação, que constitui o algoritmo de navegação propriamente dito, com os obtidos via equações da cinemática, pode-se perceber que o algoritmo está correto. O fato de os gráficos da evolução dos ângulos de *roll*, *pitch* e *heading*, bem como das velocidades norte, vertical para baixo e leste mostrarem resultados coerentes com os esperados ratificam esta conclusão. Os erros entre os valores esperados e os obtidos via algoritmo são creditados, como dito anteriormente, sobretudo ao fato de as leituras dos sensores serem discretas, numa frequência de 100 Hz, o que não traduz fielmente as evoluções das componentes tanto da força específica quanto da velocidade angular absoluta do corpo, que são contínuas.

4. TRATAMENTO DOS ERROS

4.1. TIPOS DE ERROS

Tanto os giroscópios quanto os acelerômetros possuem erros nas suas medidas. Esses erros são, principalmente, os seguintes:

- Sensibilidade: inclinação da reta de ajuste do fator de escala;
- Tendência (“bias”): erro sistemático em toda faixa de trabalho e que corresponde, quando o parâmetro a ser medido é nulo, a medição de um valor diferente de zero. Corresponde, portanto, a um desvio do zero da escala;
- Deriva (“drift”): refere-se à taxa na qual o erro de um sensor se acumula no tempo e corresponde a um afastamento angular da reta ou curva que define a progressão da grandeza medida no tempo;
- Histerese: tendência dos componentes do sensor em manter seu estado de perturbação, mesmo após o fim da excitação;
- Erros de acoplamento cruzado: sensibilidade a acelerações e rotações em direções normais ao eixo de sensibilidade.

Estes erros, de uma forma geral, possuem componentes determinísticas e aleatórias. As componentes determinísticas podem ser facilmente levantadas e corrigidas diretamente nas medidas dos sensores. As componentes aleatórias, no entanto, demandam o auxílio de medida fornecida por outro instrumento. De posse das duas medidas, procede-se uma estimação ótima, por processos como a filtragem de Kalman.

4.2. MODELAGEM DOS ERROS DOS SENSORES

4.2.1. MODELAGEM DOS ERROS DO GIROSCÓPIO

Considerando-se, inicialmente, o sensor sem erro, sendo x o seu eixo de entrada e z o de rotação e, tendo em vista, que o sinal de saída do mesmo é tensão elétrica, surge a necessidade de um fator de escala, a que chamaremos k_{gx} , expresso em unidade de velocidade angular sobre unidade de tensão elétrica, de forma a tornar verdadeira a equação que se segue:

$$\omega_x = k_{gx} \cdot v_{gx},$$

onde v_x é a tensão elétrica de saída do giroscópio e k_{gx} é o fator de escala.

Levando-se em consideração os erros, pode-se empregar a seguinte equação, apresentada por TITTERTON e WESTON, em 1997, para expressar a velocidade angular fornecida pelo giroscópio ($\hat{\omega}_x$):

$$\hat{\omega}_x = (1 + S_{gx}) \cdot \omega_x + M_y \cdot \omega_y + M_z \cdot \omega_z + B_f + B_{gx} \cdot f_x + B_{gz} \cdot f_z + B_{axz} \cdot f_x \cdot f_z + n_x \quad (4.1)$$

onde:

S_{gx} é o erro no fator de escala, que pode ser expresso como um polinômio em função de ω_x , de forma a representar as não linearidades

B_f é o bias principal, insensível à gravidade;

B_{gx} e B_{gz} são os bias secundários, sensíveis à gravidade;

B_{axz} é o bias anisotrópico;

M_y e M_z são os coeficientes de desalinhamento e

n_x é a componente aleatória do erro.

Os coeficientes S_{gx} , M_y , M_z , B_{gx} , B_{gz} e B_{axz} são, eminentemente, determinísticos e mensuráveis em laboratórios e, portanto, seus efeitos podem ser compensados. Componentes aleatórias podem ocorrer, dependendo do tipo de sensor utilizado, mas, por serem muito menores que as componentes determinísticas, não carecem de ser estimadas, a não ser quando se faz necessária uma exatidão muito grande nas medidas, como por exemplo, no caso de navegação não auxiliada por longos períodos. O coeficiente B_f , em contrapartida, possui uma componente aleatória importante, que se traduz no chamado “bias” dia a dia, ou “bias turn on-turn off”, correspondente a um desvio do zero, aleatório, que surge a cada vez que o sensor é ligado. Tem-se ainda o erro n_x , que é tratado como um ruído branco de média nula.

Neste trabalho, partiu-se do pressuposto de que as componentes determinísticas do erro podem ser levantadas em laboratório e de que as componentes aleatórias dos coeficientes, à exceção do bias dia a dia são inexistentes para o sensor utilizado ou, em existindo, podem ser desprezadas para o tipo de navegação pretendida. Desta forma, atentou-se apenas para o valor deste bias dia a dia, representado, neste trabalho, pela notação $bias_g$, procurando-se, através de filtragem, estimá-lo. Assim, a equação de compensação do sinal do giroscópio utilizada neste trabalho é a seguinte:

$$\hat{\omega}_x = \omega_x + bias_{gx} + n_x \quad (4.2)$$

Através da filtragem de Kalman, pode-se obter uma estimativa deste bias dia a dia e, então, compensá-lo.

4.2.2. MODELAGEM DOS ERROS DO ACELERÔMETRO

Da mesma forma que no giroscópio, no acelerômetro, o sinal de saída é também tensão elétrica. Através de um fator de escala k_{acx} , expresso em unidade de aceleração sobre unidade de tensão elétrica, torna-se verdadeira a equação que se segue:

$$f_x = k_{acx} \cdot v_{fx},$$

onde f_x é o valor da força específica sem erro; v_{fx} é a tensão elétrica de saída do giroscópio e k_{acx} é o fator de escala.

Levando-se em consideração os erros, pode-se empregar a seguinte equação, apresentada por TITTERTON e WESTON, em 1997, para expressar a força específica expressa pelo acelerômetro (\hat{f}_x):

$$\hat{f}_x = (1 + S_{acx})f_x + M_y \cdot f_y + M_z \cdot f_z + B_f + B_v \cdot f_x \cdot f_y + n_x \quad (4.3)$$

onde:

S_{acx} é o erro no fator de escala, que pode ser expresso como um polinômio em função de f_x , de forma a incluir os efeitos não lineares.

B_f é o bias principal;

B_v é o coeficiente vibro-pendular;

M_y e M_z são os coeficientes de co-relacionamentos cruzados e

n_x é a componente aleatória do erro.

Os coeficientes S_x , M_y e M_z são, como nos giroscópios, eminentemente determinísticos e mensuráveis em laboratórios e, portanto, seus efeitos podem ser compensados. Eventuais componentes aleatórias destes coeficientes, por serem pequenas, quando comparadas às componentes determinísticas dos mesmos, podem ser desprezadas, senão em casos em que uma extrema exatidão das leituras dos sensores é requerida, como no caso de navegação sem auxílio por longos períodos. O coeficiente vibro-pendular (B_v), para variações lentas na força específica, pode também ser compensado para uma extensa faixa de medida. Da mesma forma que para o

giroscópio, o bias principal possui uma componente aleatória que não pode ser desprezada. Trata-se de um bias constante no tempo, criado sempre que o sensor é ligado: o bias dia a dia do acelerômetro; representado neste trabalho pela notação $bias_{ac}$.

A componente aleatória do erro n_x , corresponde a um ruído branco de média nula.

Tendo em vista que o bias dia a dia se constitui na componente aleatória mais importante da equação de compensação, este trabalho considerou a seguinte equação de compensação do sinal do acelerômetro:

$$\hat{f}_x = f_x + bias_{acx} + n_x \quad (4.4)$$

Mais uma vez há que se recorrer a uma medida fornecida por outro instrumento e, subsequente, estimação ótima do sinal, de maneira a minimizar este erro. Através da filtragem de Kalman, empregada neste trabalho, obtém-se uma estimação para o bias dia a dia, $bias_{acx}$ que é, então, compensado.

4.3. EQUAÇÕES DE PROPAGAÇÃO DE ERROS

As equações de erros são apresentadas por TITTERTON e WESTON, em 1997, e são obtidas a partir da variação das equações correlatas na forma usual.

Inicialmente, para se obter a equação de propagação dos erros na orientação da plataforma, far-se-á algumas considerações preliminares.

Seja C a Matriz de Transformação de Coordenadas do referencial $o-x-y-z$ para o $o-x'-y'-z'$.

Como C é ortogonal, tem-se:

$$C.C^T = I \quad (4.5)$$

Fazendo-se a variação da EQ. 4.5, obtém-se o seguinte:

$$C.\delta C^T + \delta C.C^T = 0 \quad (4.6)$$

Portanto:

$$C.\delta C^T = -\delta C.C^T \quad (4.7)$$

Da EQ. 4.7 pode-se concluir que $\delta C.C^T$ é uma matriz anti-simétrica e pode ser representada da seguinte forma:

$$\delta C.C^T = \delta(\underline{\pi}' \times) \quad (4.8)$$

onde $\delta(\underline{\pi}' \times)$ é a forma anti-simétrica do vetor $\delta\underline{\pi}'$, que desempenha o papel de uma rotação, chamada rotação virtual do referencial $o-x-y-z$ para o $o-x'-y'-z'$, com as componentes neste último.

Portanto, tem-se:

$$\delta C = \delta(\underline{\pi}' \times) \cdot C \quad (4.9)$$

Designando o referencial $o-x-y-z$ como o referencial local e $o-x'-y'-z'$ como o do corpo, tem-se que a matriz C representa a matriz C_l^b e, portanto, $C_b^l = C^T$.

Mas, pré-multiplicando a EQ. 4.7 por C^T , chega-se a:

$$\delta C^T = -C^T \cdot \delta C \cdot C^T \quad (4.10)$$

No entanto, substituindo a EQ. 4.8 na EQ. 4.10, obtém-se:

$$\delta C^T = -C^T \cdot \delta(\underline{\pi}' \times) \quad (4.11)$$

De onde pode-se escrever o seguinte:

$$\delta C^T = -\delta(\underline{\pi} \times) \cdot C^T. \quad (4.12)$$

onde $\delta(\underline{\pi} \times)$ é a forma anti-simétrica do vetor $\delta\underline{\pi}$, que corresponde ao vetor $\delta\underline{\pi}'$ com as componentes no referencial $o-x-y-z$, que é o referencial de interesse. Assim, $\delta\underline{\pi}$ pode ser identificado como o vetor dos erros em atitude da plataforma, ou seja, os ângulos de desalinhamento, podendo-se, portanto escrever o seguinte:

$$\delta C_b^l = -\delta(\underline{\pi} \times) \cdot C_b^l \quad (4.13)$$

E:

$$\delta \underline{\pi} = \begin{Bmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Para se obter a equação de propagação dos erros de orientação, deve-se partir da equação de atualização no tempo da Matriz de Transformação de Coordenadas referencial do corpo para o local, EQ. 3.33, uma vez que a mesma depende dos parâmetros de atitude. A referida equação será reescrita a seguir:

$$\dot{C}_b^l = C_b^l \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times) - (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l \quad (4.15)$$

Fazendo a variação da equação acima, tem-se:

$$\delta \dot{C}_b^l = \delta C_b^l \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times) + C_b^l \cdot \delta(\underline{\omega}_{ib}^b \times) - \delta(\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l - (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot \delta C_b^l \quad (4.16)$$

Como $\delta\left(\frac{dA}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta A)$, ou seja, as operações de variação e diferenciação no tempo são

comutativas, pode-se escrever:

$$\frac{d}{dt}(\delta C_b^l) = \delta C_b^l \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times) + C_b^l \cdot \delta(\underline{\omega}_{ib}^b \times) - \delta(\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l - (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot \delta C_b^l \quad (4.17)$$

Substituindo-se a EQ. 4.13 na EQ. 4.17, tem-se:

$$\frac{d}{dt}[-(\delta \underline{\pi} \times) \cdot C_b^l] = [-(\delta \underline{\pi} \times) \cdot C_b^l] \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times) + C_b^l \cdot \delta(\underline{\omega}_{ib}^b \times) - \delta(\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l - (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot [-(\delta \underline{\pi} \times) \cdot C_b^l] \quad (4.18)$$

Resolvendo a derivada no tempo do lado esquerdo da expressão, tem-se:

$$-(\delta \dot{\underline{\pi}} \times) \cdot C_b^l - (\delta \underline{\pi} \times) \cdot \dot{C}_b^l = [-(\delta \underline{\pi} \times) \cdot C_b^l] \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times) + C_b^l \cdot \delta(\underline{\omega}_{ib}^b \times) - \delta(\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l - (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot [-(\delta \underline{\pi} \times) \cdot C_b^l] \quad (4.19)$$

Substituindo-se a EQ. 4.15 na EQ. 4.19, obtém-se o seguinte:

$$\begin{aligned} &-(\delta \dot{\underline{\pi}} \times) \cdot C_b^l - (\delta \underline{\pi} \times) \cdot [C_b^l \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times) - (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l] = \\ &\quad = [-(\underline{\pi} \times) \cdot C_b^l] \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times) + C_b^l \cdot \delta(\underline{\omega}_{ib}^b \times) - \delta(\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l - (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot [-(\delta \underline{\pi} \times) \cdot C_b^l] \\ &-(\delta \dot{\underline{\pi}} \times) \cdot C_b^l - \cancel{(\delta \underline{\pi} \times) \cdot C_b^l \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times)} + (\delta \underline{\pi} \times) \cdot (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l = \\ &\quad = -(\delta \underline{\pi} \times) \cdot C_b^l \cdot (\underline{\omega}_{ib}^b \times) + C_b^l \cdot \delta(\underline{\omega}_{ib}^b \times) - \delta(\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot C_b^l - (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot [-(\delta \underline{\pi} \times) \cdot C_b^l] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pós-multiplicando cada termo por $(C_b^l)^T$ e trocando o sinal de todos os termos, tem-se:

$$(\delta \dot{\underline{\pi}} \times) = (\delta \underline{\pi} \times) \cdot (\underline{\omega}_{il}^l \times) - (\underline{\omega}_{il}^l \times) \cdot (\delta \underline{\pi} \times) + \delta(\underline{\omega}_{il}^l \times) - C_b^l \cdot \delta(\underline{\omega}_{ib}^b \times) \cdot (C_b^l)^T \quad (4.21)$$

Em notação vetorial, pode-se escrever a EQ. 4.21 da seguinte forma:

$$\delta \dot{\underline{\pi}} = -\underline{\omega}_{il}^l \times \delta \underline{\pi} + \delta \underline{\omega}_{il}^l - C_b^l \times \delta \underline{\omega}_{ib}^b \quad (4.22)$$

A EQ. 4.22 é, portanto, a equação de propagação dos erros de orientação.

Para se obter a equação de propagação dos erros na velocidade, basta se calcular a variação da equação de atualização no tempo da velocidade, que é a EQ. 3.13:

$$\dot{\underline{v}}_e = C_b^l \cdot \vec{f}^b - (2\underline{\omega}_{ie} + \underline{\omega}_{el}) \times \underline{v}_e + \underline{g} \quad (4.23)$$

Calculando-se a variação, obtém-se:

$$\delta \dot{\underline{v}}_e = \delta C_b^l \cdot \vec{f}^b + C_b^l \cdot \delta \vec{f}^b - (2\delta \underline{\omega}_{ie} + \delta \underline{\omega}_{el}) \times \underline{v}_e + (2\underline{\omega}_{ie} + \underline{\omega}_{el}) \times \delta \underline{v}_e + \delta \underline{g} \quad (4.24)$$

Como $\delta C_b^l = -(\delta \underline{\pi}' \times) \cdot C_b^l$, pode-se escrever o seguinte:

$$\delta \dot{\underline{v}}_e = -(\delta \underline{\pi}' \times) \cdot C_b^l \cdot \vec{f}^b + C_b^l \cdot \delta \vec{f}^b - (2\delta \underline{\omega}_{ie} + \delta \underline{\omega}_{el}) \times \underline{v}_e + (2\underline{\omega}_{ie} + \underline{\omega}_{el}) \times \delta \underline{v}_e + \delta \underline{g} \quad (4.25)$$

Como $C_b^l \cdot \underline{f}^b = \underline{f}^l$ e $-(\delta \underline{\pi}' \times) \cdot \underline{f}^l = (\underline{f}^l \times) \cdot \delta \underline{\pi}'$, tem-se:

$$\delta \underline{\dot{v}}_e = (\underline{f}^l \times) \cdot \delta \underline{\pi}' + C_b^l \cdot \delta \underline{\tilde{f}}^b - (2\delta \underline{\omega}_{ie} + \delta \underline{\omega}_{el}) \times \underline{v}_e + (2\underline{\omega}_{ie} + \underline{\omega}_{el}) \times \delta \underline{v}_e + \delta \underline{g} \quad (4.26)$$

Desprezando-se os termos de Coriolis e considerando-se a gravidade conhecida, a EQ. 4.26 reduz-se a:

$$\delta \underline{\dot{v}}_e = (\underline{f}^l \times) \cdot \delta \underline{\pi}' + C_b^l \cdot \delta \underline{\tilde{f}}^b \quad (4.27)$$

Finalmente, a equação de propagação de erros em posição pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\delta \underline{\dot{p}} = \delta \underline{v}_e \quad (4.28)$$

A EQ. 4.22, a EQ. 4.27 e a EQ 4.28 constituem-se, respectivamente, nas equações de propagação dos erros de orientação, de velocidade e de posição e que podem ser implementadas na formulação do processo com vistas à filtragem de Kalman, de maneira a se poder estimar tais erros.

Como será visto mais adiante, no alinhamento fino levado a efeito neste trabalho (item 5.5), pelo fato se buscar estimar tão somente os erros de orientação, apenas a EQ. 4.22 fez parte da equação do processo (EQ. 5.21).

5. ALGORITMO DE ALINHAMENTO

5.1. DEFINIÇÃO

O Algoritmo de Alinhamento tem por finalidade, via de regra, gerar a orientação inicial; informação esta que é requerida pelo algoritmo de navegação e atitude, cuja incerteza é fortemente dependente da incerteza daquela informação.

Os erros na compensação dos bias dia a dia dos giroscópios e dos acelerômetros também são bastante críticos no algoritmo de navegação. Por esta razão, o algoritmo de alinhamento proposto neste trabalho inclui a estimação de tais valores, de forma a minimizar estes erros.

5.2. ALINHAMENTO

A determinação da orientação da plataforma em relação ao Norte verdadeiro denomina-se alinhamento.

5.3. NIVELAMENTO

O nivelamento consiste na determinação da orientação da plataforma em relação à vertical local.

O nivelamento será abordado em conjunto com o alinhamento, em duas etapas, o Alinhamento Grosseiro e o Alinhamento Fino, que serão detalhadas na seqüência.

5.4. ALINHAMENTO GROSSEIRO

O procedimento usado neste trabalho para o alinhamento grosseiro baseia-se na apresentação feita por TITTERTON e WESTON, em 1997.

O alinhamento grosseiro se constitui na primeira das duas etapas com vistas à determinação da orientação inicial da plataforma em relação ao referencial local. Nesta etapa, as leituras dos giroscópios e acelerômetros da plataforma são usadas como forma de se obter a orientação inicial.

O alinhamento abordado neste trabalho supõe que o corpo esteja estacionário em relação ao referencial da Terra. É o chamado “ground alignment” ou alinhamento estacionário.

Para a realização do alinhamento, é necessário o conhecimento, através de GPS ou algum outro meio, da latitude do corpo.

Uma vez que os vetores velocidade angular da Terra e gravidade são perfeitamente conhecidos tanto no que diz respeito às suas magnitudes quanto às suas direções, pode-se facilmente obter as componentes destes vetores no referencial local.

Inicialmente, tome-se o vetor gravidade, que é medido pelos acelerômetros e, como um exemplo simples, considere-se um acelerômetro dentro de um elevador.

A saída de um acelerômetro é um sinal elétrico que é proporcional não à aceleração do corpo, mas à força específica ($\underline{f} = \underline{F}/m$).

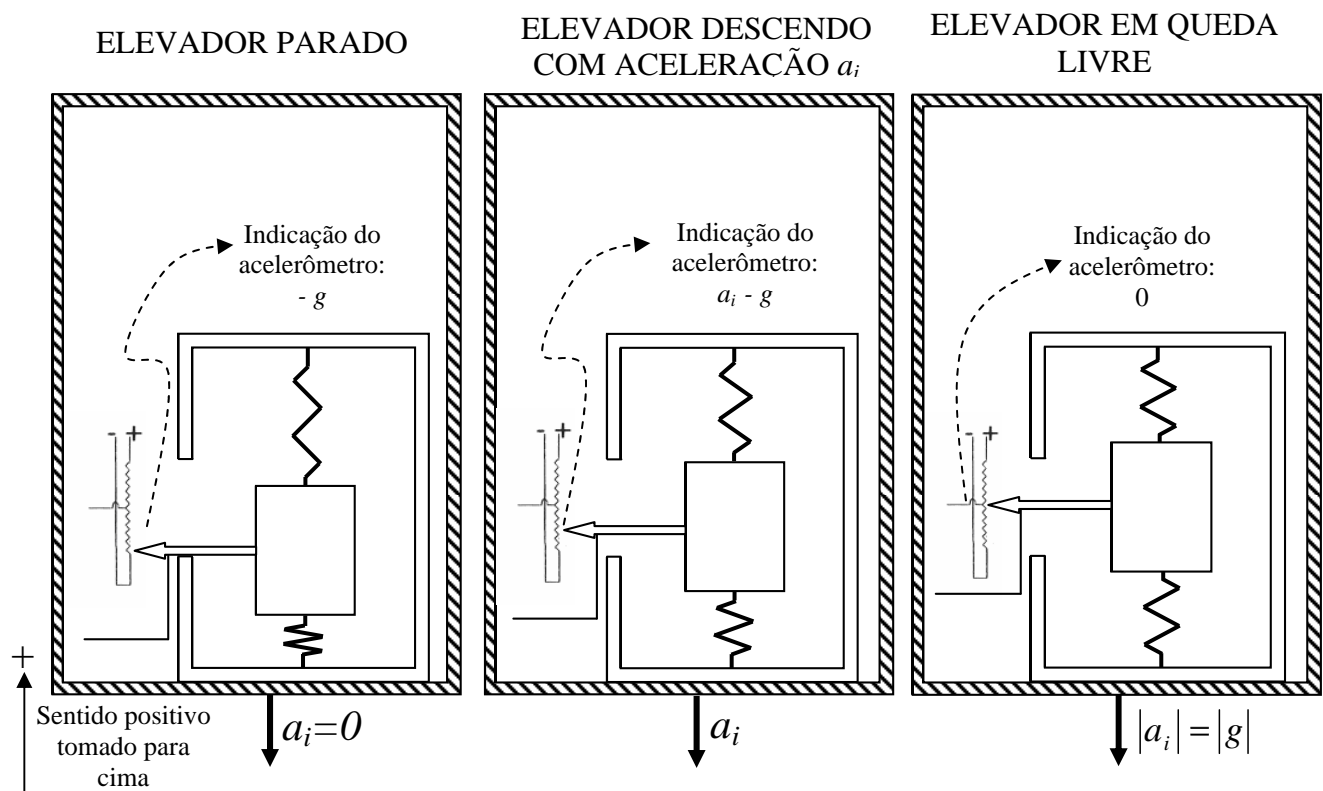


FIG. 5.1 – Indicação de acelerômetro colocado em elevador em três situações distintas

A FIG. 5.1 ilustra um acelerômetro num elevador, em 03 (três) situações distintas. Na primeira o elevador está parado, ou seja, sua aceleração em relação ao espaço inercial (a_i) é nula.

Como o vetor aceleração é igual à soma do vetor gravidade (\underline{g}) com o vetor força específica (\underline{f}), tem-se:

$$0 = \underline{f} + \underline{g} \Rightarrow \underline{f} = -\underline{g}$$

Dessa forma, conclui-se que, no caso do elevador parado, o acelerômetro, que mede a força específica, irá indicar $-\underline{g}$.

De forma análoga, é fácil entender que, no caso de o elevador estar descendo com aceleração igual à da gravidade, isto é, na situação de queda livre, o acelerômetro irá indicar 0 (zero) e, no caso de o elevador estar descendo com uma aceleração a_i , o acelerômetro indicará $a_i - g$.

Assim, como se pode observar, pela ilustração do elevador, a situação da plataforma no alinhamento, pelo fato de ela estar estacionária em relação ao referencial da Terra, é ilustrada pela primeira situação do elevador Terra e, assim, a força específica medida por ele é $-g$.

Adotando o Referencial Local com configuração geográfica e orientação NED, estando o Sistema de Navegação Inercial estacionário, o vetor força específica tem as seguintes componentes:

$$\underline{f}^l = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{Bmatrix}^l$$

Tome-se, agora, o outro vetor conhecido, o vetor velocidade angular da Terra em relação ao referencial inercial, $\underline{\Omega}$.

Como foi visto no item 2.3.4.2.1, EQ. 2.26 e EQ. 2.27, as componentes do vetor velocidade angular da Terra em relação ao referencial inercial, com configuração geográfica e orientação NED, que são as seguintes:

$$\underline{\omega}_{ie}^l = \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ -\Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix}, \text{ no hemisfério Norte e } \underline{\omega}_{ie}^l = \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ \Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix}, \text{ no hemisfério Sul.}$$

O vetor gravidade sensibiliza os acelerômetros, enquanto o vetor velocidade angular da Terra, os giroscópios. Entretanto, estes sensores, no caso da plataforma solidária ou “strapdown”, fornecem as componentes dos referidos vetores no referencial do corpo. Daí, a necessidade de se recorrer às seguintes equações:

$$\underline{f}^b = C_l^b \cdot \underline{f}^l \quad (5.1)$$

$$\underline{\omega}_{ie}^b = C_l^b \cdot \underline{\omega}_{ie}^l \quad (5.2)$$

onde:

\underline{f}^b é a força específica com componentes no Referencial do corpo;

\underline{f}^l é a força específica com componentes no Referencial Local;

$\underline{\omega}_{ie}^b$ é a velocidade angular do Referencial da Terra em relação do Referencial Inercial, com componentes no Referencial do corpo;

$\underline{\omega}_{ie}^l$ é a velocidade angular do Referencial da Terra em relação do Referencial Inercial, com componentes no Referencial Local; e

C_l^b é a Matriz de Transformação de Coordenadas do Referencial Local para o Referencial do Corpo.

Uma vez que se dispõe das leituras dos sensores, do valor da latitude e dos valores esperados para as componentes da força específica e da velocidade angular no referencial local, pode-se obter os elementos da Matriz de Transformação de Coordenadas C_l^b .

Como, no entanto, as leituras dos sensores possuem erros, pode-se falar em estimativas para as componentes da força específica e para a velocidade angular da Terra em relação ao referencial local e, portanto, na obtenção de uma estimativa de C_l^b . Usando a notação $\hat{\ }^b$ para representar as estimativas, pode-se reescrever a EQ. 5.1 e a EQ. 5.2 da seguinte forma:

$$\underline{\hat{f}}^b = \hat{C}_l^b \cdot \underline{f}^l \quad (5.3)$$

$$\underline{\hat{\omega}}_{ie}^b = \hat{C}_l^b \cdot \underline{\omega}_{ie}^l \quad (5.4)$$

Seja $C_l^l = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ a Matriz de Transformação de Coordenadas do Referencial do

Corpo para o Referencial Local. Evidentemente, tem-se que $C_l^b = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$ é a Matriz de

Transformação de Coordenadas do Referencial Local para o Referencial do Corpo.

Tomando, inicialmente a EQ. 5.3, pode-se escrever o seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_x \\ \hat{f}_y \\ \hat{f}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{21} & \hat{c}_{31} \\ \hat{c}_{12} & \hat{c}_{22} & \hat{c}_{32} \\ \hat{c}_{13} & \hat{c}_{23} & \hat{c}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{Bmatrix}$$

de onde, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{f}_x &= \hat{c}_{31} \cdot (-g) \Rightarrow \hat{c}_{31} = -\hat{f}_x / g \\ \hat{f}_y &= \hat{c}_{32} \cdot (-g) \Rightarrow \hat{c}_{32} = -\hat{f}_y / g \\ \hat{f}_z &= \hat{c}_{33} \cdot (-g) \Rightarrow \hat{c}_{33} = -\hat{f}_z / g \end{aligned} \quad (5.5)$$

Finalmente, tomando-se a EQ. 5.4, a mesma pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\omega}_x \\ \hat{\omega}_y \\ \hat{\omega}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{21} & \hat{c}_{31} \\ \hat{c}_{12} & \hat{c}_{22} & \hat{c}_{32} \\ \hat{c}_{13} & \hat{c}_{23} & \hat{c}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ \Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix}$$

de onde, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_x &= \hat{c}_{11} \cdot \Omega \cdot \cos(L) + \hat{c}_{31} \cdot \Omega \cdot \sin(L) \\ \hat{\omega}_y &= \hat{c}_{12} \cdot \Omega \cdot \cos(L) + \hat{c}_{32} \cdot \Omega \cdot \sin(L) \\ \hat{\omega}_z &= \hat{c}_{13} \cdot \Omega \cdot \cos(L) + \hat{c}_{33} \cdot \Omega \cdot \sin(L) \end{aligned}$$

E, portanto:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{11} &= \frac{\hat{\omega}_x}{\Omega \cdot \cos(L)} - \frac{\hat{c}_{31} \cdot \Omega \cdot \sin(L)}{\Omega \cdot \cos(L)} = \frac{\hat{\omega}_x}{\Omega \cdot \cos(L)} - \frac{\hat{f}_x}{g} \tan(L) \\ \hat{c}_{12} &= \frac{\hat{\omega}_y}{\Omega \cdot \cos(L)} - \frac{\hat{f}_y}{g} \tan(L) \\ \hat{c}_{13} &= \frac{\hat{\omega}_z}{\Omega \cdot \cos(L)} - \frac{\hat{f}_z}{g} \tan(L) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Resta ainda obter-se a segunda linha da Matriz de Transformação de Coordenadas, que será obtida pela condição de ortogonalidade.

Como foi visto no item 2.1.1, cada coluna da matriz C correspondem às componentes de vetores unitários ortogonais entre si. Assim, designando por \underline{C}_1 , \underline{C}_2 e \underline{C}_3 as primeira, segunda e

terceira linhas, respectivamente, da Matriz de Transformação de Coordenadas, pode-se entendê-las como três vetores unitários dispostos como na FIG. 5.2.

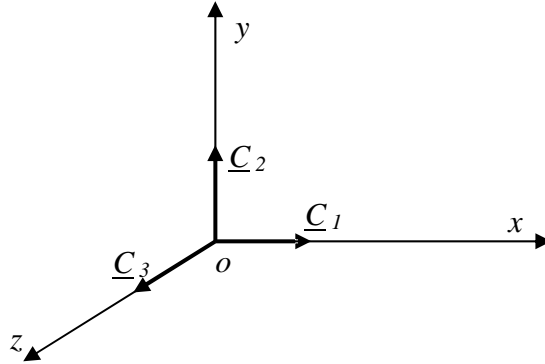


FIG. 5.2 – Representação das linhas da Matriz de Transformação de Coordenadas como vetores \underline{C}_1 , \underline{C}_2 e \underline{C}_3

Desta forma, em se tratando de vetores unitários, mutuamente ortogonais, os seguintes produtos vetoriais, pela regra da mão direita, se verificam:

$$\underline{C}_1 = \underline{C}_2 \times \underline{C}_3 \quad (5.11)$$

$$\underline{C}_2 = \underline{C}_3 \times \underline{C}_1 \quad (5.12)$$

$$\underline{C}_3 = \underline{C}_1 \times \underline{C}_2 \quad (5.13)$$

Conseqüentemente, através da EQ. 5.12, pode-se obter a segunda linha da Matriz de Transformação de Coordenadas a partir dos elementos das duas outras linhas:

$$\underline{C}_2 = \begin{Bmatrix} c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c_{33} & c_{32} \\ c_{33} & 0 & -c_{31} \\ -c_{32} & c_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{C}_2 = \begin{Bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -c_{12} \cdot c_{33} + c_{13} \cdot c_{32} \\ c_{11} \cdot c_{33} - c_{13} \cdot c_{31} \\ -c_{11} \cdot c_{32} + c_{12} \cdot c_{31} \end{Bmatrix}$$

de onde, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{21} &= -\hat{c}_{12} \cdot \hat{c}_{33} + \hat{c}_{13} \cdot \hat{c}_{32} \\ \hat{c}_{22} &= \hat{c}_{11} \cdot \hat{c}_{33} - \hat{c}_{13} \cdot \hat{c}_{31} \\ \hat{c}_{23} &= -\hat{c}_{11} \cdot \hat{c}_{32} + \hat{c}_{12} \cdot \hat{c}_{31} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como, conforme se pode verificar na FIG. 2.3, os ângulos de Euler são tomados a partir do referencial local, tem-se que a matriz expressa na EQ. 2.17 trata-se da Matriz de Transformação de Coordenadas do Referencial Local para o do Corpo. Uma vez que, necessita-se, no momento, de C_b^l , toma-se a transposta da matriz da EQ. 2.17, obtendo-se:

$$C_b^l = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi.\cos\theta & \text{sen}\phi.\text{sen}\theta.\cos\psi - \text{sen}\psi.\cos\phi & \text{sen}\psi.\text{sen}\phi + \text{sen}\theta.\cos\psi.\cos\phi \\ \text{sen}\psi.\cos\theta & \text{sen}\phi.\text{sen}\theta.\text{sen}\psi + \cos\psi.\cos\phi & \cos\phi.\text{sen}\theta.\text{sen}\psi - \text{sen}\phi.\cos\psi \\ -\text{sen}\theta & \text{sen}\phi.\cos\theta & \cos\phi.\cos\theta \end{bmatrix}$$

Desta forma, ao final do alinhamento grosseiro, conhece-se os elementos de C_b^l , ou antes, estimativas para os mesmos e, portanto, pode-se obter as estimativas para os ângulos de “roll”, ϕ , “pitch”, θ , e “heading”, ψ , que definem a orientação do corpo. Usando, mais uma vez $\hat{}$ para denotar estimativas, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{32} &= \text{sen}\hat{\phi}.\cos\hat{\theta} \\ \hat{c}_{33} &= \cos\hat{\phi}.\cos\hat{\theta} \end{aligned} \Rightarrow \frac{\hat{c}_{32}}{\hat{c}_{33}} = \frac{\text{sen}\hat{\phi}}{\cos\hat{\phi}} = \tan\hat{\phi} \Rightarrow \hat{\phi} = \tan^{-1} \left[\frac{\hat{c}_{32}}{\hat{c}_{33}} \right] \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_{11} &= \cos\hat{\psi}.\cos\hat{\theta} \\ \hat{c}_{21} &= \text{sen}\hat{\psi}.\cos\hat{\theta} \end{aligned} \Rightarrow \frac{\hat{c}_{21}}{\hat{c}_{11}} = \frac{\text{sen}\hat{\psi}}{\cos\hat{\psi}} = \tan\hat{\psi} \Rightarrow \hat{\psi} = \tan^{-1} \left[\frac{\hat{c}_{21}}{\hat{c}_{11}} \right] \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_{31} &= -\text{sen}\hat{\theta} \\ \hat{c}_{21} &= \text{sen}\hat{\psi}.\cos\hat{\theta} \end{aligned} \Rightarrow \frac{\hat{c}_{31}}{\hat{c}_{21}} = \frac{-\text{sen}\hat{\theta}}{\text{sen}\hat{\psi}.\cos\hat{\theta}} = -\frac{\tan\hat{\theta}}{\text{sen}\hat{\psi}} \Rightarrow \hat{\theta} = -\tan^{-1} \left[\frac{\hat{c}_{31}}{\hat{c}_{21}}.\text{sen}\hat{\psi} \right] \quad (5.17)$$

O algoritmo do alinhamento grosseiro, utilizado neste trabalho, é, pois, o seguinte:

→ 1º Passo: Leitura da Latitude, L , do valor da magnitude da rotação da Terra, Ω , e da magnitude da aceleração da gravidade, g ;

→ 2º Passo: “Loop”, no qual as leituras dos sensores foram tomadas 30 (trinta) vezes, de forma a se poder chegar a uma melhor estimativa da orientação inicial;

(início do “Loop”)

→ Passo 2.1: Leitura dos acelerômetros;

→ Passo 2.2: Leitura dos giroscópios;

→ Passo 2.3: Armazenamento na memória das leituras dos sensores;

(Fim do “Loop”)

→ 3º Passo: Cálculo das médias das leituras de cada sensor, ou seja:

$\hat{\omega}_x$ = média das leituras realizadas pelo giroscópio alinhado com o eixo x ;

$\hat{\omega}_y$ = média das leituras realizadas pelo giroscópio alinhado com o eixo y ;

$\hat{\omega}_z$ = média das leituras realizadas pelo giroscópio alinhado com o eixo z ;

\hat{f}_x = média das leituras realizadas pelo acelerômetro alinhado com o eixo x ;

\hat{f}_y = média das leituras realizadas pelo acelerômetro alinhado com o eixo y ;

\hat{f}_z = média das leituras realizadas pelo acelerômetro alinhado com o eixo z ;

→ 4º Passo: Cálculo das estimativas dos elementos de C_b^l :

$$\hat{c}_{11} = \frac{\hat{\omega}_x}{\Omega \cdot \cos(L)} - \frac{\hat{f}_x}{g} \tan(L)$$

$$\hat{c}_{12} = \frac{\hat{\omega}_y}{\Omega \cdot \cos(L)} - \frac{\hat{f}_y}{g} \tan(L)$$

$$\hat{c}_{13} = \frac{\hat{\omega}_z}{\Omega \cdot \cos(L)} - \frac{\hat{f}_z}{g} \tan(L)$$

$$\hat{c}_{31} = -\frac{\hat{f}_x}{g}$$

$$\hat{c}_{32} = -\frac{\hat{f}_y}{g}$$

$$\hat{c}_{33} = -\frac{\hat{f}_z}{g}$$

$$\hat{c}_{21} = -\hat{c}_{12} \cdot \hat{c}_{33} + \hat{c}_{13} \cdot \hat{c}_{32}$$

$$\hat{c}_{22} = \hat{c}_{11} \cdot \hat{c}_{33} - \hat{c}_{13} \cdot \hat{c}_{31}$$

$$\hat{c}_{23} = -\hat{c}_{11} \cdot \hat{c}_{32} + \hat{c}_{12} \cdot \hat{c}_{31}$$

→ 5º Passo: Obtenção das estimativas de C_b^l e de C_l^b :

$$\hat{C}_b^l = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{12} & \hat{c}_{13} \\ \hat{c}_{21} & \hat{c}_{22} & \hat{c}_{23} \\ \hat{c}_{31} & \hat{c}_{32} & \hat{c}_{33} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_b^l = \left(\hat{C}_b^l \right)^{-1}$$

→ 6º Passo: Obtenção das estimativas dos ângulos de Euler:

$$\hat{\phi} = \tan^{-1} \left[\frac{\hat{c}_{32}}{\hat{c}_{33}} \right]$$

$$\hat{\psi} = \tan^{-1} \left[\frac{\hat{c}_{21}}{\hat{c}_{11}} \right]$$

$$\hat{\theta} = -\tan^{-1} \left[\frac{\hat{c}_{31}}{\hat{c}_{21}} \cdot \text{sen } \hat{\psi} \right]$$

5.5. ALINHAMENTO FINO

Após se obter as estimativas dos ângulos de Euler, através do alinhamento grosseiro, procede-se o alinhamento fino, com a finalidade de se estimar os erros das mesmas, de forma a se poder compensá-los. Foi usado o auxílio de dois giroscópios medidores de deslocamento angular e um girocompasso que fornece o ângulo de “heading”, com o objetivo de se obter as referidas estimativas de erro ou desalinhamentos.

A filtragem de Kalman será utilizada na obtenção destes desalinhamentos.

No equacionamento do processo e das medidas, com vistas ao emprego da filtragem de Kalman, decidiu-se incluir como estados os bias dia a dia dos acelerômetros e dos giroscópios, de sorte que, em se obtendo êxito na estimativa destes parâmetros, se possa compensar este erro na leitura dos sensores.

Desta forma, o vetor de estados adotado neste trabalho tem a seguinte composição:

$$\underline{x} = \left\{ \begin{array}{l} \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \\ \text{bias}_{gx} \\ \text{bias}_{gy} \\ \text{bias}_{gz} \\ \text{bias}_{acx} \\ \text{bias}_{acy} \\ \text{bias}_{acz} \end{array} \right\}_{(9 \times 1)} = \left\{ \begin{array}{l} \delta\underline{\pi}_{(3 \times 1)} \\ \underline{\text{bias}}_{g(3 \times 1)} \\ \underline{\text{bias}}_{ac(3 \times 1)} \end{array} \right\},$$

onde:

$\delta\pi$ é o vetor dos desalinhamentos, ou dos erros de orientação, em função dos ângulos de Euler;

\underline{bias}_g é o vetor dos bias dia a dia dos giroscópios; e

\underline{bias}_{ac} é o vetor dos bias dia a dia dos acelerômetros;

A equação de propagação dos erros de orientação é a EQ. 4.22:

$$\delta\dot{\pi} = -\underline{\omega}_{il}^l \times \delta\pi + \delta\underline{\omega}_{il}^l - C_b^l \times \delta\underline{\omega}_{ib}^b$$

No entanto, como o alinhamento, neste trabalho, é realizado com a plataforma estacionária em relação ao referencial da Terra, pode-se considerar que a velocidade angular, em relação ao referencial inercial, do referencial local, $\underline{\omega}_{il}^l$, é igual à velocidade angular, em relação ao referencial inercial, do referencial da Terra, $\underline{\omega}_{ie}^l$, e que o erro naquela velocidade angular, $\delta\underline{\omega}_{il}^l$, é nulo. Portanto, a equação de propagação de erros, neste caso, pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\delta\dot{\pi} = -\underline{\omega}_{ie}^l \times \delta\pi - C_b^l \times \delta\underline{\omega}_{ib}^b \quad (5.18)$$

onde:

$\delta\underline{\omega}_{ib}^b$ representa os erros nas medidas realizadas pelos giroscópios, composto pelo bias dia a dia, \underline{bias}_g e ruídos brancos, \underline{w}_g .

Como os bias dia a dia dos acelerômetros e dos giroscópios são constantes durante o funcionamento dos sensores, as equações de atualização dos bias são as seguintes:

$$\dot{\underline{bias}}_g = 0 \quad (5.19)$$

$$\dot{\underline{bias}}_{ac} = 0 \quad (5.20)$$

Desta forma, unindo a EQ 5.18, a EQ 5.19 e a EQ. 5.20 e usando a representação matricial, o equacionamento da dinâmica do processo usado é o seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \delta\dot{\pi}_{(3x1)} \\ \dot{\underline{bias}}_g_{(3x1)} \\ \dot{\underline{bias}}_{ac}_{(3x1)} \end{Bmatrix}_{(9x1)} = \begin{bmatrix} -(\underline{\omega}_{ie}^l \times)_{(3x3)} & -C_b^l_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\pi_{(3x1)} \\ \underline{bias}_g_{(3x1)} \\ \underline{bias}_{ac}_{(3x1)} \end{Bmatrix}_{(9x1)} + \begin{bmatrix} 0_{(3x3)} & -C_b^l_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{w}_{ac}(t)_{(3x1)} \\ \underline{w}_g(t)_{(3x1)} \end{Bmatrix}_{(6x1)} \quad (5.21)$$

$(\underline{\omega}_{ie}^l \times)$ é o vetor velocidade angular da Terra em relação ao Referencial Inercial, com componentes no Referencial Local, ou de Navegação, na forma anti-simétrica. Ou seja:

$$-(\omega_{ie}^l \times) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_D & -\omega_E \\ -\omega_D & 0 & \omega_N \\ \omega_E & -\omega_N & 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } \omega_N = \Omega \cdot \cos(lat); \omega_E = 0; \omega_D = \Omega \cdot \sin(lat)$$

$C_{b(3 \times 3)}^l$ é a Matriz de Transformação de Coordenadas do Referencial do Corpo (b) para o local (l); e

$$\underline{w}_{ac}(t) = \begin{Bmatrix} w_{acx}(t) \\ w_{acy}(t) \\ w_{acz}(t) \end{Bmatrix} \text{ e } \underline{w}_g(t) = \begin{Bmatrix} w_{gx}(t) \\ w_{gy}(t) \\ w_{gz}(t) \end{Bmatrix} \text{ são os ruídos brancos associados aos acelerômetros e}$$

aos giroscópios, respectivamente.

Na formulação da equação de saída, usar-se-á como medidas, além dos valores de deslocamento angular em relação ao referencial local, fornecidos pelos 02 (dois) giroscópios e 1 (um) girocompasso, o fato de se conhecer os valores da força específica e velocidade angular e, portanto, dispor-se do valor esperado para as medidas dos acelerômetros e giroscópios.

Tome-se inicialmente as medidas fornecidas pelos auxílios que fornecem os ângulos de Euler do corpo (ϕ , θ , ψ). Estes auxílios são dois giroscópios medidores de deslocamento angular e um girocompasso que fornece o ângulo de “heading”, conforme a implementação de NEBOT, em 1997. Estes sensores, apesar de precisos, são inviáveis para utilização durante o movimento, devido à dinâmica de funcionamento lenta. Por isso, sua utilização se restringe ao alinhamento. O erro aleatório destes sensores pode ser modelado na forma de ruído branco, assim o vetor \underline{v}_{aux} representa os erros destes auxílios e a equação de saída correspondente aos auxílios tem a forma que se segue:

$$\underline{z}_{aux} = \begin{Bmatrix} \hat{\phi} - \phi_{aux} \\ \hat{\theta} - \theta_{aux} \\ \hat{\psi} - \psi_{aux} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \end{Bmatrix} + \underline{v}_{aux}(t) \quad (5.22)$$

Pode-se, a partir do fato de se conhecer as componentes, no referencial local, da velocidade angular da Terra em relação ao espaço inercial, tomando-se as leituras dos giroscópios como medidas, escrever a seguinte equação de saída:

$$\underline{z}_g = \hat{\omega}_{ib}^b - \hat{C}_l^b \cdot \omega_{ib}^l = \hat{\omega}_{ib}^b - \hat{C}_l^b \cdot \begin{Bmatrix} \Omega \cdot \cos(L) \\ 0 \\ \Omega \cdot \sin(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{bias}_g + \underline{v}_g(t) \quad (5.23)$$

A equação de saída 5.23 é baseada nas medidas realizadas pelos giroscópios de um valor perfeitamente conhecido. Desta forma, é de se esperar que os erros de medição sejam decorrentes, unicamente, dos bias dia a dia e ruídos brancos associados a estes sensores, como está expresso na equação acima.

Fica evidente que se está considerando, neste caso, o ruído de medição igual ao de processo, ou seja, $\underline{v}_g(t) = \underline{w}_g(t)$. Esta observação é importante na compreensão da formulação da filtragem de Kalman utilizada neste trabalho, qual seja, a formulação para ruídos de medida e de processo correlacionados.

Analogamente, pode-se escrever, para os acelerômetros, com base no conhecimento do vetor gravidade, a seguinte equação de saída:

$$\underline{z}_{ac} = \hat{\underline{f}}^b - C_l^b \cdot \underline{f}^l = \hat{\underline{f}}^b - C_l^b \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} bias_{acx} \\ bias_{acy} \\ bias_{acz} \end{Bmatrix} + \underline{v}_{ac}(t) \quad (5.24)$$

Aqui também tem-se que $\underline{v}_{ac}(t) = \underline{w}_{ac}(t)$.

Unindo a EQ. 5.22, a EQ. 5.23 e a EQ. 5.24, pode-se escrever o seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \underline{z}_{aux} \\ \underline{z}_g \\ \underline{z}_{ac} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{(3x3)} & 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & I_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} & I_{(3x3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \underline{\pi} \\ \underline{bias}_g \\ \underline{bias}_{ac} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{v}_{aux}(t) \\ \underline{v}_g(t) \\ \underline{v}_{ac}(t) \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

Resumindo e usando a representação clássica para as equações de modelagem do processo e de saída, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= F \cdot \underline{x} + G \cdot \underline{w} \\ \underline{y} &= H \cdot \underline{x} + N \cdot \underline{v} \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde:

$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} \delta \underline{\pi} \\ \underline{bias}_g \\ \underline{bias}_{ac} \end{Bmatrix}_{(9x1)} ; F = \begin{bmatrix} -(\omega_{ie}^l \times)_{(3x3)} & -C_{b(3x3)}^l & 0_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \end{bmatrix} ; G = \begin{bmatrix} 0_{(3x3)} & -C_{b(3x3)}^l \\ 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} I_{(3x3)} & 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & I_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} & I_{(3x3)} \end{bmatrix} ; N = \begin{bmatrix} I_{(3x3)} & 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & I_{(3x3)} & 0_{(3x3)} \\ 0_{(3x3)} & 0_{(3x3)} & I_{(3x3)} \end{bmatrix}$$

A formulação empregada na estimação dos estados \underline{x} foi a filtragem de Kalman com ruídos correlacionados, apresentada nas EQ. 10.74, EQ. 10.75 e EQ. 10.76, constantes do Apêndice 10.1 deste trabalho.

O algoritmo da filtragem de Kalman com vistas ao alinhamento fino é o seguinte:

→ 1º Passo: Leitura das condições iniciais do vetor de estados \underline{x} e da matriz de covariância do erro de estimação P. Leitura das matrizes de variância dos erros de medida (Q), de variância de erros de processo (R) e de correlação de erros (S), da matriz H, que é invariante no tempo, e das matrizes C_b^l e C_l^b iniciais;

→ 2º Passo: “Loop”, no qual as leituras dos sensores e dos auxílios por 150 segundos;

(início do “Loop”)

→ Passo 2.1: Leitura dos acelerômetros;

→ Passo 2.2: Leitura dos giroscópios;

→ Passo 2.3: Leitura dos auxílios;

→ Passo 2.4: Montagem das Matrizes F e G, que, por serem variantes no tempo, têm que estar inseridas no “Loop”;

→ Passo 2.5: Discretização do sistema. No caso, apenas a matriz F necessita ser modificada. A expressão utilizada é a seguinte:

$$F_k = I_{(9 \times 9)} + F \cdot \Delta t ,$$

onde:

F_k é a correspondente no caso discreto à matriz F;

Δt é o período de amostragem, que, neste trabalho corresponde a 0,01 s, uma vez que os sensores realizam suas leituras numa frequência de 100 Hz.

→ Passo 2.6: Montagem da equação de saída;

→ Passo 2.7: Cálculo das estimativas dos estados, através da Filtragem de Kalman. Foi usada a formulação para o caso de ruídos correlacionados;

→ Passo 2.8: De posse das estimativas dos desalinhamentos, correção dos valores dos ângulos de Euler;

→ Passo 2.9: Atualização das matrizes C_b^l e C_l^b , com os novos ângulos ψ , θ e φ ;

(Fim do “Loop”)

6. SIMULAÇÕES

6.1. OBJETIVOS DAS SIMULAÇÕES

A informação de posição e orientação do corpo produzida por um sistema de navegação inercial é gerada com erros. Estes erros, que devem ser minimizados de forma a tornar aquela informação tão exata quanto possível, têm origem tanto no erro dos valores medidos pelos sensores (giroscópios e acelerômetros), como também nos erros dos valores de posição e orientação iniciais da plataforma. Uma vez que os valores correspondentes à orientação inicial do corpo são gerados, via de regra, pela própria plataforma, as simulações levadas a efeito neste trabalho objetivaram, primeiramente, verificar o efeito, na navegação, dos erros nos valores da orientação inicial, primeiramente, quando estes valores são obtidos apenas pelo procedimento de alinhamento grosseiro e, em seguida, quando, além deste procedimento, realiza-se o alinhamento fino.

Por ocasião do alinhamento fino, que se trata de uma filtragem de Kalman com ruídos de medida e do modelo correlacionados, foram gerados, além dos valores de orientação inicial do corpo, a estimação dos bias dia a dia para cada um dos sensores. Durante a simulação da navegação, foi também verificado o efeito da utilização destes valores na correção da leitura dos sensores.

6.2. PARÂMETROS USADOS NAS SIMULAÇÕES

Supondo-se que os parâmetros determinísticos das equações de correção das leituras dos sensores, EQ. 4.1 e EQ. 4.3, foram perfeitamente levantados, e que as componentes aleatórias dos coeficientes das equações de compensação dos sensores, à exceção do bias dia a dia, não existem, ou, se existem, podem ser desprezadas para o tipo de navegação pretendida, este trabalho se ateve apenas aos parâmetros que geram entradas aleatórias nas equações, quais sejam: os bias dia a dia dos acelerômetros e dos giroscópios e o ruído branco destes sensores. Foram usados os seguintes valores para estes parâmetros:

- acelerômetros:

bias dia a dia com média nula e desvio padrão de 1.10^{-3} .g;

ruído branco com média nula e desvio padrão de $1.10^{-3}g$, onde g é a aceleração da gravidade, cujo valor é função da altura, conforme a equação (3.2.4.1).

- giroscópios:

bias dia a dia com média nula e desvio padrão de 1.10^{-1} grau/hora;

ruído branco com média nula e desvio padrão de 1.10^{-1} grau/hora.

- auxílios (medidores de deslocamento angular, usados durante o alinhamento fino, conforme relatado no item 4.5:

ruído branco com média nula e desvio padrão de 1.10^{-1} grau.

As leituras dos sensores são realizadas a uma frequência de 100 Hz.

Estes valores correspondem aos de sensores reais, disponíveis, com os quais se pretende trabalhar numa eventual implementação real deste trabalho de simulação.

6.3. DESCRIÇÃO

As simulações realizadas constam, de uma forma geral, de um algoritmo de alinhamento que fornece as estimativas dos valores de orientação da plataforma e dos bias dos acelerômetros e giroscópios a um algoritmo de navegação.

No algoritmo de alinhamento, foram usadas 30 (trinta) medidas dos sensores no levantamento da orientação da plataforma, no procedimento de alinhamento grosseiro. O valor 30 (trinta) foi utilizado de forma a se minimizar o erro decorrente do ruído branco. O erro decorrente do bias dia a dia não poderia ser compensado apenas pelo cálculo da média das leituras, por possuir um valor constante. Desta forma, não havia sentido em se realizar um número muito grande de medidas. O número de 30 (trinta) leituras foi, assim, escolhido e mostrou-se satisfatório. No alinhamento fino, as medidas dos sensores e dos auxílios foram tomadas por um período de 150 segundos, à medida em que os estados, quais sejam, os desalinhamentos e os bias dos sensores, eram estimados. O valor de 150 (cento e cinquenta) segundos foi tomado de maneira a se permitir que os valores das estimativas pudessem evoluir até o valor de acomodação.

Duas simulações serão apresentadas. Inicialmente, de forma a se evitar a contaminação dos erros oriundos das leituras dos sensores na navegação com os erros de orientação no instante

inicial, não foram incluídos erros de leitura dos sensores na navegação, ou seja, foi simulada uma navegação usando-se sensores teoricamente perfeitos.

Em seguida, outra simulação foi realizada, incluindo-se aí os erros de leitura dos sensores. Em ambas as simulações, o tempo de simulação da navegação foi de 720 segundos e a trajetória utilizada foi a mesma descrita no item 3.4.1.

Na segunda simulação, três considerações foram feitas e os resultados foram gerados para cada uma delas. A primeira delas é a que apresenta os resultados considerando-se que se dispõe apenas dos valores de orientação do corpo móvel fornecidos pelo alinhamento grosseiro. Na segunda hipótese, esses valores de orientação são corrigidos pelas estimativas dos deslinhamentos obtidas pelo alinhamento fino. Finalmente, numa terceira hipótese, gerou-se os resultados usando-se, além dos valores de orientação corrigidos através das estimativas de desalinhamento provenientes do alinhamento fino, as leituras dos sensores compensadas através dos valores das estimativas dos bias dia a dia.

7. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Na simulação do alinhamento, os valores iniciais atribuídos aos ângulos de *roll*, *pitch* e *heading* foram nulos. No entanto, como os sensores são imperfeitos – imperfeições essas simuladas, somando-se o bias e o ruído branco ao valor correto – esses ângulos são lidos incorretamente. No alinhamento grosseiro, toma-se a média de 30 (trinta) leituras dos sensores, de forma a se minimizar o efeito do ruído branco. Entretanto, devido ao erro decorrente dos bias dia a dia, os valores dos ângulos, ao serem extraídos dos valores das leituras dos sensores com erros, não são obviamente iguais aos valores atribuídos. A diferença entre os valores reais e seus respectivos valores provenientes do alinhamento grosseiro produzem os chamados erros de orientação ou desalinhamentos iniciais da plataforma. O alinhamento fino é, então, implementado de forma a se estimar o valor de tais desalinhamentos, que são, então, diminuídos dos valores de orientação gerados no alinhamento grosseiro, de sorte que valores de orientação muito mais próximos dos reais são obtidos. As FIG. 7.1 a 7.3 mostram a evolução, no alinhamento fino, da estimativa desses desalinhamentos. Tem-se em azul, o desalinhamento, ou erro, depois de realizado o alinhamento grosseiro. Pode-se observar que o alinhamento fino fornece uma informação muito próxima do valor do desalinhamento produzido pelo grosseiro, permitindo que, em seguida, este erro de orientação seja corrigido.

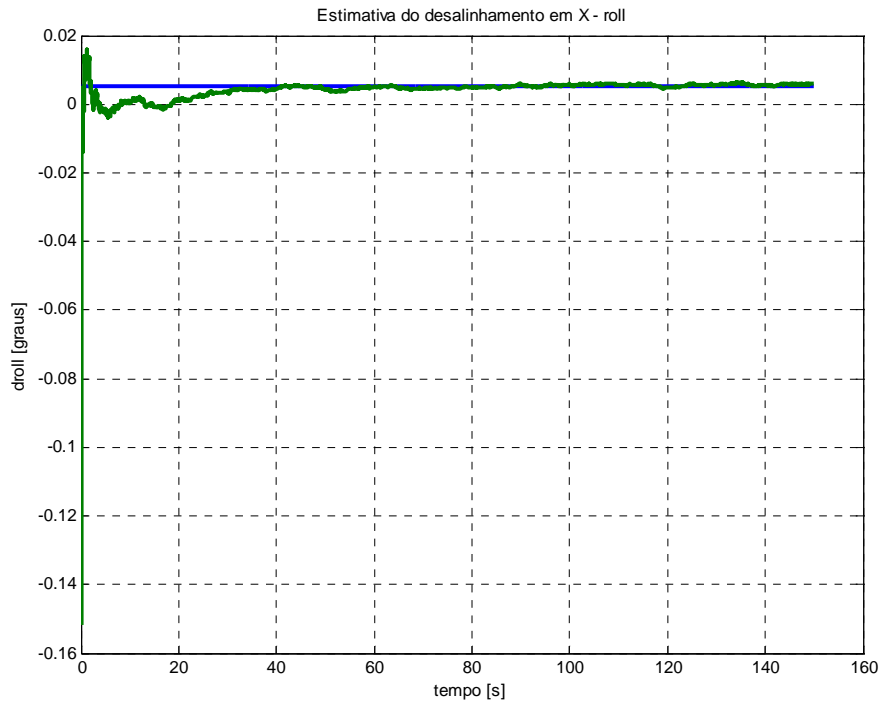


FIG. 7.1– Evolução da estimativa do desalinhamento em roll, durante o alinhamento fino

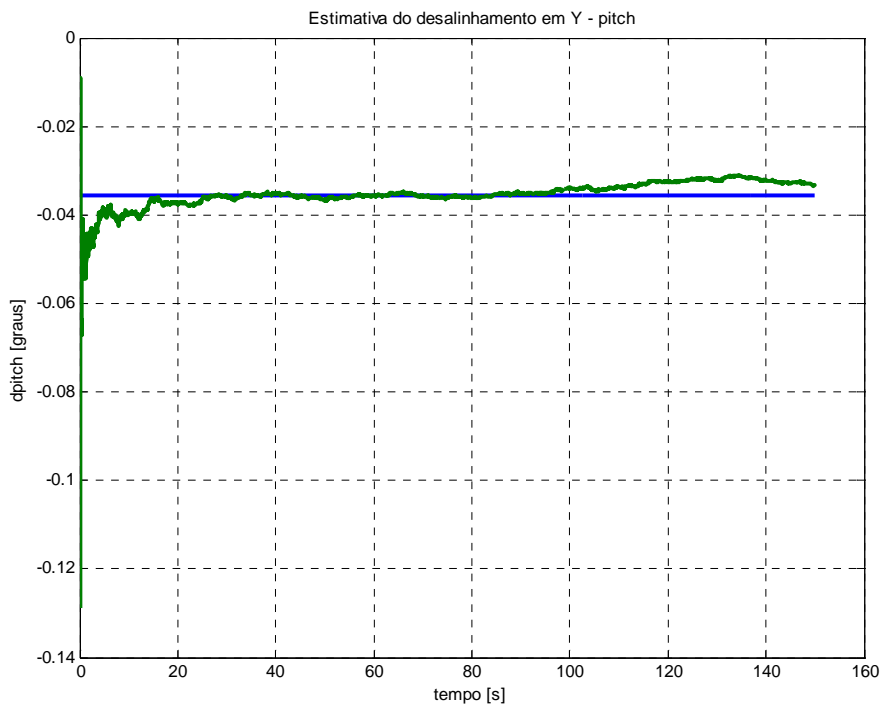


FIG. 7.2– Evolução da estimativa do desalinhamento em pitch, durante o alinhamento fino

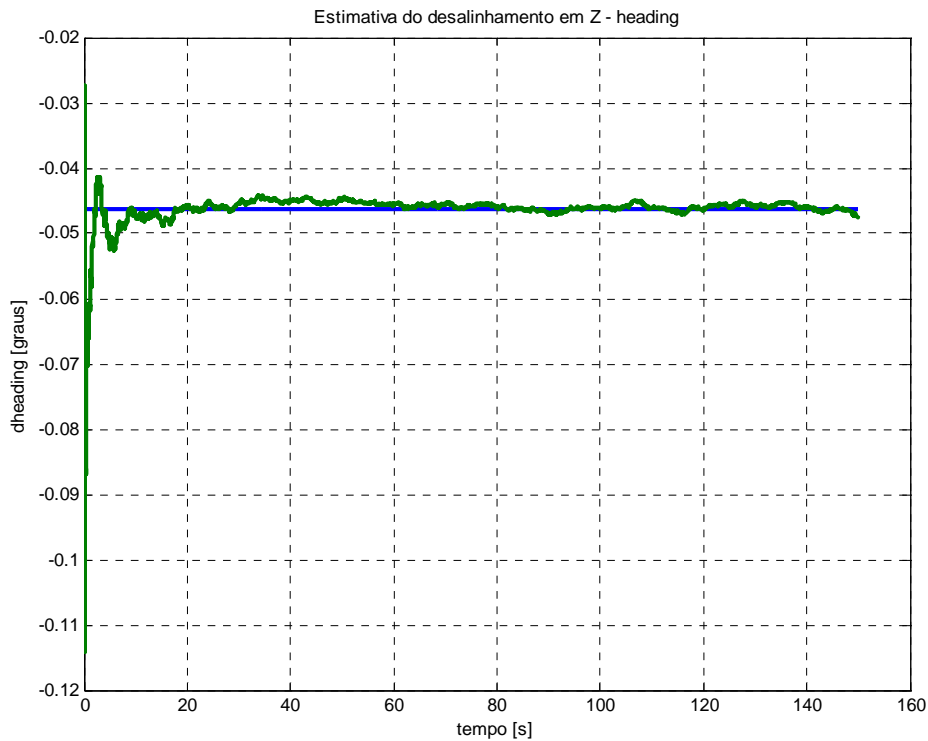


FIG. 7.3– Evolução da estimativa do desalinhamento em heading, durante o alinhamento fino

O chamado bias dia a dia dos sensores é, como já foi dito, um desvio do zero da escala que surge, diferente, sempre que o sensor é ligado. Durante o alinhamento fino, esses valores para cada um dos 6 (seis) sensores empregados, quais sejam, 3 (três) acelerômetros e 3 (três) giroscópios, são estimados, de forma a permitir sua posterior compensação na leitura dos sensores. Nas FIG. 7.4 e 7.5 são apresentadas, ilustrando as demais, as evoluções das duas estimativas de bias: a do acelerômetro alinhado com o eixo x do corpo e a do giroscópio cujo eixo de entrada é o eixo z do corpo. Em azul, tem-se o valor real, que é conhecido, uma vez que é gerado pelo programa. E em verde, tem-se a evolução da estimativa.

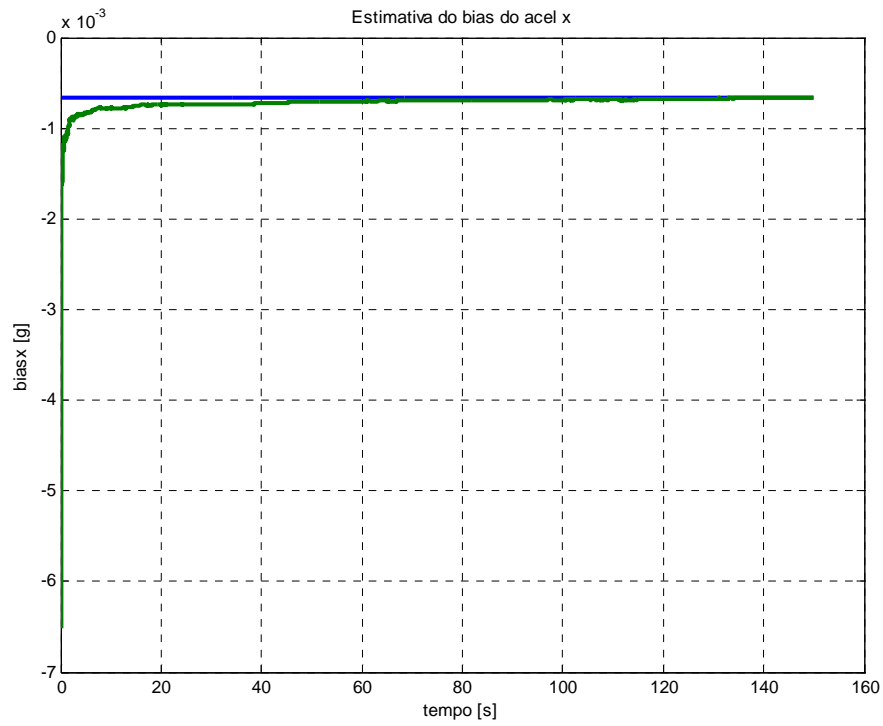


FIG. 7.4– Evolução da estimativa do bias do acelerômetro alinhado com o eixo x do corpo

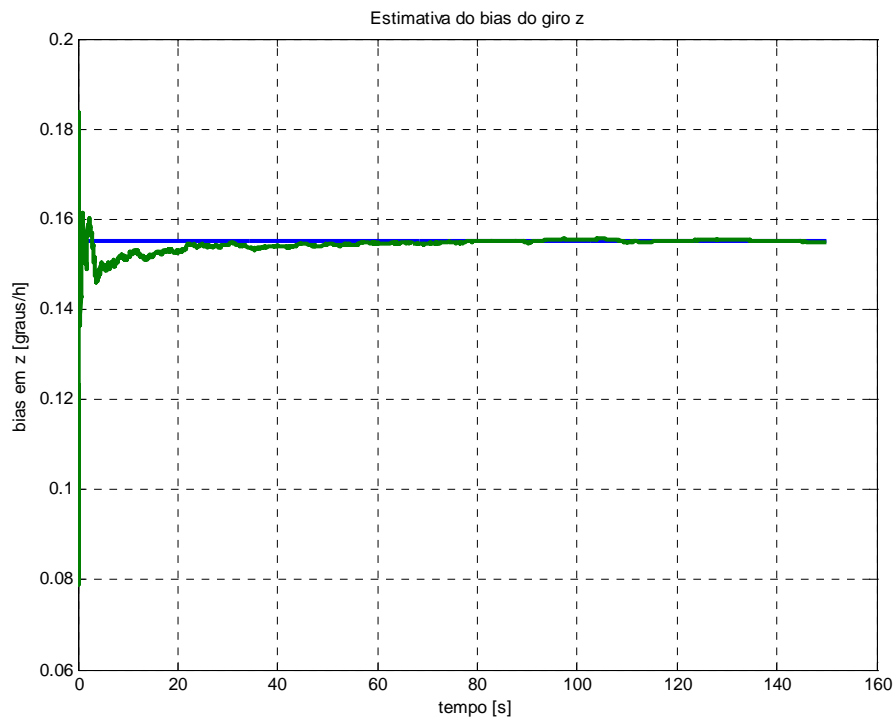


FIG. 7.5– Evolução da estimativa do bias do giroscópio com eixo de entrada alinhado com o eixo z do corpo

Passando-se à navegação e tomando-se, inicialmente, a simulação sem a inclusão de erros de leitura pelos sensores, durante a navegação, foram geradas saídas para a orientação inicial baseada apenas no alinhamento grosseiro e para a baseada no alinhamento fino. Como se supôs sensores ideais na navegação, não houve necessidade de se usar as estimações dos bias aleatórios dos sensores, que foram considerados nulos. Nas FIG. 7.6 a 7.8, respectivamente, são apresentados os gráficos da latitude, da longitude e da altura, em função do tempo. Na cor azul, com marcadores em formato de circunferência, tem-se a evolução destes parâmetros de posição, considerando a hipótese de só se dispor dos dados de orientação inicial oriundos do alinhamento grosseiro. Na cor vermelha, com marcadores em formato de triângulo apontado para cima, os resultados foram obtidos usando a orientação inicial a partir dos dados do alinhamento fino e, na cor preta, com marcadores em formato de triângulo apontado para baixo, partiu-se dos dados corretos de orientação inicial. Pode-se perceber que os resultados, usando-se o alinhamento fino, são bem mais próximos do ideal do que os usando apenas o grosseiro, como era esperado. A melhora nos resultados com a utilização dos dados do alinhamento fino fica mais fácil de ser visualizada através dos gráficos de erro, constantes das FIG. 7.9 a 7.11, nos quais os valores obtidos foram subtraídos dos esperados, usando-se os valores corretos para a orientação inicial.

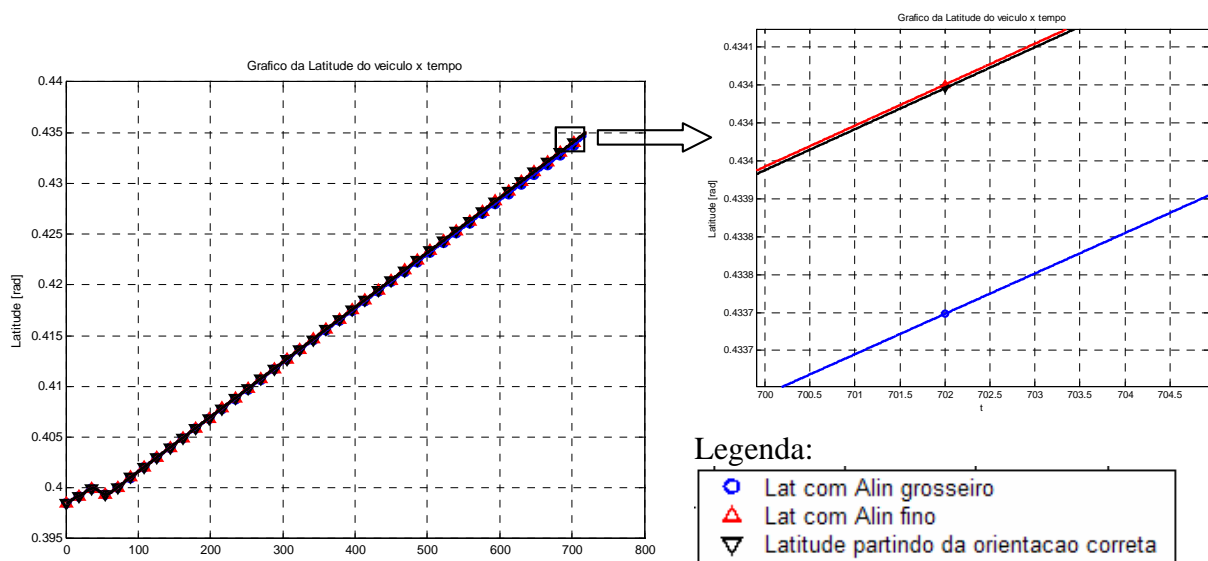


Fig. 7.6– Latitude x tempo

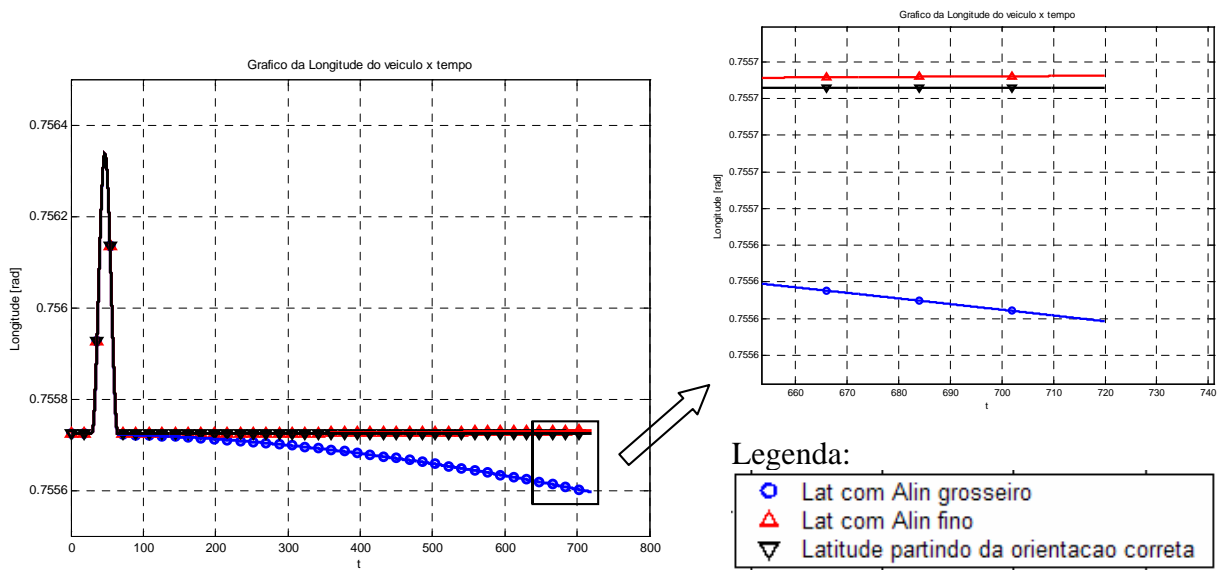


Fig. 7.7– Longitude x tempo

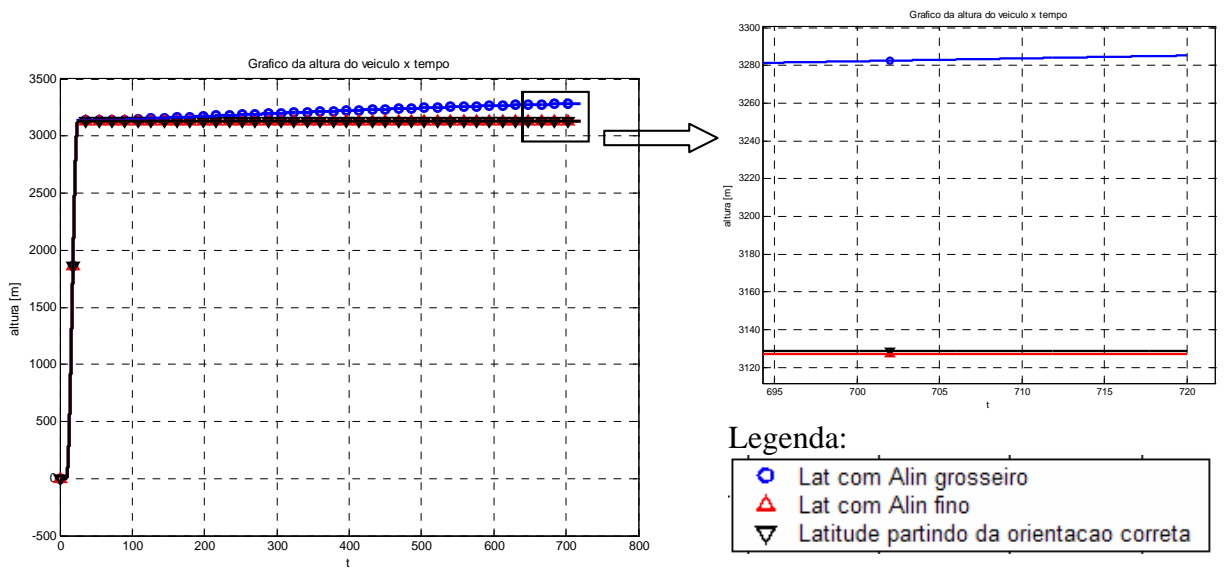


Fig. 7.8– Altura x tempo

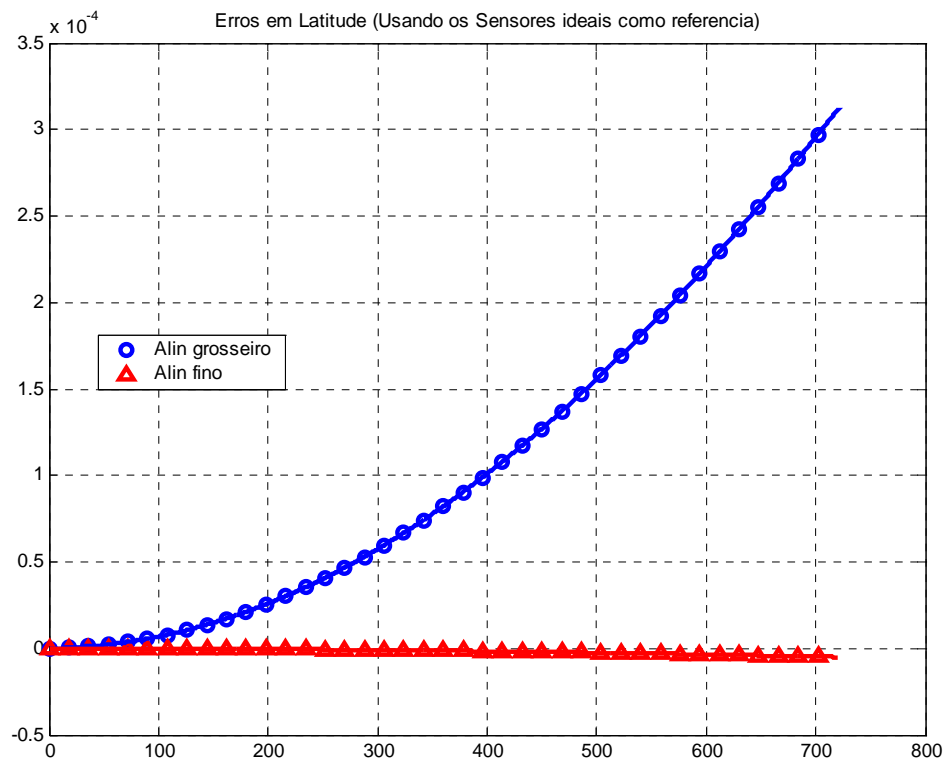


Fig. 7.9– Erro em Latitude

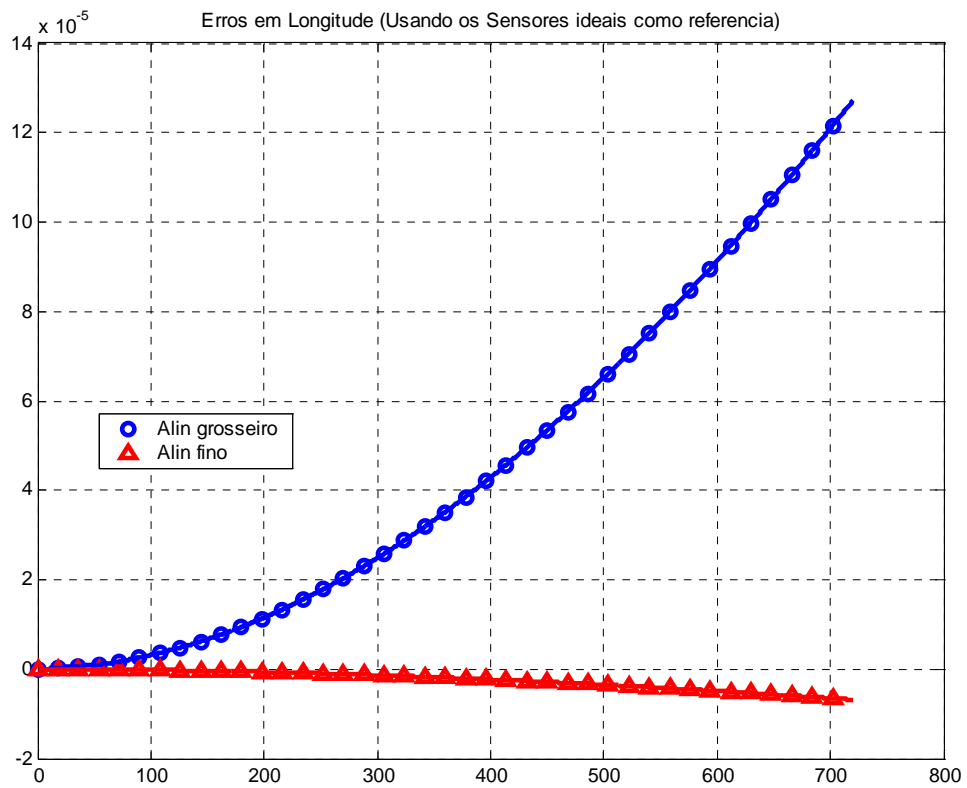


Fig. 7.10– Erro em Longitude

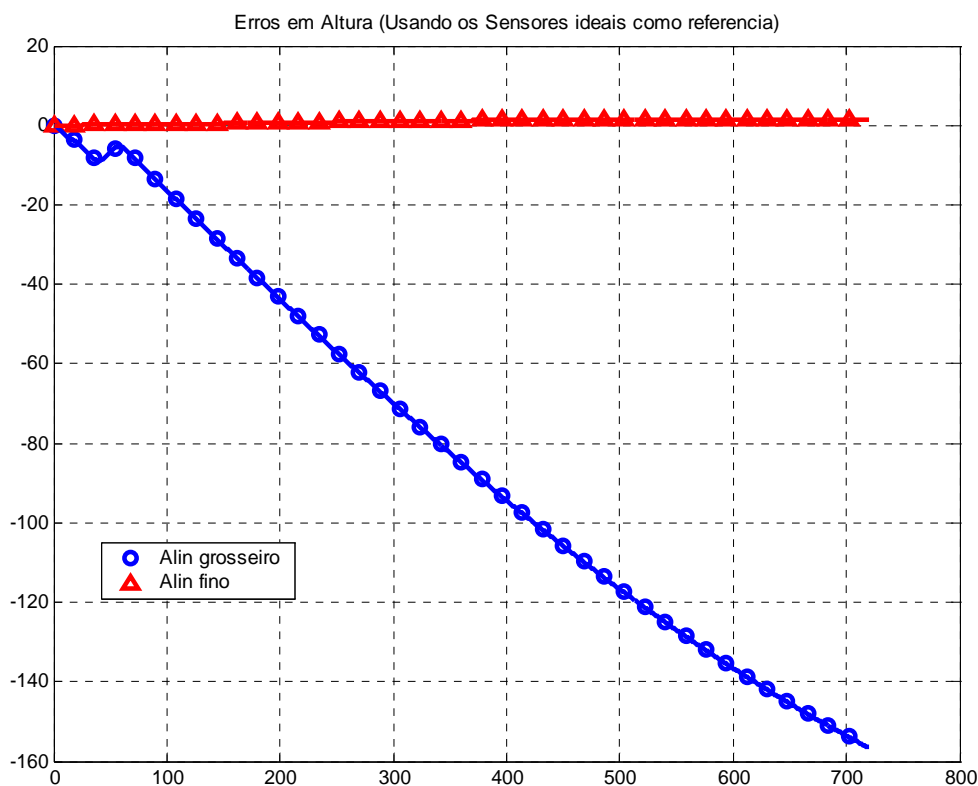


Fig. 7.11– Erro em Altura

A simulação usando sensores perfeitos na navegação mostrou a coerência dos resultados obtidos, validando a estimação dos desalinhamentos do alinhamento fino.

Em seguida, uma nova simulação foi realizada, desta feita, adicionando-se os bias dia a dia e os ruídos brancos às leituras dos sensores, gerando assim erros na navegação. As FIG. 7.12 a 7.14 apresentam, respectivamente, os gráficos da latitude, da longitude e da altura, tendo-se, em azul, com marcadores em formato de circunferência, os resultados usando apenas os dados de orientação inicial do alinhamento grosseiro, em vermelho, com marcadores em formato de triângulo apontado para cima, usando os dados de orientação corrigidos pelas estimativas de desalinhamento provenientes do alinhamento fino e, em verde, com marcadores em formato de losango, foram usados, além das correções na orientação inicial através das estimativas de desalinhamento obtidas no alinhamento fino, correções nas leituras dos sensores através das estimativas dos bias dia a dia dos mesmos. Pode-se perceber que, desta vez, eventualmente, os resultados obtidos com os dados de orientação inicial do alinhamento grosseiro podem ser melhor do que os obtidos com os dados do alinhamento fino, sem a compensação dos bias, como foi o

caso, durante praticamente toda a trajetória, dos dados de latitude e altura e, no final do percurso, dos de longitude. No entanto, pode-se verificar que os resultados que utilizam, além dos dados do alinhamento fino, as estimações dos bias produzem sempre os resultados mais próximos do ideal para todos os parâmetros. A comparação dos resultados pode ser melhor avaliada através das FIG. 7.15 a 7.17, que apresentam, respectivamente, os erros em latitude, em longitude e em altura; erros estes que são obtidos subtraindo-se dos valores corretos, gerados simulando-se leitura sem erro por parte dos sensores, os obtidos em cada uma das três hipóteses consideradas.

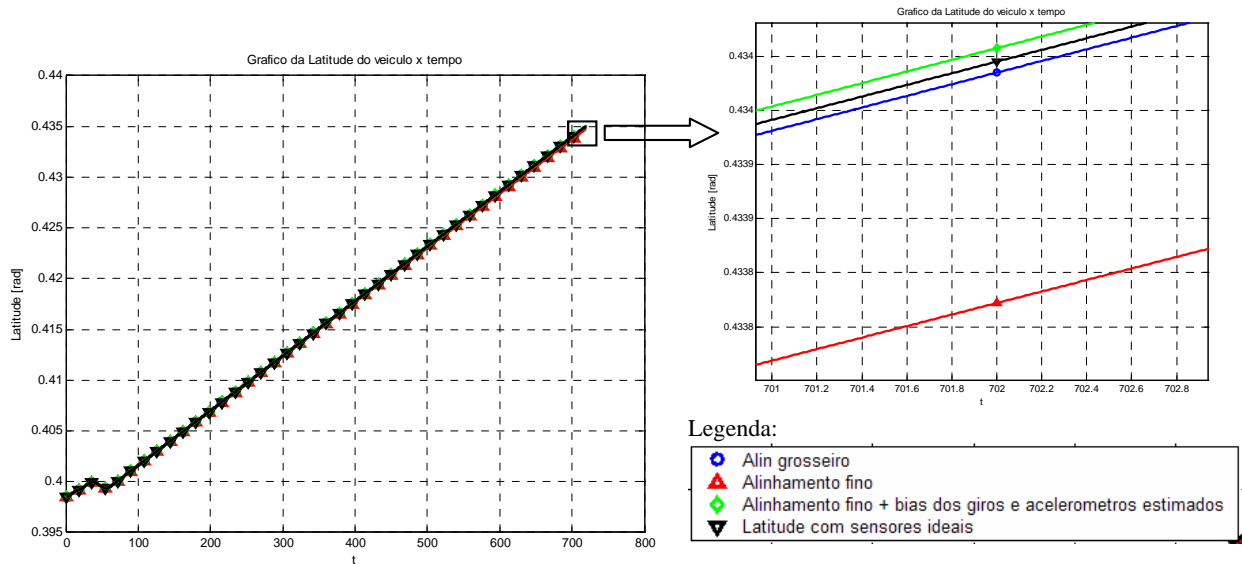


FIG. 7.12– Latitude x tempo

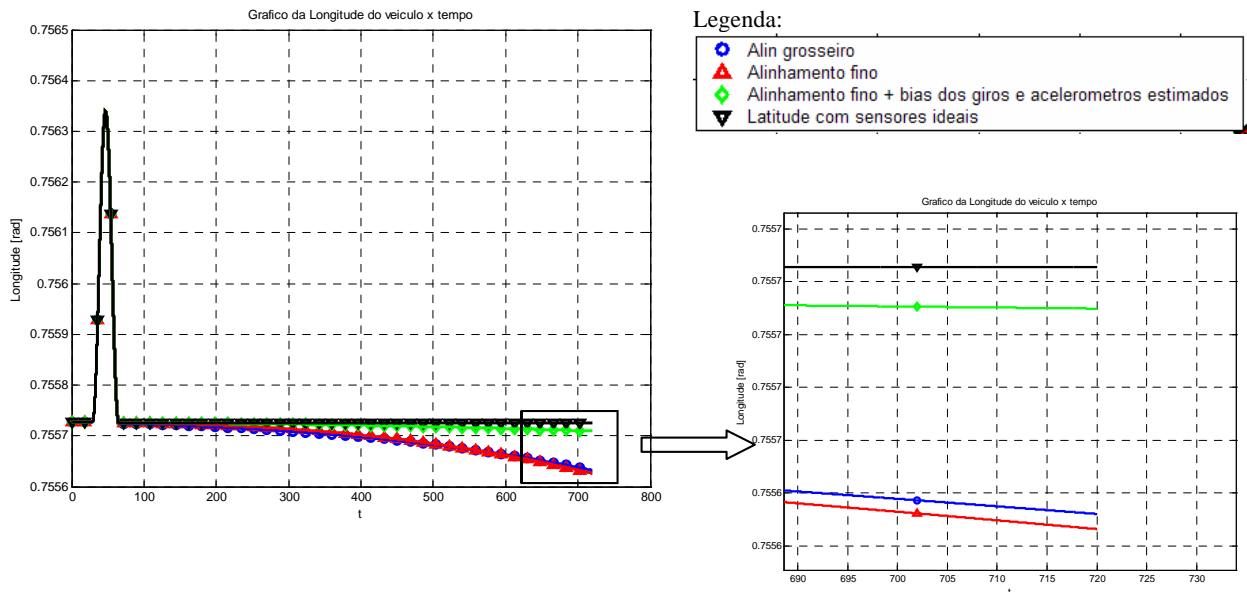


FIG. 7.13– Longitude x tempo

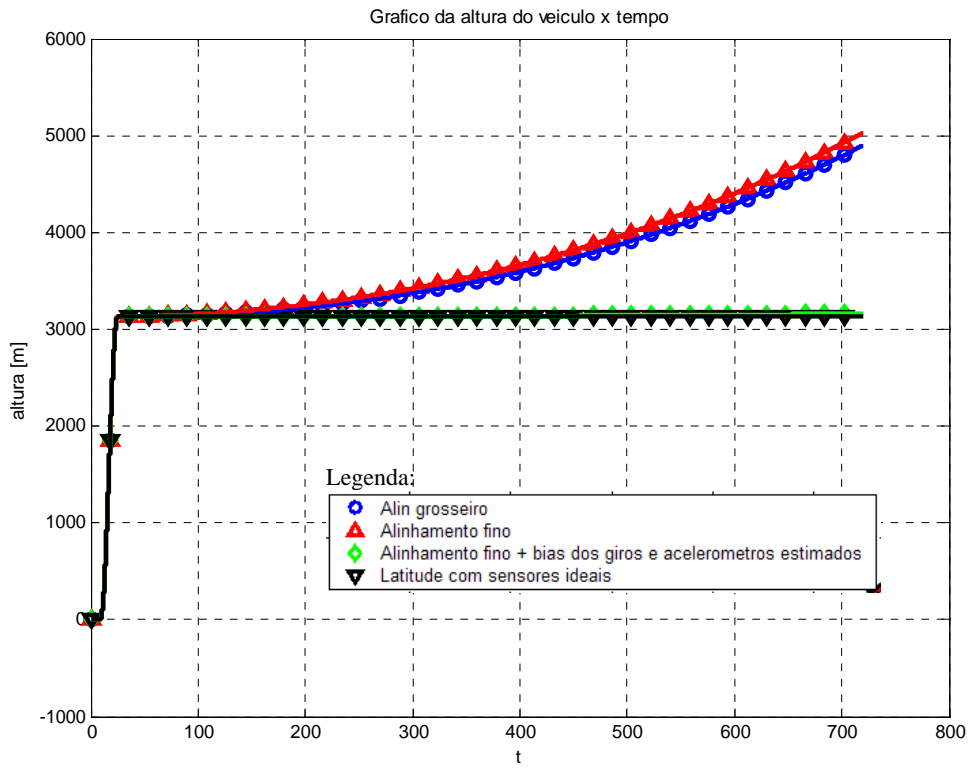


FIG. 7.14– Altura x tempo

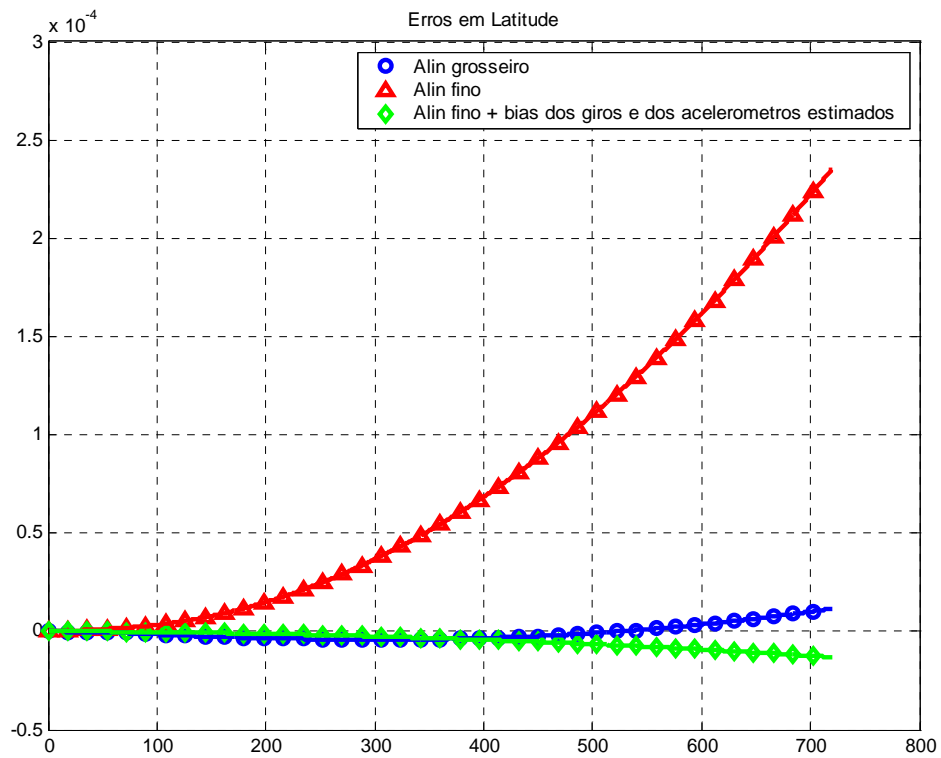


FIG. 7.15– Erro em Latitude

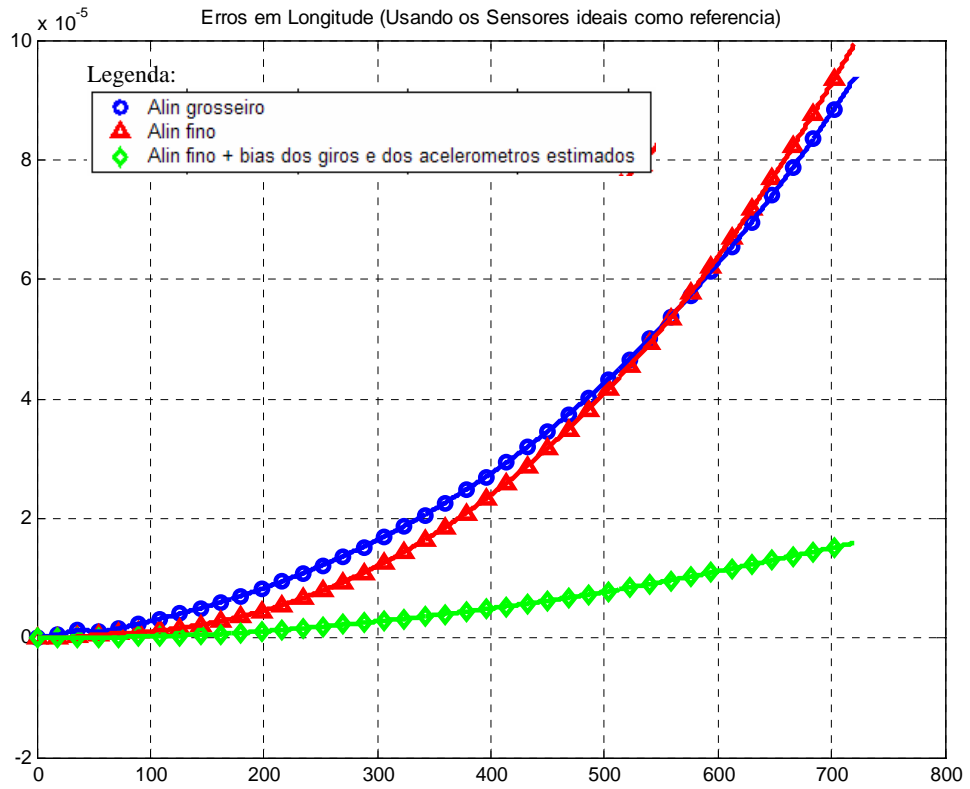


FIG. 7.16– Erro em Longitude

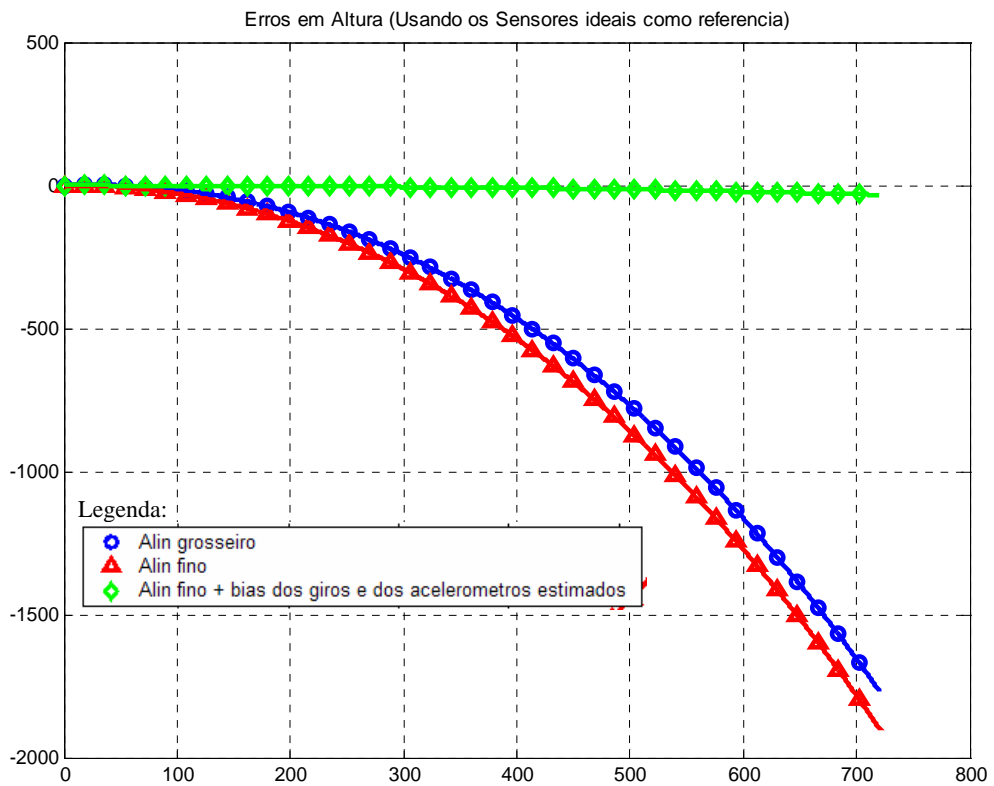


FIG. 7.17– Erro em Altura

A ocorrência de erros menores para a hipótese de se partir da orientação inicial baseada no alinhamento grosseiro do que para a baseada no alinhamento fino, sem a inclusão da estimação dos bias, parece, à primeira vista, incoerente. No entanto, cabe lembrar aqui que a primeira simulação realizada confirma que os dados de orientação inicial do corpo fornecidos pelo alinhamento fino são, de fato, mais precisos que os fornecidos pelo alinhamento grosseiro, haja vista os melhores resultados obtidos na navegação, na primeira situação. Outrossim, pode-se verificar que os resultados obtidos, usando-se, além da correção na orientação inicial mediante as estimativas dos deslinhamentos provenientes fino, as correções das leituras dos sensores mediante as estimações dos bias, foram, dentre todas as hipóteses, os que mostraram ter os menores erros, em todos os parâmetros. Portanto, pode-se concluir que a estimação dos bias dos sensores implica, indubitavelmente, na melhoria dos resultados. Isto posto, fica claro que o que ocorre é que, eventualmente, os erros na orientação podem se associar com os erros de leitura dos sensores, provenientes dos bias dia a dia, compensando uns aos outros, de forma a que os resultados, com a associação dos dois erros, venham a ser melhores do que os decorrentes apenas dos erros de leitura dos sensores.

8. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi concebido um algoritmo de alinhamento que consiste, basicamente, de um alinhamento grosseiro, seguido de uma filtragem de Kalman, implementada com o uso de três auxílios, quais sejam, dois giroscópios medidores de deslocamento angular e um girocompasso que fornece o ângulo de “heading”, que permite estimar e, por conseguinte, compensar, além dos erros na orientação inicial do corpo, os bias dia a dia dos sensores.

Em seguida, um algoritmo de navegação foi implementado, de forma a permitir a verificação dos resultados, primeiramente sem compensar os erros de orientação provenientes do alinhamento grosseiro, depois compensando-os, através das estimativas dos desalinhamentos obtidas na filtragem de Kalman e, finalmente, realizando-se, além da compensação dos erros de orientação, a compensação dos bias dia a dia dos sensores.

A estimação dos bias dia a dia dos sensores, principal contribuição deste trabalho, mostrou-se de extrema importância, haja vista que, como foi mostrado, através dos resultados da segunda simulação, tão somente a estimação dos desalinhamentos do alinhamento grosseiro, via alinhamento fino, não garante melhoria dos resultados para todos os parâmetros de posição.

Os resultados obtidos, mediante a compensação tanto dos erros de orientação inicial, quanto dos bias dia a dia se mostraram bastante precisos e próximos do ideal, mesmo ao final de 720 segundos de navegação.

Este trabalho abre uma série de perspectivas para novos trabalhos, dentre os quais pode-se citar:

- a) tentativa de se implementar um alinhamento em movimento, ficando a sugestão de se acrescentar, neste caso, ao equacionamento da filtragem de Kalman, a equação de erros de velocidade e, eventualmente, utilizar-se velocímetros como auxílios;
- b) utilização de outros tipos de auxílios no equacionamento da filtragem de Kalman;
- c) implementação prática deste algoritmo, numa plataforma inercial;

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALONZO, Kelly, **Modern Inertial and Satellite Navigation Systems**, 1994. Disponível: <http://www.frc.ri.cmu.edu/~alonzo/pubs/pubs.html> [capturado em 27 nov. 2004]
- CAMPOS, Vitor A. F., **Aplicação do Filtro de Kalman e dos Filtros de Partículas à Estimação de trajetórias em Navegação Inercial**, dissertação M. Sc., USP, 2004
- CRANDALL, Stephen H., KARNOPP, Dean C., KURTZ, Edward F. Jr., PRIDMORE-BROWN, David C., **Dynamics of Mechanical and Eletromechanical Systems**, McGraw-Hill, USA, 1968, 256 p.
- DIEGUEZ, J.P.P., **Métodos Numéricos Computacionais para a Engenharia – Vol II**, Editora Interciência, 1992, 348 p.
- DURÃO, Carlos R. C., **Estudo e Implementação de um Algoritmo de Navegação Inercial**, dissertação M. Sc., UFRJ, 1992, 178 p.
- EUROPEAN ORGANIZATION FOR THE SAFETY OF AIR NAVIGATION e INSTITUTE OF GEODESY AND NAVIGATION, **WGS-84 – Implemition Manual**, [on line]. 1998. Disponível : <http://www.wgs84.com/files/wgsman24.pdf> [capturado em maio de 2005]
- FANG, Cheng Jiang (Southeast University Nanjing), **SINS Error Model and Observability**, IEEE, 1996, 5 p.
- FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D., **Digital Control of Dynamics Systems**, Addison Wesley Longman, Inc., EUA, 1997, 743 p.
- GUIZIOU, Robert, **Mecanique Spatiale**, 2004. Disponível: <http://artemis.univ-mrs.fr/cybermecca/Formcont/mecaspa/index.htm> [capturado em 05 nov. 2004]
- GRUZMAN, Maurício, **Simulação de Giroscópio de Suspensão Cardâmica com Dois Graus de Liberdade**, dissertação M.Sc., IME, 2003. 237 p.

HAUG, Edward J., **Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems**, Allyn and Bacon, Massachusetts, 1989. 498 p.

HERMERLY, M. E., **Filtro de Kalman: Teoria e Implementação**, CTA

IORIO, Cristiane de Oliveira, **Filtragem de Kalman Aplicada a Navegadores Inerciais**, dissertação M.Sc., IME, 1995. 111 p.

LABARRERE, M; KRIEF, J.P.; GIMONET, B; **Le Filtrage et Ses Applications**, Cepadues Editions, França, 405 p.

NEBOT, Eduardo (University of Sydney), **Initial Calibration and Alignment of an Inertial Navigation**, IEEE, 1997, 6 p.

PARK, Heung Won, LEE, Jang Gyu e PARK, Chan Gook, **Covariance Analysis Strapdown INS Considering Gyrocompass Characteristics**, IEEE, 1995, 9 p.

SHABANA, Ahmed A., **Dynamics of Multibody Systems**, John Wiley & Sons, EUA, pp.214, 1988.

RAVEN, **Automatic Control Engineering**, Mc Graw Hill, USA.

SAVAGE, Paul G., **Introduction to Strapdown Inertial Navigation Systems**, Strapdown Associates, Inc, 1985, 538 p.

SAVAGE, Paul G., **Strapdown Inertial Navigation – Lecture Notes**, Strapdown Associates, Inc, 1985, 538 p.

TITTERTON, David, WESTON, John, **Strapdown Inertial Navigation Technology**, IEE, UK, 1997, 452 p.

UM, Tae Yoon, LEE, Jang Gyu, PARK, Seong-Taek, PARK e Chan Gook, **Noise Covariance Estimation for Systems With Bias States**, IEEE, 2000, 8 p.

10.

APÊNDICES

10.1. APÊNDICE 1: ESTIMAÇÃO ÓTIMA

Em geral, dispõe-se de duas formas de se obter o valor de uma grandeza em um determinado instante: a) partindo-se de um valor desta grandeza no instante anterior e utilizando-se uma equação que modele a evolução no tempo desta grandeza e b) medindo-se diretamente esta grandeza. No entanto, tanto a modelagem quanto a medição possuem imprecisões, daí, qualquer que seja a forma de se obter o valor da grandeza, falar-se em estimação. Na estimação ótima, procura-se, levando-se em consideração tanto a informação proveniente da modelagem quanto a da medição, obter-se uma estimativa o mais próxima possível do valor real, minimizando um critério ligado a esse afastamento.

Primeiramente será desenvolvida estimação por mínimos quadrados, para o caso estático ou invariante no tempo, como base para o entendimento da estimação ótima. Em seguida, a idéia será estendida para a estimação ótima de um processo variante no tempo, comumente conhecida como “Filtragem de Kalman”.

Este apêndice foi baseado nos trabalhos de FRANKLIN e POWELL, em 1997, de LABARRERE, KRIEF e GIMONET e de HERMERLY.

10.1.1. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O método dos mínimos quadrados foi descoberto em 1795 por um jovem matemático chamado K. F. Gauss, que estudava o movimento dos planetas e dos cometas. Este método, utilizado para determinação de parâmetros orbitais a partir de medidas associadas a ruídos, foi objeto de um grande número de aperfeiçoamentos. No seu livro, “Theoria Motus Corporum Coelestium”, publicado em 1809, Gauss elencou um certo número de idéias, à base de modernas técnicas de estimação: ele se questionou quanto ao número mínimo de observações necessárias e constatou que, em presença de erros de medida, é necessário um número maior de observações.

Na tentativa de obtenção dos parâmetros desejados, o método dos mínimos quadrados forneceu uma solução que minimizava o afastamento entre a solução desejada, ou ideal, e a solução obtida com estes parâmetros. O sucesso deste método reside essencialmente na forma quadrática de seu critério de qualidade, que conduz a uma formulação simples: os parâmetros desejados são, em geral, solução de um sistema de equações lineares. A adoção de um critério de

afastamento quadrático pode parecer arbitrária e limitada, mas o acréscimo da idéia de coeficientes de ponderação permite o aumento da abrangência do método para um grande número de problemas. Ressalte-se, aqui, que o critério de afastamento quadrático representa a energia do erro ou, usando a terminologia da estocástica, a variância deste. O método dos mínimos quadrados clássico não pressupõe o conhecimento das características estatísticas do ruído de medida. Os aperfeiçoamentos deste método, a partir do conhecimento das propriedades dos ruídos, são devidos principalmente a Wiener e a Kalman.

O método dos mínimos quadrados será desenvolvido na sua forma global e na sua forma recursiva. Seguir-se-á uma aplicação clássica que mostra a utilidade deste método.

10.1.1.1. O CASO MONOVARIÁVEL

Consideremos, por exemplo, a determinação da aceleração da gravidade, a partir da observação da queda de um corpo. A velocidade v está ligada ao tempo t pela seguinte relação linear:

$$v = g \cdot t$$

Na prática, não se tem acesso à verdadeira velocidade v , mas a uma medida v_m que está associada a um ruído de medida b :

$$v_m = v + b$$

Se as diferentes observações v_{mi} da velocidade são representadas em um gráfico em função do tempo, constata-se que os diferentes pontos não estão alinhados, muito embora, teoricamente, as diferentes velocidades deveriam estar numa reta de coeficiente angular igual a g .

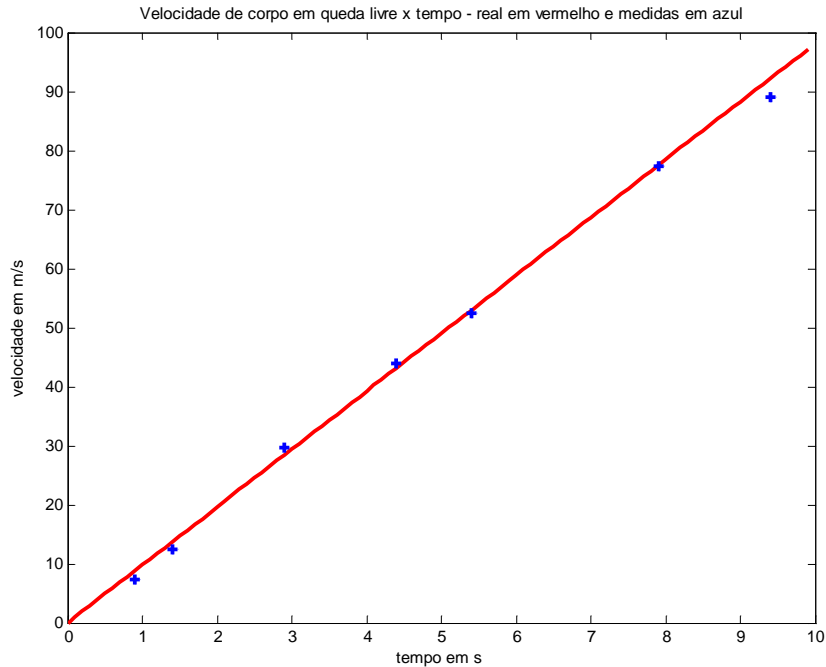


FIG. 10.1 – Medidas de velocidades e reta de coeficiente angular igual a g

Como determinar a aceleração g ? As diferentes medidas tomadas separadamente conduzem a acelerações distintas. Pode-se, então, buscar uma reta $v = g.t$ que leve em conta o conjunto das observações e que minimize a distância vertical dos pontos referentes a cada observação a esta reta, isto é, o critério de afastamento quadrático:

$$C = \sum_{i=1}^k (g.t_i - v_{m_i})^2$$

C é uma função unimodal de g . O mínimo do critério é obtido, quando o gradiente de C em relação a g é nulo, ou seja:

$$\frac{\partial C}{\partial g} = 2 \cdot \sum_{i=1}^k t_i (g.t_i - v_{m_i}) = 0$$

donde, a melhor estimacão para g é:

$$\hat{g} = \frac{\sum_{i=1}^k t_i \cdot v_{m_i}}{\sum_{i=1}^k t_i^2}$$

Generalizando, para o caso de k observaces y_i de uma expressão linear de parâmetro a e de variável x_i , a melhor estimacão de a , pelo critério do afastamento quadrático, é dada por:

$$\hat{a}_k = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^k x_i^2} \quad (10.1)$$

O cálculo de \hat{a}_k pode ser efetuado pela EQ. 10.1. Apesar de bastante simples, esta expressão não é muito usual quando o número de observações k é muito grande. Neste caso, \hat{a}_k aparece como a relação entre duas somas que aumentam com o número de observações. Desta forma, é preferível buscar-se uma formulação recursiva.

Considere-se os valores estimados \hat{a}_{k-1} e \hat{a}_k , obtidos sucessivamente a partir de $k-1$ e k observações.

Seja:

$$\hat{a}_k = P_k \cdot Q_k, \text{ onde, comparando com a EQ. 10.1, } \begin{cases} P_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^k x_i^2} \\ Q_k = \sum_{i=1}^k x_i \cdot y_i \end{cases} \quad (10.2)$$

Pode-se, portanto, escrever também:

$$\hat{a}_{k-1} = P_{k-1} \cdot Q_{k-1}$$

Da EQ. 10.2, tem-se:

$$\begin{aligned} 1/P_k &= \sum_{i=1}^k x_i^2 = \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 + x_k^2 = 1/P_{k-1} + x_k^2 \\ Q_k &= \sum_{i=1}^k x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{k-1} x_i \cdot y_i + x_k \cdot y_k \end{aligned} \quad (10.3)$$

A primeira equação da EQ. 10.3 pode também ser escrita da seguinte forma:

$$P_{k-1} = P_k + P_k \cdot x_k^2 \cdot P_{k-1} \quad (10.4)$$

e, portanto:

$$P_k = P_{k-1} - (P_k \cdot x_k) \cdot x_k \cdot P_{k-1} \quad (10.5)$$

A partir da EQ. 10.4, pode-se exprimir uma expressão para $P_k \cdot x_k$:

$$P_{k-1} = P_k (1 + P_{k-1} \cdot x_k^2) \Rightarrow P_k \cdot x_k = \frac{P_{k-1} \cdot x_k}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)} \quad (10.6)$$

Substituindo a EQ. 10.6 na EQ. 10.5, tem-se:

$$P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1}^2 \cdot x_k^2}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)}$$

Assim, resumindo, as expressões obtidas são as seguintes:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{k-1} x_i \cdot y_i + x_k \cdot y_k$$

$$P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1}^2 \cdot x_k^2}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)}$$

$$\hat{a}_k = P_k \cdot Q_k$$

Podemos, portanto, escrever:

$$\hat{a}_k = \left[P_{k-1} - \frac{P_{k-1}^2 \cdot x_k^2}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)} \right] \cdot \left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i \cdot y_i + x_k \cdot y_k \right) = \left[P_{k-1} - \frac{P_{k-1}^2 \cdot x_k^2}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)} \right] \cdot (Q_{k-1} + x_k \cdot y_k)$$

Desenvolvendo a expressão acima, tem-se:

$$\hat{a}_k = P_{k-1} \cdot Q_{k-1} - \frac{P_{k-1}^2 \cdot x_k^2}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)} \cdot Q_{k-1} + P_{k-1} \cdot x_k \cdot y_k - \frac{P_{k-1}^2 \cdot x_k^3 \cdot y_k}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)}$$

$$\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} - \frac{P_{k-1} \cdot Q_{k-1} \cdot P_{k-1} \cdot x_k^2}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)} + \frac{P_{k-1} \cdot x_k \cdot y_k + P_{k-1}^2 \cdot x_k^3 \cdot y_k}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)} - \frac{P_{k-1}^2 \cdot x_k^3 \cdot y_k}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)}$$

$$\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} - \frac{\hat{a}_{k-1} \cdot P_{k-1} \cdot x_k^2}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)} + \frac{P_{k-1} \cdot x_k \cdot y_k}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)} + \frac{\cancel{P_{k-1}^2 \cdot x_k^3 \cdot y_k}}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)} - \frac{\cancel{P_{k-1}^2 \cdot x_k^3 \cdot y_k}}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)}$$

$$\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} + \frac{P_{k-1} \cdot x_k}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)} (y_k - \hat{a}_{k-1} \cdot x_k)$$

Chamando $\frac{P_{k-1} \cdot x_k}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)}$ de K_k e observando, na EQ. 10.6, que $K_k = P_k \cdot x_k$, tem-se as

seguintes fórmulas de recorrência:

$$\begin{cases} \hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} + K_k \cdot (y_k - \hat{a}_{k-1} \cdot x_k) \\ K_k = \frac{P_{k-1} \cdot x_k}{(1 + P_{k-1} \cdot x_k^2)} \text{ e} \\ P_k = P_{k-1} - K_k \cdot x_k \cdot P_{k-1} \end{cases} \quad (10.7)$$

A expressão recursiva que fornece o parâmetro estimado possui uma forma bastante adaptada ao cálculo numérico. A estimativa no instante k é igual à estimativa no instante $k-1$ mais

uma correção que depende da distância da reta estimada à nova observação y_k . Observando-se que $K_k = P_k \cdot x_k$, tem-se:

$$\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} + P_k \cdot x_k \cdot (y_k - \hat{a}_{k-1} \cdot x_k)$$

onde $y_k - \hat{a}_{k-1} \cdot x_k$ representa o aporte de informação da observação y_k ; $x_k \cdot (y_k - \hat{a}_{k-1} \cdot x_k)$ é um valor instantâneo do gradiente \mathbf{C} , no instante k ; P_k é o peso associado a este novo valor. Ele depende das estimações precedentes e decresce com o aumento de k . Quanto mais estimações se fizer, melhores elas serão e menos associadas aos afastamentos entre a reta estimada e as observações que, por fim, são essencialmente devidos aos ruídos das medidas. Será visto, na interpretação estocástica dos mínimos quadrados, que P_k é uma medida do erro de estimação.

O algoritmo recursivo, dado pelas EQ. 10.7, supõe valores iniciais que podem ser calculados a partir de k_0 observações pela formulação global, EQ. 10.1. Mas, caso se escolha um valor de P_{k_0} suficientemente grande, a partir de um certo número de observações, a estimação é independente da condição inicial a_{k_0} , que, portanto, pode ser escolhida arbitrariamente e tomar, em particular, o valor zero. De fato, P_{k_0} é uma medida do erro de estimação verificado com as k_0 primeiras observações. Em se inicializando de uma maneira qualquer, a incerteza sobre \hat{a}_{k_0} é grande; da mesma forma que sobre P_{k_0} . Escolhendo-se P_{k_0} grande, estar-se-á levando em conta, sobretudo, as medidas futuras; no entanto, um P_{k_0} pequeno traduz que o algoritmo já está bastante próximo do seu valor limite. P_{k_0} é, portanto, um parâmetro que permite a regulação da convergência da estimação.

Estas propriedades são colocadas em evidência na resolução do exemplo da queda de um corpo.

Os instantes de levantamento das medidas são aleatórios e distribuídos no período entre 0 e 10 segundos e, numa primeira etapa, a fim de analisar a convergência do algoritmo recursivo, o ruído de medida é nulo. Neste caso, evidentemente, a inicialização da fórmula global aplicada ao primeiro ponto de medida fornece imediatamente o valor exato da aceleração (FIG. 10.2). Se a inicialização não é exata, a convergência a partir de um valor arbitrário – tomado igual a zero no exemplo –, depende do valor inicial de P (FIG. 10.2).

Em presença de ruído de medida, a evolução do parâmetro P , que não depende da medida ruidosa, não é modificada (FIG. 10.3). Entretanto, a evolução da estimação depende do ruído, sobretudo no início, para grandes valores de P (FIG. 10.4).

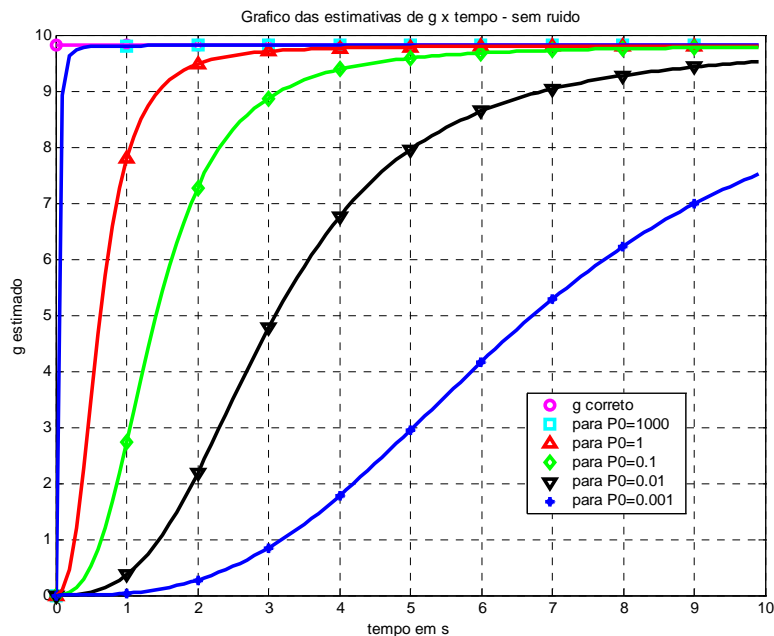


FIG. 10.2– Evolução da estimativa de g , na ausência de ruído de medida

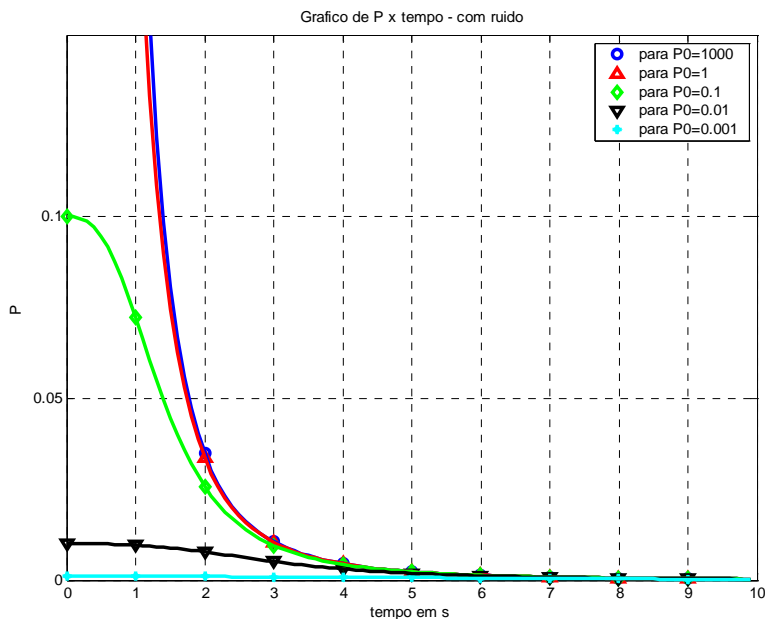


FIG. 10.3– Evolução do parâmetro P , em presença de ruído de medida

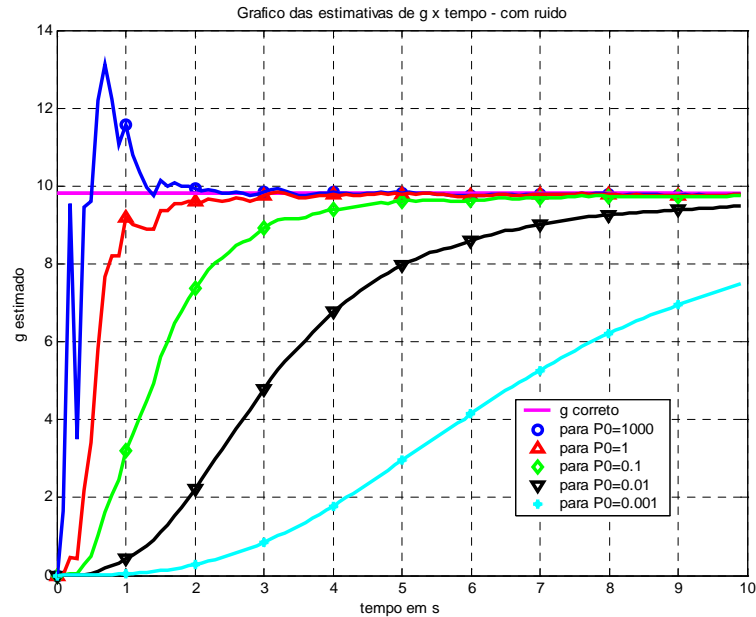


FIG. 10.4– Evolução da estimativa de g, em presença de ruído de medida

10.1.1.2. CASO MULTIVARIÁVEL

Esta formulação pode ser generalizada sem dificuldades para o caso multivariável, onde a equação de medida é dada por:

$$y_i = a_1 \cdot x_{1i} + a_2 \cdot x_{2i} + \dots + a_n \cdot x_{ni} + b_i$$

onde $x_1, x_2 \dots x_n$ representam n variáveis conhecidas; $a_1, a_2 \dots a_n$, os parâmetros desconhecidos a estimar e y , as observações associadas a um ruído b .

Em notação vetorial, escreve-se:

$$y_i = \underline{x}_i^T \cdot \underline{a} + b_i$$

O problema é encontrar-se, a partir de k observações y_i , a melhor estimativa para o vetor \underline{a} , pelo critério do afastamento quadrático C :

$$C = \sum_{i=1}^k (y_i - \underline{x}_i^T \cdot \underline{\hat{a}}_k)^2$$

A solução é obtida escrevendo-se que o gradiente de C , em relação a \underline{a} , é nulo:

$$\left[\sum_{i=1}^k \underline{x}_i \cdot \underline{x}_i^T \right] \cdot \hat{\underline{a}}_k - \sum_{i=1}^k \underline{x}_i^T \cdot y_i = 0$$

Se a matriz $\left[\sum_{i=1}^k \underline{x}_i \cdot \underline{x}_i^T \right]$ não é singular, a solução é dada por:

$$\hat{\underline{a}}_k = \left[\sum_{i=1}^k \underline{x}_i \cdot \underline{x}_i^T \right]^{-1} \sum_{i=1}^k \underline{x}_i^T \cdot y_i \quad (10.8)$$

Se a matriz $\left[\sum_{i=1}^k \underline{x}_i \cdot \underline{x}_i^T \right]$ é singular, não há solução única. Esta eventualidade pode se produzir

se o número de observações for inferior ao número de parâmetros a determinar ou ainda se ao menos duas variáveis do vetor \underline{x} são linearmente dependentes.

De fato, se:

$$y_i = a_1 \cdot x_{1i} + a_2 \cdot x_{2i} + b_i, \text{ com } x_{2i} = \lambda \cdot x_{1i}, \text{ tem-se:}$$

$$y_i = (a_1 + \lambda \cdot a_2) \cdot x_{1i} + b_i$$

e, portanto, não se pode determinar separadamente a_1 e a_2 , mas somente $a_1 + \lambda \cdot a_2$.

Em notação matricial, considerando o vetor \underline{y}_k , cujos elementos são compostos pelas k observações \underline{y} e a matriz H , cujas linhas são \underline{x}_i^T e que, à exceção do vetor dos ruídos \underline{b} , associa o vetor das medidas com o vetor dos parâmetros que se quer estimar (\underline{a}_k), a estimativa pode ser escrita da seguinte forma:

$$\hat{\underline{a}}_k = \left[H_k^T \cdot H_k \right]^{-1} \cdot H_k^T \cdot \underline{y}_k \quad (10.9)$$

Que é a solução da equação matricial $\underline{y}_k = H_k \cdot \underline{a}$, usando o critério do afastamento quadrático \mathbf{C} , que fica definido da seguinte maneira:

$$\mathbf{C} = (\underline{y}_k - H_k \cdot \underline{a})^T \cdot (\underline{y}_k - H_k \cdot \underline{a})$$

Note-se que esta solução é obtida, premultiplicando-se os dois membros da equação por H_k^T e resolvendo-se o sistema que possui, agora, o mesmo número de equações que o de incógnitas.

Como no caso monovariável, pode-se, a partir da EQ. 10.8, desenvolver uma formulação recursiva, fazendo-se:

$$\hat{\underline{a}}_k = P_k \cdot Q_k, \text{ onde } \begin{cases} P_k = \left[\sum_{i=1}^k \underline{x}_i \cdot \underline{x}_i^T \right]^{-1} \\ Q_k = \sum_{i=1}^k \underline{x}_i \cdot y_i \end{cases}$$

$$[P_k]^{-1} = [P_{k-1}]^{-1} + \underline{x}_k \cdot \underline{x}_k^T$$

$$Q_k = Q_{k-1} + \underline{x}_k \cdot y_k$$

Utilizando o lema da inversão matricial, cuja demonstração está no Apêndice 2 deste trabalho, pode-se escrever:

$$P_k = P_{k-1} - P_{k-1} \cdot \underline{x}_k \left(1 + \underline{x}_k^T P_{k-1} \cdot \underline{x}_k \right)^{-1} \cdot \underline{x}_k^T \cdot P_{k-1}$$

Desta forma, tem-se as seguintes fórmulas de recorrência:

$$\begin{cases} \hat{\underline{a}}_k = \hat{\underline{a}}_{k-1} + K_k \cdot (y_k - \underline{x}_k^T \cdot \hat{\underline{a}}_{k-1}) \\ P_k = P_{k-1} - K_k \cdot \underline{x}_k^T \cdot P_{k-1} \text{ e} \\ K_k = P_{k-1} \cdot H_k \cdot (1 + \underline{x}_k^T \cdot P_{k-1} \cdot \underline{x}_k)^{-1} \end{cases} \quad (10.10)$$

No caso multivariável, pode-se fazer as mesmas considerações que no caso monovariável, no que concerne a estrutura do estimador e sua inicialização. Pode-se notar, no entanto, que, diferentemente da fórmula global, EQ. 10.8, as expressões da EQ. 10.10 não contêm inversão de matriz, cabendo lembrar, aqui, que a expressão $(1 + \underline{x}_k^T \cdot P_{k-1} \cdot \underline{x}_k)$ é escalar.

O que se passará, então, no caso singular como foi relatado, para o qual não há solução única? Na formulação global, a inversão da matriz fornece um índice de singularidade, ao passo que as fórmulas recursivas da EQ. 10.10 conduzem, em qualquer caso, a uma solução que depende das condições iniciais escolhidas e que pertence ao espaço solução.

10.1.1.3. INTERPRETAÇÃO ESTOCÁSTICA DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O método dos mínimos quadrados foi apresentado de forma determinística, sem se preocupar com as propriedades estatísticas das variáveis ou com o(s) ruído(s). No caso de o ruído de medição ser um ruído branco, gaussiano, de média nula, de variância σ^2 e independente das variáveis x , ou seja, $E[\underline{b}] = 0$, $E[\underline{b} \cdot \underline{b}^T] = \sigma^2 \cdot I$ e $E[\underline{b} \cdot \underline{x}^T] = 0$, pode-se caracterizar, no contexto

estatístico, a estimativa \hat{a}_k . Para isso, basta calcular-se a média e a variância do erro de estimação \tilde{a}_k :

$$\tilde{a}_k = \underline{a} - \hat{a}_k = [H_k^T \cdot H_k]^{-1} \cdot H_k^T \cdot (H_k \cdot \underline{a} - \underline{y}_k)$$

$$\tilde{a}_k = [H_k^T \cdot H_k]^{-1} \cdot H_k \cdot \underline{b}$$

Como apenas os elementos do vetor \underline{b} são aleatórios, a média, que é a própria expectativa do erro de estimação, pode ser calculada da seguinte maneira:

$$E[\tilde{a}_k] = [H_k^T \cdot H_k]^{-1} \cdot H_k \cdot E[\underline{b}] = 0$$

Assim, pode-se concluir que, se o ruído de medição tem média nula, a estimativa \hat{a}_k não tem tendência a desviar-se, de forma que sua média é igual ao valor buscado.

Para o cálculo da variância do erro de estimação, procede-se do seguinte modo:

$$\tilde{P}_k = E[\tilde{a}_k \cdot \tilde{a}_k^T]$$

$$\tilde{P}_k = (X_k^T \cdot X_k)^{-1} \cdot X_k^T \cdot E[\underline{b} \cdot \underline{b}^T] \cdot X_k \cdot (X_k^T \cdot X_k)^{-1}$$

$$\tilde{P}_k = \sigma^2 (X_k^T \cdot X_k)^{-1}$$

$$\tilde{P}_k = \sigma^2 \cdot P_k$$

Assim, a **matriz P_k** , que, a cada iteração, intervém no cálculo, à exceção de um coeficiente, é **a própria matriz de covariância do erro de estimação**. Ela fornece a precisão da estimação. Quando o número de observações tende a infinito, a variância do erro decresce sempre na direção do zero, da mesma forma que P_k . Na hipótese de um ruído de medição do tipo branco, de média nula, os mínimos quadrados fornecem, portanto, uma estimativa sem tendência ao desvio e bem consistente, ou seja, de variância tendente para o zero.

10.1.1.4. MÍNIMOS QUADRADOS COM PONDERAÇÃO

Se todas as observações não têm a mesma precisão, uma vez que são afetados por ruídos independentes, de magnitudes diferentes σ_i , pode-se levá-los em conta na estimação através de coeficientes de ponderação μ_i , usando-se o seguinte critério:

$$C = \sum_{i=1}^k \mu_i^2 \cdot (y_i - \underline{x}_i^T \cdot \underline{a})^2, \text{ com } \mu_i = \frac{1}{\sigma_i}$$

A solução deste problema é obtida a partir do caso geral, substituindo-se y_i por $\frac{y_i}{\sigma_i}$ e x_i por

$\frac{x_i}{\sigma_i}$, ou seja:

$$\hat{\underline{a}}_k = \left[\sum_{i=1}^k \frac{\underline{x}_i \cdot \underline{x}_i^T}{\sigma_i^2} \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^k \frac{\underline{x}_i^T \cdot y_i}{\sigma_i} \right]$$

Pode-se, também, escrever-se na forma recursiva:

$$\begin{cases} \hat{\underline{a}}_k = \hat{\underline{a}}_{k-1} + \underline{K}_k \cdot (y_k - \underline{x}_k^T \cdot \hat{\underline{a}}_{k-1}) \\ \underline{P}_k = \underline{P}_{k-1} - \underline{K}_k \cdot \underline{x}_k^T \cdot \underline{P}_{k-1} \text{ e} \\ \underline{K}_k = \underline{P}_{k-1} \cdot \underline{x}_k \cdot (\sigma_k^2 + \underline{x}_k^T \cdot \underline{P}_{k-1} \cdot \underline{x}_k)^{-1} \end{cases} \quad (10.11)$$

Como pode-se observar, apenas o ganho \underline{K}_k , que corrige o estimador e a matriz de covariância, é modificado.

10.1.1.5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Seja o seguinte sistema de equações:

$$2.\alpha + 3.\beta = 6$$

$$3.\alpha + 4.\beta = 7$$

$$\alpha + \beta = 2$$

Há mais equações do que incógnitas, não havendo, portanto, solução exata. No entanto, pode-se buscar uma solução que minimize um critério de afastamento quadrático:

$$\underline{C} = (\underline{y} - \underline{X} \cdot \underline{a})^T \cdot (\underline{y} - \underline{X} \cdot \underline{a})$$

onde:

$$\underline{y} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \underline{a} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}.$$

Este é o problema clássico dos mínimos quadrados, cuja solução é dada por:

$$\hat{\underline{a}} = [\underline{X}^T \cdot \underline{X}]^{-1} \cdot \underline{X}^T \cdot \underline{y}$$

De onde, tem-se:

$$\hat{\alpha} = -\frac{2}{3} = -0,66 \text{ e } \hat{\beta} = \frac{7}{3} = 2,33$$

Pode-se observar que a matriz $X^T X$ e sua inversa P são matrizes simétricas, positivas definidas.

Neste caso simples, o cálculo recursivo não apresenta vantagem. Seria o caso, se o número de equações fosse maior. Entretanto, a título de ilustração, utilizar-se-á a forma recursiva de cálculo nas três equações.

Pode-se inicializar os parâmetros desejados como nulos e, a título de se escolher um valor grande para a matriz P , tomar-se $P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$.

Tem-se, para a primeira iteração, que corresponde à primeira equação:

$$\underline{x}_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}, y_1 = 6, \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0,154 \\ 0,231 \end{Bmatrix} \text{ e } P_1 = \begin{bmatrix} 69,254 & -46,118 \\ -46,118 & 30,822 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 0,922 \\ \beta_1 = 1,384 \end{matrix}$$

Para a segunda iteração:

$$\underline{x}_2 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}, y_2 = 7, \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 2,196 \\ -1,421 \end{Bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} 18,12 & -13,04 \\ -13,04 & 9,42 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_2 = -1,935 \\ \beta_2 = 3,232 \end{matrix}$$

E, para a terceira iteração, tem-se:

$$\underline{x}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, y_3 = 2, \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 2,056 \\ -1,462 \end{Bmatrix} \text{ e } P_3 = \begin{bmatrix} 7,65 & -5,59 \\ -5,59 & 4,12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_3 = -0,49 \\ \beta_3 = 2,20 \end{matrix}$$

Assim, após três iterações, obtém-se $-0,49$, no lugar de $-0,66$, e $2,20$, ao invés de $2,33$. Esta diferença decorre da inicialização arbitrária que podem ser entendidas como decorrentes do tratamento de medidas anteriores.

Três iterações, como foi visto, não são suficientes para dissipar o efeito da inicialização utilizada.

Caso se tivesse escolhido $P_0 = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$, obter-se-ia uma melhor solução:

$$\hat{\alpha} = -0,64$$

$$\hat{\beta} = 2,315$$

10.1.2. O FILTRO DE KALMAN

O filtro de Kalman resolve de maneira elegante o problema da filtragem linear. Utilizando-se a noção de estado, o filtro de Kalman se apresenta sob a forma de um sistema de equações diferenciais ou recorrentes, o que facilita a resolução com o auxílio de uma calculadora ou de um computador. Sua realização, bem adaptada que é ao tratamento numérico em linha, fornece não apenas a estimação ótima, mas também a variância do erro de estimação. O filtro de Kalman leva a estimação ótima aos sistemas não estacionários, em presença de condições iniciais e entradas determinísticas. É uma ferramenta básica no domínio aeroespacial, onde é particularmente aplicada, seja para a determinação de órbitas, seja para a navegação.

Após a apresentação do modelo matemático do sistema, as formulações básicas do filtro discreto e contínuo serão estabelecidas. O filtro teoricamente estável pode divergir, quando da implementação numérica. A fim de contornar este problema, diferentes caminhos serão propostos.

10.1.2.1. POSIÇÃO DO PROBLEMA

O problema da estimação do estado $\underline{x}(t)$ de um sistema dinâmico submetido a entradas determinísticas e aleatórias, a partir de medidas $\underline{z}(t)$ associadas a ruídos, pode ser dividido, basicamente, em duas etapas. Entre uma medida e outra, o valor do vetor de estados é atualizado através da equação de modelagem, ou equação dinâmica ou ainda planta, do sistema. É a chamada atualização no tempo, ou estimação preditiva, ou simplesmente predição. Quando é feita uma medida, esta informação é levada em consideração juntamente com a da estimação preditiva, sendo, então, realizada a atualização por medida, ou estimação corrente ou ainda simplesmente estimação.

No caso discreto, chamar-se-á de $\underline{x}_{k/\ell}$ a melhor estimativa de \underline{x}_k , uma vez realizadas as observações $z_1, z_2 \dots z_\ell$, com $k > \ell$ correspondente à predição; $k = \ell$ correspondente à estimação. O objetivo final é obter-se uma estimativa ótima (estimação corrente), representada por $\hat{\underline{x}}(t_k)$ no caso contínuo e por $\hat{\underline{x}}_{k/k}$ no caso discreto, baseada numa estimativa obtida através da equação da dinâmica do processo (estimação preditiva), representada por $\hat{\underline{x}}(t_k)$ no caso contínuo e por $\hat{\underline{x}}_{k/k-1}$

no discreto, e em parâmetros de saída obtidos por um procedimento de medição, simbolizados por $\underline{y}(t_k)$ no caso contínuo e por $\underline{y}_{k/k}$ no discreto.

O filtro clássico se aplica aos sistemas dinâmicos lineares, contínuos ou discretos com ruídos de medição brancos. No entanto, formulações foram desenvolvidas de forma a se poder eliminar tais restrições. Neste trabalho, será apresentada tão somente a formulação para o caso de os ruídos de medida e do modelo do processo não serem independentes, uma vez que tal formulação foi utilizada na estimação dos desalinhamentos e dos “bias” dos acelerômetros e dos giroscópios.

10.1.2.2. O MODELO MATEMÁTICO

A evolução do estado do sistema é descrita por um sistema de equações diferenciais:

$$\dot{\underline{x}}(t) = F(t).\underline{x}(t) + \underline{u}(t) + \underline{v}(t) \quad (10.12)$$

onde:

\underline{x} é o vetor dos estados, de dimensão n .

$F(t)$ é uma matriz função de t , de dimensão $n \times n$.

\underline{u} é o vetor de entradas, função de t , conhecido.

\underline{v} é um ruído branco gaussiano, de dimensão n , de média nula, isto é, $E[\underline{v}(t)] = 0 \quad \forall t$ e covariância $E[\underline{v}(t).\underline{v}^T(t)] = Q(t).\delta(t-\tau)$, onde $Q(t)$ é uma matriz definida não negativa.

O estado inicial é aleatório, de características estatísticas conhecidas, gaussiano, de média $E[\underline{x}(t_0)] = m_0$, de covariância $E[(\underline{x}(t_0) - m_0).(\underline{x}(t_0) - m_0)^T] = A_0$ e independente do ruído \underline{v} .

O estado do sistema é observado através de m medidas $z(t)$, ligadas ao estado $x(t)$ pela equação:

$$\underline{z}(t) = H(t).\underline{x}(t) + \underline{w}(t) \quad (10.13)$$

onde $H(t)$ é uma matriz função de t , de dimensão $m \times n$ e \underline{w} , um ruído branco gaussiano, de dimensão m , independente de $\underline{v}(t)$ e de $\underline{x}(t_0)$, de média nula e de covariância $E[\underline{w}(t).\underline{w}^T(t)] = R(t).\delta(t-\tau)$, onde $R(t)$ é uma matriz definida positiva.

Este modelo é obtido seja através das leis físicas que regem o sistema, seja através da aplicação de técnicas de identificação experimental.

O modelo discreto que é utilizado de forma mais corrente é obtido seja diretamente através de uma modelagem discreta, seja pela discretização do modelo contínuo.

As equações tomam a seguinte forma:

$$\underline{x}_{k+1} = F_k \cdot \underline{x}_k + \underline{u}_k + \underline{v}_k \quad (10.14)$$

$$\underline{z}_k = H_k \cdot \underline{x}_k + \underline{w}_k \quad (10.15)$$

onde \underline{v}_k e \underline{w}_k são ruídos pseudo-brancos gaussianos, de média nula, tais que:

$$E[\underline{v}_k \cdot \underline{v}_j^T] = Q_k \cdot \delta_{kj}$$

$$E[\underline{w}_k \cdot \underline{w}_j^T] = R_k \cdot \delta_{kj}$$

$$E[\underline{v}_k \cdot \underline{w}_j^T] = 0 \cdot \delta_{kj} \quad \forall k, j$$

onde δ_{kj} é o delta de kronecker: $\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$

O estado inicial \underline{x}_0 é também uma variável gaussiana, independente dos ruídos \underline{u}_k e \underline{v}_k , de média m_0 e de matriz de covariância A_0 .

10.1.2.3. EXEMPLO DE PROBLEMA DE FILTRAGEM

Consideremos o lançamento de um foguete. As equações de sua trajetória, obtidas pela mecânica de vôo, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\dot{\underline{x}}(t) = F(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{u}(t) + \underline{v}(t)$$

onde:

$\underline{u}(t)$ representa os comandos e $\underline{v}(t)$ as perturbações, como o vento, por exemplo.

As condições iniciais são supostas conhecidas. Na FIG. 10.5 tem-se a representação da trajetória esperada, no que diz respeito à altura, segundo a modelagem do processo, da trajetória real, em altura, das medidas de altura do foguete realizadas, bem como as alturas reais correspondentes a cada uma destas medidas.

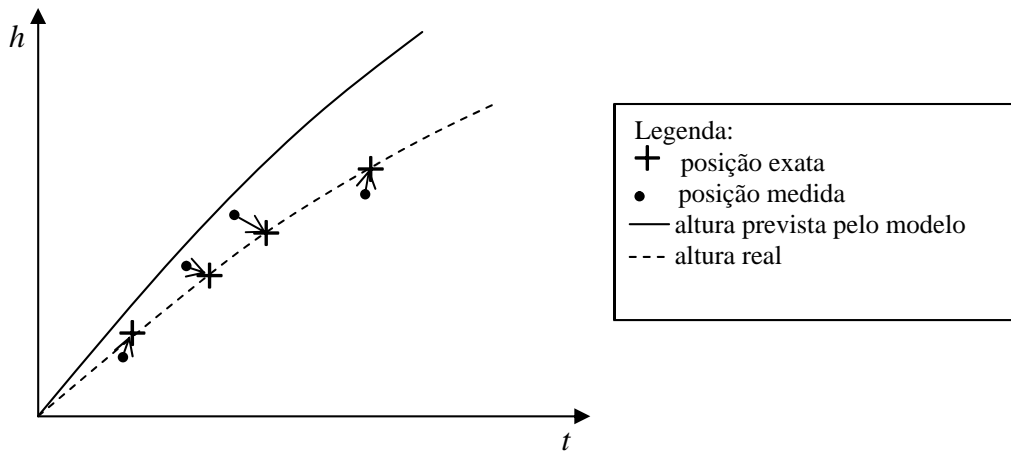


FIG. 10.5 – Trajetórias ideal e real, em altura, do foguete

Com a ajuda de um radar, é possível medir a posição do foguete, que se liga ao vetor de estados do sistema, através da EQ. 10.16:

$$\underline{z}(t) = H(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{w}(t) \quad (10.16)$$

onde $\underline{w}(t)$ representa os ruídos de medida. Sabendo-se que apenas os comandos $\underline{u}(t)$ e as observações $\underline{z}(t)$ são acessíveis, deseja-se determinar os estados, ou seja, a posição exata do foguete, a fim de corrigir sua trajetória:

Na ausência das perturbações $\underline{v}(t)$, ou seja, no caso de a modelagem do processo ser perfeita, a EQ. 10.16 toma a seguinte forma:

$$\dot{\underline{x}}(t) = F(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{u}(t) \quad (10.17)$$

A EQ. 10.17 é inteiramente determinística e conhecida. O vetor de estados $\underline{x}(t)$ do foguete pode, desta forma, ser calculado, através da resolução da mesma. $H(t) \cdot \underline{x}(t)$ fornece uma medida exata da posição, ao passo que $\underline{z}(t)$ fornece uma medida com erro. Neste caso, a observação não é útil na determinação do estado.

Em havendo perturbações $\underline{v}(t)$, isso significa que o modelo não traduz exatamente o processo, o que é geralmente o caso, pois, na prática, sempre há deficiências na modelagem, decorrentes de simplificações ou de perturbações não previstas. Neste caso, os estados são função destas perturbações e a observação contribui na determinação da trajetória do foguete, de sorte que o valor das contribuições depende da magnitude dos ruídos $\underline{v}(t)$ e $\underline{w}(t)$.

A partir dos valores de $\underline{u}(t)$ e $\underline{z}(t)$, o filtro deve fornecer uma estimação dos estados e de toda a combinação linear dos mesmos, como, em particular, das medidas.

10.1.2.4. A FORMULAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN

O Filtro de Kalman é uma generalização do método dos mínimos quadrados recursivo, acrescentando a possibilidade de o modelo ser variante no tempo.

A estimativa da variância mínima é obtida através da média condicional de $\underline{x}(t)$, dadas as observações $\underline{z}(\tau)$, que, no caso gaussiano, é igual à estimativa ótima linear. Busca-se, portanto, a estimativa de $\underline{x}(t)$, função do conjunto de observações: $\underline{z}(t) = \{ \underline{z}(\tau), 0 < \tau < t \}$, representada por $\hat{\underline{x}}(\underline{z}(t))$, que minimiza o critério do afastamento quadrático:

$$P(t) = E[(\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(\underline{z}(t)))^T \cdot A \cdot (\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(\underline{z}(t)))]$$

Ou seja, busca-se $E[\underline{x}/\underline{z}]$, que é a média condicional do vetor de estados $\underline{x}(t)$, dadas as observações $\underline{z}(\tau)$, para a qual, partindo-se da identidade $E[E[\underline{x}/\underline{z}]] = E[\underline{x}]$, pode-se escrever:

$$E[(\underline{x} - \hat{\underline{x}})^T \cdot A \cdot (\underline{x} - \hat{\underline{x}})] = E[(\underline{x} - \hat{\underline{x}})^T \cdot A \cdot (\underline{x} - \hat{\underline{x}}) / \underline{z}]$$

ou:

$$E[(\underline{x} - \hat{\underline{x}})^T \cdot A \cdot (\underline{x} - \hat{\underline{x}}) / \underline{z}] = (\hat{\underline{x}} - E[\underline{x}/\underline{z}])^T \cdot A \cdot (\hat{\underline{x}} - E[\underline{x}/\underline{z}]) + E[(\underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}) / \underline{z}] - E[\underline{x}/\underline{z}]^T \cdot A \cdot E[\underline{x}/\underline{z}] \quad (10.18)$$

Para minimizar o critério, basta minimizar a EQ. 10.18 que é sempre positiva. Este mínimo é obtido por:

$$\hat{\underline{x}}(t) = E[\underline{x}(t) / \underline{z}(t)]$$

Esta estimativa não tem tendência ao desvio, ou seja:

$$E[\hat{\underline{x}}] = E[E[\underline{x}(t) / \underline{z}(t)]] = E[\underline{x}]$$

A formulação do filtro de Kalman é portanto obtida simplesmente pelo cálculo da média condicional.

Nota:

A estimativa é independente da matriz de ponderação A . Portanto, não é possível escolher-se pesos que permitam a estimação de certas variáveis de estado melhor que de outras.

Antes de estabelecer-se rigorosamente o filtro de Kalman, serão obtidas diferentes fórmulas, através de considerações elementares, as quais apresentam a vantagem de permitirem uma melhor compreensão. A que será apresentada na seqüência será útil na implemetação do filtro.

10.1.2.4.1. DETERMINAÇÃO INTUITIVA DO FILTRO

A fim de se chegar à formulação definitiva do filtro, a estimação será considerada em dois instantes diferentes, um antes e outro depois da medida z_{k+1} . Suponha-se que o estado \underline{x}_k , no instante k , seja perfeitamente conhecido; assim, o estado no instante $k+1$ é dado pela equação de evolução:

$$\underline{x}_{k+1} = F_k \cdot \underline{x}_k + \underline{u}_k + \underline{v}_k$$

Uma vez que o ruído \underline{v}_k é branco, de média nula, independente dos \underline{x}_i precedentes, sua melhor predição é nula, enquanto que a melhor **predição** do estado \underline{x}_{k+1} é dada por:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1} = F_k \cdot \underline{x}_k + \underline{u}_k$$

A variância do erro de predição é igual à deste ruído \underline{v}_k (ruído decorrente de imperfeição na modelagem do processo):

$$E[(\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1/k}) \cdot (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1/k})^T] = E[\underline{v}_k \cdot \underline{v}_k^T] = Q_k$$

Caso, no instante k , não se disponha do valor preciso do estado, mas tão somente uma estimação $\hat{\underline{x}}_{k/k}$, não havendo mais observações entre os instantes k e $k+1$, não é possível melhorar esta estimação e a melhor predição (também chamada, como visto, de estimação preditiva ou de atualização no tempo) é dada por:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1/k} = F_k \cdot \hat{\underline{x}}_{k/k} + \underline{u}_k \quad (10.19)$$

A predição da variância do erro de estimação $P_{k+1/k}$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_{k+1/k} &= E[(\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1/k}) \cdot (\underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1/k})^T] = \\ &= E\left[\left((F_k \cdot \underline{x}_k + \underline{u}_k + \underline{v}_k) - (F_k \cdot \hat{\underline{x}}_{k/k} + \underline{u}_k) \right) \cdot \left((F_k \cdot \underline{x}_k + \underline{u}_k + \underline{v}_k) - (F_k \cdot \hat{\underline{x}}_{k/k} + \underline{u}_k) \right)^T \right] \\ &= E\left[(F_k \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k}) + \underline{v}_k) \cdot (F_k \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k}) + \underline{v}_k)^T \right] \end{aligned}$$

Como os ruídos de medida, \underline{v}_k , e os ruídos da modelagem do processo, \underline{w}_k , não são correlacionados, de sorte que $\hat{\underline{x}}_{k/k}$ e \underline{w}_k tampouco são correlacionados, o produto cruzado dos termos é nulo e, portanto, pode-se escrever o seguinte:

$$\begin{aligned} P_{k+1/k} &= E\left[F_k \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k}) \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k})^T \cdot F_k^T + \underline{v}_k \cdot \underline{v}_k^T \right] = \\ &= F_k \cdot E\left[(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k}) \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k})^T \right] \cdot F_k^T + E\left[\underline{v}_k \cdot \underline{v}_k^T \right] \end{aligned}$$

Como $E\left[(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k}) \cdot (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_{k/k})^T \right] = P_{k/k}$ e $E\left[\underline{v}_k \cdot \underline{v}_k^T \right] = Q_k$, tem-se, portanto:

$$P_{k+1/k} = F_k \cdot P_{k/k} \cdot F_k^T + Q_k$$

A predição da variância do erro de estimação depende, portanto, da variância do erro no instante k , $P_{k/k}$, que é atualizada no tempo até o instante $k+1$, e da variância do ruído do modelo Q_k .

A predição da observação pode ser obtida através dos valores da predição dos estados, ou seja:

$$\hat{z}_{k+1/k} = H_{k+1} \cdot \hat{x}_{k+1/k}$$

Uma vez efetuada a medida z_{k+1} , no instante $k+1$, a diferença entre o valor medido z_{k+1} e o valor predito $\hat{z}_{k+1/k}$ fornece uma indicação do erro de estimação, a partir do qual pode-se melhorar a estimação, caso se conheça a variância dos ruídos. Assim:

- se o ruído de medida é nulo, a melhor estimativa de $H_{k+1} \cdot x_{k+1}$ é dada pela medida de z_{k+1} ;
- se a predição da variância do erro $P_{k+1/k}$ é nula, não há erro de predição e a melhor estimativa de $\hat{x}_{k+1/k+1}$ é dada pela predição, sem levar em conta a observação z_{k+1} . É o caso de ruído v_k nulo e condições iniciais absolutamente precisas;
- se a variância do ruído e $P_{k+1/k}$ são diferentes de zero, efetuar-se-á uma correção proporcional ao afastamento entre o valor medido z_{k+1} e o valor predito $\hat{z}_{k+1/k}$:

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} \cdot (z_{k+1} - \hat{z}_{k+1/k})$$

onde o ganho K_{k+1} depende das variâncias dos ruídos.

No método dos mínimos quadrados com ponderação (item 10.1.1.4), foi visto que uma nova medida z_k se traduzia por uma correção da estimação; estimação esta que dependia da precedente e da variância do ruído. Esta é a idéia de $\hat{z}_{k+1/k}$, que é a medida prevista, baseada não numa medição propriamente dita, mas no valor predito dos estados ($\hat{x}_{k+1/k}$). Aplicando, portanto, as fórmulas correspondentes a uma iteração, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} \cdot (z_{k+1} - \hat{z}_{k+1/k}) \end{array} \right. \quad (10.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - K_{k+1} \cdot H_{k+1} \cdot P_{k+1/k} \end{array} \right. \text{ e} \quad (10.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{k+1} = P_{k+1/k} \cdot H_{k+1}^T \cdot (H_{k+1} \cdot P_{k+1/k} \cdot H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \end{array} \right. \quad (10.22)$$

Dispõe-se, assim, da estimativa e de sua variância no instante $k+1$, feitas as observações, ou medidas, $z_1 \dots z_{k+1}$.

As EQ. 10.20 à 10.22 constituem as equações do filtro de Kalman discreto.

10.1.2.4.2. O FILTRO DE KALMAN DISCRETO

Relembrando as equações do modelo:

$$\underline{x}_{k+1} = F_k \cdot \underline{x}_k + \underline{u}_k + \underline{v}_k \quad (10.23)$$

$$\underline{z}_k = H_k \cdot \underline{x}_k + \underline{w}_k \quad (10.24)$$

onde \underline{v}_k , \underline{w}_k e \underline{x}_0 são variáveis gaussianas independentes, tais que:

$$\begin{aligned} E[\underline{x}_0] &= m_0 & \text{cov}(\underline{x}_0) &= \Lambda_0 \\ E[\underline{v}_k] &= 0 & E[\underline{v}_k \cdot \underline{v}_j^T] &= Q_k \cdot \delta_{kj} \\ E[\underline{w}_k] &= 0 & E[\underline{w}_k \cdot \underline{w}_j^T] &= R_k \cdot \delta_{kj} \end{aligned}$$

Os estados \underline{x}_k e a observação \underline{z}_k , que podem ser obtidas de forma linear, a partir dos ruídos \underline{v} , \underline{w} e das condições iniciais gaussianas, são também gaussianos.

$$\hat{\underline{x}}_{k+1/k+1} = \hat{\underline{x}}_{k+1/k} + K_{k+1} \cdot (\underline{z}_{k+1} - \hat{\underline{z}}_{k+1/k}),$$

com:

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} \cdot H_{k+1}^T \cdot (H_{k+1} \cdot P_{k+1/k} \cdot H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}$$

E a variância do erro de estimação:

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - K_{k+1} \cdot H_{k+1} \cdot P_{k+1/k} \quad (10.25)$$

A EQ. 10.25 pode também ser escrita sob a seguinte forma simétrica:

$$P_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1} \cdot H_{k+1}) \cdot P_{k+1/k} \cdot (I - K_{k+1} \cdot H_{k+1})^T + K_{k+1} \cdot R_{k+1} \cdot R_{k+1}^T \quad (10.26)$$

A EQ. 10.26 fornece a variância do erro de estimação, quando a estimativa é linear, para qualquer valor do ganho K_{k+1} . Tem-se ainda que $P_{k+1/k+1}$, que é uma matriz simétrica positiva definida, aparece como a soma de duas matrizes simétricas positivas definidas. Esta propriedade pode ser interessante, por ocasião da implementação.

Finalmente, pode-se escrever as equações do filtro de Kalman discreto:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\underline{x}}_{k+1/k+1} &= \hat{\underline{x}}_{k+1/k} + K_{k+1} \cdot (\underline{z}_{k+1} - H_{k+1} \cdot \hat{\underline{x}}_{k+1/k}) \\ \hat{\underline{x}}_{k+1/k} &= F_k \cdot \hat{\underline{x}}_{k/k} + \underline{u}_k \\ K_{k+1} &= P_{k+1/k} \cdot H_{k+1}^T \cdot (H_{k+1} \cdot P_{k+1/k} \cdot H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \\ P_{k+1/k+1} &= (I - K_{k+1} \cdot H_{k+1}) \cdot P_{k+1/k} \\ P_{k+1/k} &= F_k \cdot P_{k/k} \cdot F_k^T + Q_k \end{aligned} \right. \quad (10.27)$$

tendo como condições iniciais:

$$\hat{x}_{0/0} = E(x_0) = m_0$$

$$P_{0/0} = Cov(x_0) = \Lambda_0$$

Esta formulação do filtro evoca uma série de observações:

- O filtro obtido é linear e pode ser esquematizado pela FIG. 10.6. Ele permite um cálculo recursivo no tempo real de estimação, sem a necessidade de armazenamento das observações e comandos passados.

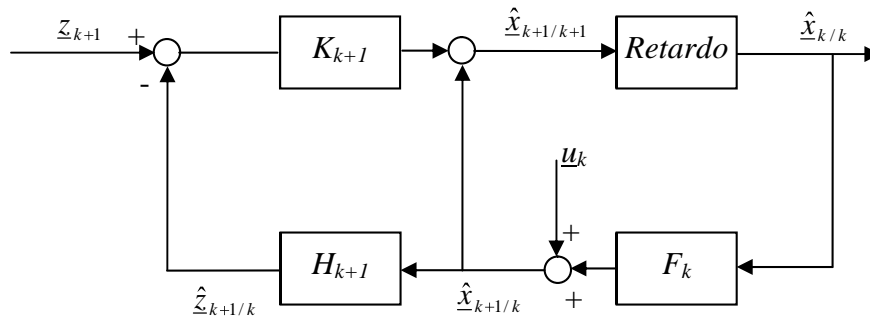


FIG. 10.6 – Estrutura do filtro discreto

- Pode-se distinguir, nas equações do filtro, antes de cada observação, a **predição**, segundo a qual a evolução da estimativa é descrita através das mesmas equações do sistema:

$$\hat{x}_{k+1/k} = F_k \cdot \hat{x}_{k/k} + u_k$$

$$\hat{z}_{k+1/k} = H_{k+1} \cdot \hat{x}_{k+1/k}$$

E, depois de cada observação, a **estimação**.

- Note-se que, na resolução do filtro de Kalman discreto, supõe-se a existência da inversa da matriz $H_{k+1} \cdot P_{k+1/k} \cdot H_{k+1}^T + R_{k+1}$. Esta inversa não tem que necessariamente existir no caso do problema singular ($R_k = 0$). A formulação obtida pode ser utilizada neste caso, contanto que a inversa seja substituída pela pseudo-inversa.

10.1.2.4.3. O FILTRO DE KALMAN CONTÍNUO

Agora, as equações de evolução e de observação são ambas contínuas:

$$\dot{x}(t) = F(t) \cdot x(t) + u(t) + v(t) \quad (10.28)$$

$$z(t) = H(t) \cdot x(t) + w(t) \quad (10.29)$$

com:

$$\begin{aligned}
 E[\underline{v}(t)] &= 0 & E[\underline{v}(t).\underline{v}^T(t)] &= Q(t).\delta(t - \tau) \\
 E[\underline{w}(t)] &= 0 & E[\underline{w}(t).\underline{w}^T(t)] &= R(t).\delta(t - \tau) \\
 E[\underline{x}(t_0)] &= m_0 & \text{cov}(\underline{x}(t_0)) &= \Lambda_0 \\
 E[\underline{v}(t).\underline{w}^T(t)] &= E[\underline{v}(t).\underline{x}^T(t_0)] = E[\underline{w}(t).\underline{x}^T(t_0)] &= 0
 \end{aligned}$$

Na hipótese de os ruídos brancos $\underline{v}(t)$ e $\underline{w}(t)$ serem ruídos gaussianos, a estrutura do filtro ótimo pode ser obtida a partir do caso precedente discreto, passando-se ao limite. As equações do filtro de Kalman contínuo podem ser obtidas mais simplesmente, substituindo-se a hipótese gaussiana pela busca de um filtro linear sem tendência ao desvio, com variância mínima.

O filtro linear é da forma:

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = A(t).\hat{\underline{x}}(t) + B(t).\underline{u}(t) + K(t).\underline{v}(t) \quad (10.30)$$

E a estimativa é sem tendência ao desvio, ou seja:

$$\begin{aligned}
 E[\hat{\underline{x}}(t)] &= E[\underline{x}(t)] \\
 E[\dot{\hat{\underline{x}}}(t)] &= E[\dot{\underline{x}}(t)]
 \end{aligned}$$

Assim, tomando-se a média da EQ. 10.28 e EQ. 10.30, tem-se:

$$A(t).E[\underline{x}(t)] + B(t).\underline{u}(t) + K(t).H(t).E[\underline{x}(t)] = F(t).E[\underline{x}(t)] + \underline{u}(t)$$

Donde, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 A(t) &= F(t) - K(t).H(t) \\
 B(t) &= I
 \end{aligned}$$

E a expressão do filtro:

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = F(t).\hat{\underline{x}}(t) + \underline{u}(t) + K(t).[\underline{z}(t) - H(t).\hat{\underline{x}}(t)] \quad (10.31)$$

onde a matriz de ganho $K(t)$ deve minimizar a variância do erro de estimação $\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \hat{\underline{x}}$. Este erro, $\tilde{\underline{x}}$, evolui segundo a equação diferencial EQ. 10.32, obtida a partir das EQ. 10.28, EQ. 10.29 e 10.31:

$$\dot{\tilde{\underline{x}}}(t) = (F(t) - K(t).H(t)).\tilde{\underline{x}}(t) + \underline{v}(t) - K(t).\underline{w}(t) \quad (10.32)$$

$\tilde{\underline{x}}(t)$ é, portanto, a saída de um sistema linear que tem como entrada o ruído branco $\underline{v}(t)$ - $K(t).\underline{w}(t)$, que tem como variância $Q + KRK^T$.

A variância P do erro $\tilde{\underline{x}}$ é a solução da equação diferencial:

$$\dot{P}(t) = (F - K.H).P + P.(F - K.H)^T + Q + K.R.K^T \quad (10.33)$$

A EQ. 10.33 pode também ser escrita reagrupando-se todos os termos em K:

$$\dot{P}(t) = F.P + P.F^T - P.H^T .R^{-1} .H.P + Q + (K - P.H^T .R^{-1}).R. + (K - P.H^T .R^{-1})^T$$

Pode-se mostrar que, para minimizar a variância do erro, basta minimizar \dot{P} , o que equivale a escolher:

$$K(t) = P(t).H^T (t).R^{-1}(t)$$

Assim, tem-se as seguintes equações do filtro:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= F(t).\hat{x}(t) + \underline{u}(t) + K(t).(z(t) - H(t).\hat{x}(t)) \\ \dot{P}(t) &= F(t).P(t) + P(t).F^T (t) - P(t).H^T (t).R^{-1}(t).H(t).P(t) + Q(t) \\ K(t) &= P(t).H^T (t).R^{-1}(t) \end{aligned} \quad (10.34)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\hat{x}(t_0) = m_0$$

$$P(t_0) = \Lambda_0$$

A equação de evolução de $P(t)$ é uma equação de Ricatti que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{P}(t) = F(t).P(t) + P(t).F^T (t) - K(t).R(t).K^T (t) + Q(t)$$

A estrutura do filtro de Kalman contínuo pode ser representada conforme a FIG. 10.7. Pode-se encontrar aí ainda a dinâmica do sistema corrigida pelo erro de estimação da medida:

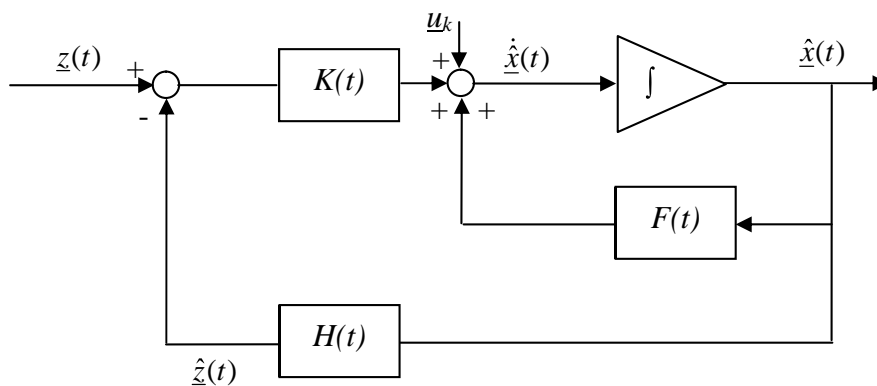


FIG. 10.7 – Estrutura do filtro contínuo

10.1.2.4.4. GENERALIZAÇÃO DO MODELO DO PROCESSO

As fórmulas precedentes obtidas são válidas para o sistema descrito no item 10.1.2.1, que supõe, em particular, ruídos associados aos estados independentes dos ruídos associados às observações, ou medidas, ruídos brancos associados às observações, e uma matriz de covariância dos ruídos associados às observações positiva definida. Estas restrições podem ser retiradas, modificando-se as equações do filtro. O filtro de Kalman pode até mesmo ser modificado, visando a utilização em sistemas não lineares ou em modelos mal definidos. Neste trabalho será apresentado tão somente a formulação que permite o uso de ruídos de medidas e de modelagem correlacionados, uma vez que tal formulação foi a empregada na estimação dos desalinhamentos e “bias” dos acelerômetros e dos giroscópios.

Na generalização que será levada a efeito na seqüência, visando uma melhor facilidade de compreensão, partir-se-á da associação de estimação linear com a idéia da projeção de um vetor no plano que contém as observações.

10.1.2.4.4.1. RUÍDOS CORRELACIONADOS

10.1.2.4.4.1.1. ESTIMAÇÃO LINEAR COMO UM PROBLEMA DE PROJEÇÃO

Um estimador linear $g(Y)$, que leva em consideração n observações $Y(n)$, tem a seguinte forma:

$$g(Y) = \alpha_1.Y(1) + \alpha_2.Y(2) + \dots + \alpha_n.Y(n) \quad (10.35)$$

de onde, fazendo-se $\alpha_0 = -1$ e $Y(0) = X$, tem-se:

$$\begin{aligned} E[(X - g(Y))^2] &= E\left[\left(X - \sum_{i=1}^n \alpha_i.Y(i)\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i.Y(i)\right)^2\right] = \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_i.\alpha_j.E[Y(i).Y(j)] \end{aligned}$$

e, portanto, a minimização de $E[(X-g(Y))^2]$ requer apenas o cálculo de médias e covariâncias, ou seja, primeiro e segundo momentos. Estimadores não lineares usualmente requerem o cálculo de momentos de ordem superior.

Considerando-se o caso particular da EQ. 10.35 para $n=1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
E[(X - g(Y))^2] &= E[(X - \alpha_1 Y(1))^2] = E[X^2 - 2\alpha_1 XY(1) + \alpha_1^2 Y^2(1)] = \\
&= E[X^2] - 2\alpha_1 E[XY(1)] + \alpha_1^2 E[Y^2(1)]
\end{aligned} \tag{10.36}$$

O α_1 que minimiza a expressão é obtido igualando-se a derivada da expressão em relação a α_1 a zero:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \{E[(X - g(Y))^2]\} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \{E[X^2] - 2\alpha_1 E[XY(1)] + \alpha_1^2 E[Y^2(1)]\} = 0 \\
-2E[XY(1)] + 2\alpha_1 E[Y^2(1)] &= 0 \\
\Rightarrow \alpha_1 &= \frac{E[XY(1)]}{E[Y^2(1)]}, \quad E[Y^2(1)] \neq 0
\end{aligned} \tag{10.37}$$

Seja:

$$\alpha_1 = \rho \frac{\sigma_0}{\sigma_1}, \text{ onde } \sigma_0^2 = E[X^2], \sigma_1^2 = E[Y^2(1)] \text{ e } \rho = \frac{E[XY(1)]}{\sigma_0 \sigma_1} \text{ (coeficiente de correlação).}$$

A estimativa \hat{X} é, portanto, dada por:

$$\hat{X} = g(Y) = \rho \frac{\sigma_0}{\sigma_1} Y(1) \tag{10.38}$$

O erro de estimação é dado por:

$$\tilde{X} = X - \hat{X} = X - \rho \frac{\sigma_0}{\sigma_1} Y(1) = \sigma_0 \left(\frac{X}{\sigma_0} - \rho \frac{Y(1)}{\sigma_1} \right) \tag{10.39}$$

Pode-se, assim, avaliar:

$$\begin{aligned}
E[\tilde{X} Y(1)] &= E[(X - \hat{X}) Y(1)] = E[X Y(1) - \hat{X} Y(1)] = \\
&= E[X Y(1)] - \rho \frac{\sigma_0}{\sigma_1} E[Y^2(1)] = \\
&= \rho \sigma_0 \sigma_1 - \rho \sigma_0 \sigma_1 = 0
\end{aligned} \tag{10.40}$$

Ou seja, \tilde{X} e $Y(1)$ são não correlacionados.

Interpretação da EQ. 10.40:

Sejam os vetores \underline{v}_0 e \underline{v}_1 .

Denotando-se por \underline{u}_{v_1} o vetor unitário na direção \underline{v}_1 , a projeção $\hat{\underline{v}}_0$ de \underline{v}_0 em \underline{v}_1 é dada por:

$$\hat{\underline{v}}_0 = (\|\underline{v}_0\| \cos \theta) \underline{u}_{v_1} = (\|\underline{v}_0\| \cos \theta) \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|} = \rho \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \underline{v}_1 \tag{10.41}$$

Comparando-se a EQ. 10.40 com a EQ. 10.41 e interpretando-se as variáveis aleatórias X e $Y(I)$ como sendo vetores \underline{v}_0 e \underline{v}_I , com normas $\sigma_0 = \sqrt{E[X^2]}$ e $\sigma_1 = \sqrt{E[Y^2(I)]}$, e formando um ângulo $\theta = \arccos \rho$, conclui-se que a melhor estimativa de X pode ser entendida como a projeção de X em $Y(I)$.

Teorema 1:

Sejam $X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$ e $Y = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_\ell \end{Bmatrix}$ variáveis aleatórias, com componentes possuindo média nula e

variância finita. Então, para $j=1,2,\dots,n$, há uma única variável aleatória X_j , tal que:

a) $\hat{X}_j \in S(Y)$, ou seja, uma estimativa de X que pertença ao espaço dos componentes de Y ; e

b) $(X_j - \hat{X}_j) \perp S(Y)$, ou seja, interpretando $(X_j - \hat{X}_j)$ como um vetor, este é ortogonal ao plano que contém os componentes de Y .

Sendo $\hat{X} = \begin{Bmatrix} \hat{X}_1 \\ \vdots \\ \hat{X}_n \end{Bmatrix}$ a melhor estimativa baseada no critério do afastamento quadrático e

$E[Y.Y^T]$ não singular, tem-se:

$$\hat{X} = E[X.Y^T].(E[Y.Y^T])^{-1}.Y \quad (10.42)$$

Verificação: Como se está supondo estimadores lineares, a estimativa \hat{X} pode ser escrita como se segue:

$$\hat{X} = M.Y, \text{ onde } M \text{ é uma matriz } n \times \ell.$$

Assim, devido a (b), para quaisquer $\beta \in R^n$ e $\gamma \in R^\ell$, tem-se:

$$\begin{aligned} E[\beta^T.(X - M.Y).(Y^T.Y)^T] = 0 &\Rightarrow \beta^T.E[(X - M.Y).Y^T].\gamma = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E[X.Y^T] - M.E[Y.Y^T] = 0 \end{aligned} \quad (10.43)$$

Sendo a última implicação devida ao fato de que β e γ são genéricos. Logo, se $(E[Y.Y^T])^{-1}$ existir, da EQ. 10.43, tem-se:

$$M = E[X.Y^T].(E[Y.Y^T])^{-1}$$

Comentários sobre o teorema:

a) A estimativa \hat{X} pode ser considerada a projeção de X em $S(Y)$;

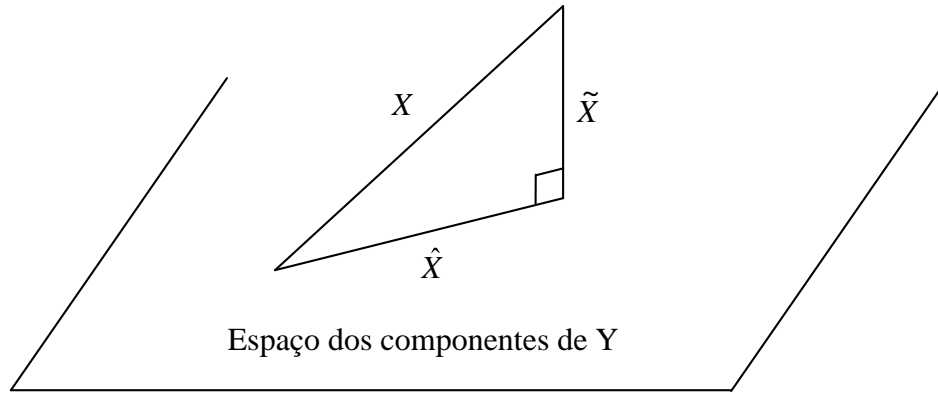


FIG. 10.8 – Estimativa de uma grandeza interpretada como uma projeção da mesma

b) Para o caso particular de $n=1$ e $\ell=1$, isto é, $X=X_1$ e $Y=Y_1$, tem-se $M = \frac{E[X_1 \cdot Y_1^T]}{E[Y_1^2]}$,

conforme visto nas EQ 10.37 e 10.38;

c) Caso $E[X_i] = m_{x_i}$ e $E[Y_i] = m_{y_i}$, então:

$$\hat{X} = E[(X - m_x) \cdot (Y - m_y)^T] \cdot (E[(Y - m_y) \cdot (Y - m_y)^T])^{-1} + m_x$$

10.1.2.4.4.1.2. FORMA RECURSIVA PARA A ESTIMAÇÃO LINEAR

A forma recursiva é importante, por exemplo, em aplicações em tempo real. De modo a se

determinar tal forma, considere-se k leituras do vetor $Y = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_\ell \end{Bmatrix}$, definido pelo teorema 1, tenham

sido efetuadas:

$$Y(1) = \begin{Bmatrix} Y_1(1) \\ \vdots \\ Y_\ell(1) \end{Bmatrix}, Y(2) = \begin{Bmatrix} Y_1(2) \\ \vdots \\ Y_\ell(2) \end{Bmatrix}, \dots, Y(k) = \begin{Bmatrix} Y_1(k) \\ \vdots \\ Y_\ell(k) \end{Bmatrix}.$$

Seja também:

$S(Y_k)$, com $Y_k=[Y(1) Y(2) \dots Y(k)]$ o subespaço linear gerado pelas observações até o instante

k . Conforme visto no item anterior, a melhor estimativa $\hat{X} = \begin{Bmatrix} \hat{X}_1 \\ \vdots \\ \hat{X}_n \end{Bmatrix}$ de X , dado Y_k é dada pela

projeção de X em $S(Y_k)$.

Seja agora o cenário mostrado na FIG. 10.9.

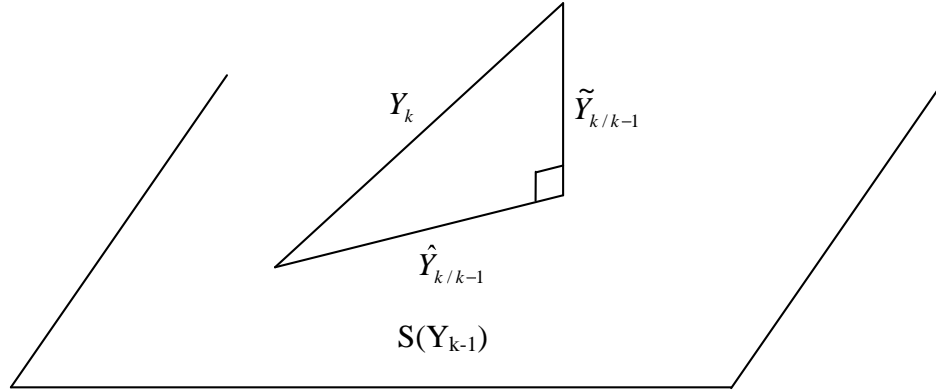


FIG. 10.9 – Subespaço das observações

Assim, qualquer Z em $S(Y_k)$ pode ser escrito, de modo único, da seguinte forma:

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad (10.44)$$

$$\text{Com } Z_1 \in S(Y_{k-1}) \text{ e } Z_2 = \text{combinação linear de } \{\tilde{Y}_{i_k/k-1}, i = 1, 2, \dots, \ell\} \quad (10.45)$$

Tomando-se agora:

$$Z = \hat{X}_{i_k} = Z_1 + Z_2 \quad (10.46)$$

Como $\tilde{X}_{i_k} = X_{i_k} - \hat{X}_{i_k}$, pode-se escrever:

$$X_{i_k} = \hat{X}_{i_k} + \tilde{X}_{i_k} = Z_1 + Z_2 + \tilde{X}_{i_k}, \text{ com } Z_1 \in S(Y_{k-1}) \text{ e } (Z_2 + \tilde{X}_{i_k}) \perp S(Y_{k-1}).$$

Pode-se, adicionalmente, escrever:

$$X_{i_{k-1}} = \hat{X}_{i_{k-1}} + \tilde{X}_{i_{k-1}}, \text{ com } \hat{X}_{i_{k-1}} \in S(Y_{k-1}) \text{ e } \tilde{X}_{i_{k-1}} \perp S(Y_{k-1}).$$

E, como a decomposição é única, tem-se:

$$Z_1 = \hat{X}_{i_{k-1}} \quad (10.47)$$

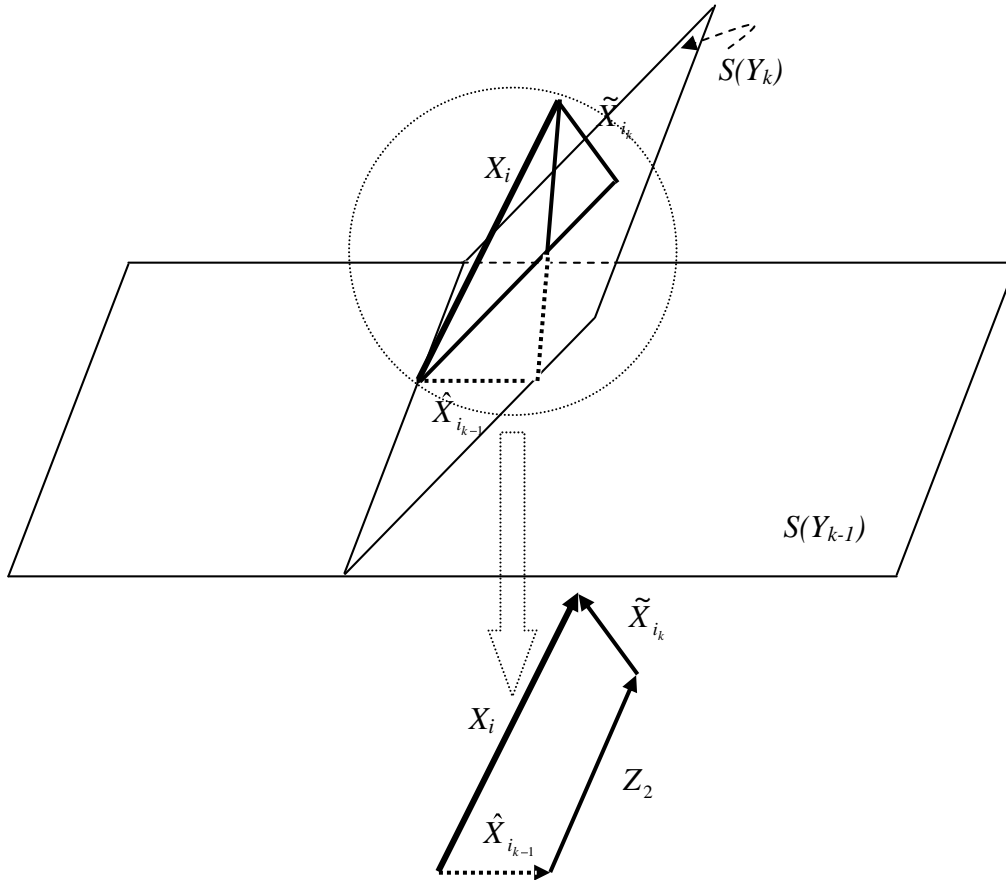


FIG. 10.10 – Interpretação vetorial de Z_2

No que se refere a Z_2 , na EQ. 10.46, observando-se a FIG. 10.10, pode-se verificar que:

$$X_i = \underbrace{X_{i_{k-1}}}_{Z_1} + Z_2 + \tilde{X}_{i_k}$$

Portanto, Z_2 é a projeção de X_i em $S(\tilde{Y}_{k/k-1})$.

Desta forma, pode-se escrever:

$$\hat{X}_{i_k} = \hat{X}_{i_{k-1}} + (\text{projeção de } X_i \text{ em } S(\tilde{Y}_{k/k-1})) \quad (10.48)$$

Logo, da EQ. 10.42, da EQ. 10.48 e empilhando \hat{X}_{i_k} , $i=1, 2, \dots, n$, no vetor \hat{X}_k , pode-se escrever:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} + (E[X \cdot \tilde{Y}_{k/k-1}^T])(E[\tilde{Y}_{k/k-1} \cdot \tilde{Y}_{k/k-1}^T])^{-1} \cdot \tilde{Y}_{k/k-1} \quad (10.49)$$

ou ainda:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} + (E[X \cdot \tilde{Y}_{k/k-1}^T])(E[\tilde{Y}_{k/k-1} \cdot \tilde{Y}_{k/k-1}^T])^{-1} \cdot (Y_k - \hat{Y}_{k/k-1}) \quad (10.50)$$

Assim, a EQ. 10.50 corresponde a uma fórmula recursiva para a determinação da estimativa X , caso $\hat{Y}_{k/k-1}$ dependa apenas de $\hat{X}_{k/k-1}$.

10.1.2.4.4.1.3. FILTRO DE KALMAN

Seja o seguinte modelo dinâmico:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= F_k \cdot \underline{x}_k + G_k \cdot \underline{w}_k \\ \underline{y}_k &= H_k \cdot \underline{x}_k + N_k \cdot \underline{v}_k \end{aligned} \quad (10.51)$$

onde:

$$\begin{aligned} E[\underline{w}_k] &= 0 & E[\underline{w}_k \cdot \underline{w}_j^T] &= R_k \cdot \delta_{kj} \\ E[\underline{v}_k] &= 0 & E[\underline{v}_k \cdot \underline{v}_j^T] &= Q_k \cdot \delta_{kj} \\ E[\underline{w}_k \cdot \underline{v}_j^T] &= S_k \cdot \delta_{kj} \text{ (ruídos correlacionados)} \\ E[\underline{x}_k \cdot \underline{v}_k^T] &= 0 & E[\underline{x}_k \cdot \underline{w}_j^T] &= Q_k \cdot \delta_{kj} \end{aligned} \quad (10.52)$$

De modo a facilitar a obtenção das equações do Filtro de Kalman, convém atentar para a FIG. 10.11, relativa às projeções de \underline{x}_k em $S(Y_{k-1})$ e $S(Y_k)$.

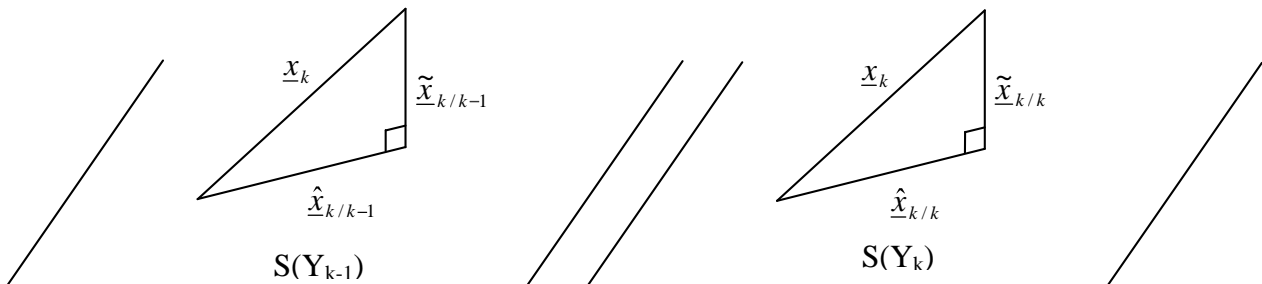


FIG. 10.11– Projeções de \underline{x}_k em $S(Y_{k-1})$ e $S(Y_k)$

A projeção $\hat{Y}_{k/k-1}$ de Y_k em $S(Y_{k-1})$ é igual à projeção de $H.X$ em $S(Y_{k-1})$, uma vez que $W_k \perp S(Y_{k-1})$. Portanto, pode-se escrever:

$$\hat{y}_{k/k-1} = H \cdot \hat{x}_{k/k-1} \quad (10.53)$$

Como $\tilde{y}_{k/k-1} = y_k - \hat{y}_{k/k-1}$, tem-se:

$$\tilde{y}_{k/k-1} = (H \cdot x_k + G v_k) - H \cdot \hat{x}_{k/k-1} = H \cdot \tilde{x}_{k/k-1} + G v_k \quad (10.54)$$

Pode-se perceber que:

$$\text{Projeção de } x_k \text{ em } S(Y_k) = \text{Projeção de } x_k \text{ em } S(Y_{k-1}) + \text{Projeção de } x_k \text{ em } S(\tilde{y}_{k/k-1}) \quad (10.55)$$

ou seja:

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + (E[x_k \cdot \tilde{y}_{k/k-1}^T]) (E[\tilde{y}_{k/k-1} \cdot \tilde{y}_{k/k-1}^T])^{-1} \cdot \tilde{y}_{k/k-1} \quad (10.56)$$

O problema agora se resume em calcular $E[x_k \cdot \tilde{y}_{k/k-1}^T]$ e $E[\tilde{y}_{k/k-1} \cdot \tilde{y}_{k/k-1}^T]$.

1) Primeiramente, tome-se o cálculo de $E[x_k \cdot \tilde{y}_{k/k-1}^T]$:

Como:

$$\tilde{y}_{k/k-1} = H \cdot \tilde{x}_{k/k-1} + F v_k \quad (10.57)$$

e, de acordo com a figura,

$$E[x_k \cdot \tilde{x}_{k/k-1}^T] = E[(\hat{x}_{k/k-1} + \tilde{x}_{k/k-1}) \cdot \tilde{x}_{k/k-1}^T] = E[\hat{x}_{k/k-1} \cdot \tilde{x}_{k/k-1}^T] + E[\tilde{x}_{k/k-1} \cdot \tilde{x}_{k/k-1}^T] = E[\tilde{x}_{k/k-1} \cdot \tilde{x}_{k/k-1}^T],$$

tem-se:

$$E[x_k \cdot \tilde{y}_{k/k-1}^T] = E[x_k \cdot \tilde{x}_{k/k-1}^T] \cdot H^T + E[x_k \cdot v_k^T] \cdot G^T = E[\tilde{x}_{k/k-1} \cdot \tilde{x}_{k/k-1}^T] \cdot H^T = P_{k/k-1} \cdot H^T \quad (10.58)$$

onde:

$$P_{k/k-1} = E[\tilde{x}_{k/k-1} \cdot \tilde{x}_{k/k-1}^T] \quad (10.59)$$

2) Tome-se agora o cálculo de $E[\tilde{y}_{k/k-1} \cdot \tilde{y}_{k/k-1}^T]$:

Inicialmente, a partir das condições 10.52, que, dentre outros pontos, define que $v_k \perp x_k$,

conclui-se que $v_k \perp \hat{x}_{k/k-1}$, ou seja, $E[v_k \cdot \tilde{x}_{k/k-1}^T] = 0$.

Logo, da EQ. 10.57, tem-se:

$$\begin{aligned} E[\tilde{y}_{k/k-1} \cdot \tilde{y}_{k/k-1}^T] &= E[(H \cdot \tilde{x}_{k/k-1} + G \cdot v_k)(H \cdot \tilde{x}_{k/k-1} + G \cdot v_k)^T] = \\ &= H \cdot E[\tilde{x}_{k/k-1} \cdot \tilde{x}_{k/k-1}^T] \cdot H^T + G \cdot E[v_k \cdot v_k^T] \cdot G^T = \\ &= H \cdot P_{k/k-1} \cdot H^T + G \cdot Q_k \cdot G^T \end{aligned} \quad (10.60)$$

Pode-se, então, substituir a EQ. 10.60 e EQ. 10.58 na EQ. 10.56, obtendo-se:

$$\hat{\underline{x}}_{k/k} = \hat{\underline{x}}_{k/k-1} + P_{k/k-1} \cdot H^T \cdot (H \cdot P_{k/k-1} \cdot H^T + G \cdot Q_k \cdot G^T)^{-1} \cdot (\underline{y}_k - H \cdot \hat{\underline{x}}_{k/k-1}) \quad (10.61)$$

A EQ. 10.61 ainda não está na forma recursiva. A fim de obtê-la, deve-se relacionar $\hat{\underline{x}}_{k+1/k}$ com $\hat{\underline{x}}_{k/k}$. Para tanto, retomando a interpretação das estimativas como projeções de vetores no plano das observações, pode-se escrever:

Projeção de \underline{x}_{k+1} = (Projeção de $F_k \cdot \underline{x}_k$ em $S(Y_k)$) + (Projeção de $G_k \cdot \underline{w}_k$ em $S(Y_k)$)

Ou seja:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1/k} = F_k \hat{\underline{x}}_{k/k} + G_k \hat{\underline{w}}_{k/k} \quad (10.62)$$

Resta calcular o valor de $\hat{\underline{w}}_{k/k}$:

Como o ruído do modelo \underline{w}_k , neste caso, é correlacionado com o ruído de medida \underline{v}_k , ou seja, $E[\underline{w}_k \cdot \underline{v}_k^T] = S_k$, tem-se que \underline{w}_k não é necessariamente ortogonal a $S(Y_k)$. Conseqüentemente, $E[\underline{w}_k \cdot \underline{y}_{k-1}^T] = E[\underline{w}_k \cdot (N_k \cdot \underline{v}_k)^T] = E[\underline{w}_k \cdot \underline{v}_k^T] \cdot N_k^T = S_k \cdot N_k^T$. Desta forma, como \underline{w}_k é ortogonal a $S(Y_{k-1})$, a melhor estimativa de \underline{w}_k dado Y_k é igual à melhor estimativa dado $\tilde{\underline{y}}_{k/k-1}$ e pode-se escrever:

$$\hat{\underline{w}}_{k/k} = \text{Projeção de } \underline{w}_k \text{ em } \tilde{\underline{y}}_{k/k-1} \quad (10.63)$$

Assim, conforme o teorema 1, tem-se:

$$\hat{\underline{w}}_{k/k} = (E[\underline{w}_k \cdot \tilde{\underline{y}}_{k/k-1}^T]) (E[\tilde{\underline{y}}_{k/k-1} \cdot \tilde{\underline{y}}_{k/k-1}^T])^{-1} \cdot \tilde{\underline{y}}_{k/k-1} \quad (10.64)$$

Utilizando-se a EQ. 10.57, pode-se calcular $E[\underline{w}_k \cdot \tilde{\underline{y}}_{k/k-1}^T]$:

$$\begin{aligned} E[\underline{w}_k \cdot \tilde{\underline{y}}_{k/k-1}^T] &= E[\underline{w}_k \cdot (H \cdot \tilde{\underline{x}}_{k/k-1} + F \underline{v}_k)^T] = \\ &= E[\underline{w}_k \cdot \tilde{\underline{x}}_{k/k-1}^T] \cdot H^T + E[\underline{w}_k \cdot \underline{v}_k^T] \cdot F^T = \\ &= 0 + S_k \cdot F^T = \\ &= S_k \cdot F^T \end{aligned} \quad (10.65)$$

Desta forma, substituindo-se a EQ. 10.65 e a EQ. 10.60 na EQ. 10.64, obtém-se:

$$\hat{\underline{w}}_{k/k} = S_k \cdot F^T \cdot (H \cdot P_{k/k-1} \cdot H^T + G \cdot Q_k \cdot G^T)^{-1} \cdot \tilde{\underline{y}}_{k/k-1} \quad (10.66)$$

Substituindo-se, pois, a EQ. 10.61 e a EQ. 10.66 na EQ. 10.62, tem-se:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1/k} = F_k \hat{\underline{x}}_{k/k-1} + (F_k \cdot P_{k/k-1} \cdot H^T + G_k \cdot \hat{\underline{w}}_{k/k} \cdot F_k^T) (H \cdot P_{k/k-1} \cdot H^T + G \cdot Q_k \cdot G^T)^{-1} \cdot (\underline{y}_k - H \cdot \hat{\underline{x}}_{k/k-1}) \quad (10.67)$$

ou ainda:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1/k} = F_k \hat{\underline{x}}_{k/k-1} + K_k \cdot (\underline{y}_k - H \cdot \hat{\underline{x}}_{k/k-1}) \quad (10.68)$$

onde:

$$K_k = (F_k \cdot P_{k/k-1} \cdot H^T + G_k \cdot \hat{\underline{w}}_{k/k} \cdot F_k^T) (H \cdot P_{k/k-1} \cdot H^T + G_k \cdot Q_k \cdot G^T)^{-1} \quad (10.69)$$

é definido como o ganho.

Resta determinar uma fórmula recursiva para a matriz de covariância do erro de estimação,

$$P_{k+1/k} = E[\tilde{\underline{x}}_{k+1/k} \cdot \tilde{\underline{x}}_{k+1/k}^T].$$

Subtraindo-se a EQ. 10.68 de $\underline{x}_{k+1} = F_k \cdot \underline{x}_k + G_k \cdot \underline{w}_k$ e lembrando que $\underline{y}_k - H \cdot \hat{\underline{x}}_{k/k-1} = (H \cdot \underline{x}_k + N_k \cdot \underline{v}_k) - H \cdot \hat{\underline{x}}_{k/k-1} = H \cdot \tilde{\underline{x}}_{k/k-1} + N_k \cdot \underline{v}_k$, obtém-se:

$$\tilde{\underline{x}}_{k+1/k} = (F_k - K_k \cdot H) \tilde{\underline{x}}_{k/k-1} + G_k \cdot \underline{w}_k - K_k \cdot N_k \cdot \underline{v}_k \quad (10.70)$$

Desta forma, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} E[\tilde{\underline{x}}_{k+1/k} \cdot \tilde{\underline{x}}_{k+1/k}^T] &= (F_k - K_k \cdot H) E[\tilde{\underline{x}}_{k/k-1} \cdot \tilde{\underline{x}}_{k/k-1}^T] (F_k - K_k \cdot H)^T + G_k \cdot E[\underline{w}_k \cdot \underline{w}_k^T] \cdot G_k^T - \\ &\quad - K_k \cdot N_k \cdot E[\underline{v}_k \cdot \underline{v}_k^T] \cdot N_k^T \cdot K_k^T - G_k \cdot E[\underline{w}_k \cdot \underline{v}_k^T] \cdot F_k^T \cdot K_k^T - \\ &\quad - K_k \cdot N_k \cdot E[\underline{v}_k \cdot \underline{w}_k^T] \cdot G_k^T \end{aligned} \quad (10.71)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} P_{k+1/k} &= (F_k - K_k \cdot H) P_{k+1/k} (F_k - K_k \cdot H)^T + G_k \cdot R_k \cdot G_k^T - K_k \cdot N_k \cdot Q_k \cdot N_k^T \cdot K_k^T - \\ &\quad - G_k \cdot S_k \cdot F_k^T \cdot K_k^T - K_k \cdot N_k \cdot S_k^T \cdot G_k^T \end{aligned} \quad (10.73)$$

As equações do Filtro de Kalman, para o sistema modelado segundo a EQ. 10.51 e 10.52, considerando ruídos de medida e de modelagem correlacionados, que foi o caso do problema tratado neste trabalho, são as seguintes:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1/k} = F_k \hat{\underline{x}}_{k/k-1} + K_k \cdot (\underline{y}_k - H \cdot \hat{\underline{x}}_{k/k-1}) \quad (10.74)$$

$$K_k = (F_k \cdot P_{k/k-1} \cdot H^T + G_k \cdot \hat{\underline{w}}_{k/k} \cdot F_k^T) (H \cdot P_{k/k-1} \cdot H^T + G_k \cdot Q_k \cdot G^T)^{-1} \quad (10.75)$$

$$\begin{aligned} P_{k+1/k} &= (F_k - K_k \cdot H) P_{k+1/k} (F_k - K_k \cdot H)^T + G_k \cdot R_k \cdot G_k^T - K_k \cdot N_k \cdot Q_k \cdot N_k^T \cdot K_k^T - \\ &\quad - G_k \cdot S_k \cdot F_k^T \cdot K_k^T - K_k \cdot N_k \cdot S_k^T \cdot G_k^T \end{aligned} \quad (10.76)$$

10.1.2.4.4.1.4. FILTRO DE KALMAN PARA SISTEMAS COM ENTRADAS DETERMINÍSTICAS

Seja agora o sistema:

$$\underline{x}_{k+1} = F_k \cdot \underline{x}_k + B_k \cdot \underline{u}_k + G_k \cdot \underline{w}_k \quad (10.77)$$

$$\underline{y}_k = H_k \cdot \underline{x}_k + N_k \cdot \underline{v}_k \quad (10.78)$$

com \underline{u}_k representando uma entrada determinística.

Uma vez que a única diferença entre as EQ. 10.77 e 10.78 e as equações 10.51 foi a entrada determinística \underline{u}_k , pode-se afirmar que haverá alteração na equação da expectância, ou seja, do valor esperado, mas não haverá alteração na covariância do erro de estimação, e, portanto, as equações de K_k e $P_{k+1/k}$ não se alteram.

Desta forma, as equações do Filtro de Kalman para um sistema modelado segundo as EQ. 10.77 e 10.78 são as seguintes:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1/k} = F_k \hat{\underline{x}}_{k/k-1} + B_k \underline{u}_k + K_k \cdot (\underline{y}_k - H_k \hat{\underline{x}}_{k/k-1}) \quad (10.79)$$

$$K_k = (F_k \cdot P_{k/k-1} \cdot H^T + G_k \cdot \hat{\underline{w}}_{k/k} \cdot F_k^T) (H \cdot P_{k/k-1} \cdot H^T + G \cdot Q_k \cdot G^T)^{-1} \quad (10.80)$$

$$P_{k+1/k} = (F_k - K_k \cdot H) \cdot P_{k+1/k} \cdot (F_k - K_k \cdot H)^T + G_k \cdot R_k \cdot G_k^T - K_k \cdot N_k \cdot Q_k \cdot N_k^T \cdot K_k^T - G_k \cdot S_k \cdot F_k^T \cdot K_k^T - K_k \cdot N_k \cdot S_k^T \cdot G_k^T \quad (10.81)$$

10.2. APÊNDICE 2: LEMA DA INVERSÃO MATRICIAL

$$A^{-1} = B^{-1} + C^T \cdot D^{-1} \cdot C \quad (10.82)$$

$$\Rightarrow A = B - B \cdot C^T \cdot (C \cdot B \cdot C^T + D)^{-1} \cdot C \cdot B \quad (10.83)$$

De fato, pós-multiplicando-se a EQ. 10.82 por A, tem-se:

$$1 = A \cdot B^{-1} + A \cdot C^T \cdot D^{-1} \cdot C$$

Pos-multiplicando-se por B, obtém-se:

$$B = A + A \cdot C^T \cdot D^{-1} \cdot C \cdot B \quad (10.84)$$

Pos-multiplicando-se por C^T , chega-se a:

$$B \cdot C^T = A \cdot C^T + A \cdot C^T \cdot D^{-1} \cdot C \cdot B \cdot C^T = A \cdot C^T \cdot D^{-1} \cdot [D + C \cdot B \cdot C^T]$$

Posmultiplicando por $[D+CBC^T]^{-1}$, tem-se:

$$B.C^T . [D + C.B.C^T]^{-1} = A.C^T .D^{-1}$$

Posmultiplicando por CB , resulta:

$$A.C^T .D^{-1} .C.B = B.C^T . [D + C.B.C^T]^{-1} .C.B \quad (10.85)$$

Subtraindo-se a EQ. 10.85 de B , obtém-se:

$$B - A.C^T .D^{-1} .C.B = B - B.C^T . [D + C.B.C^T]^{-1} .C.B \quad (10.86)$$

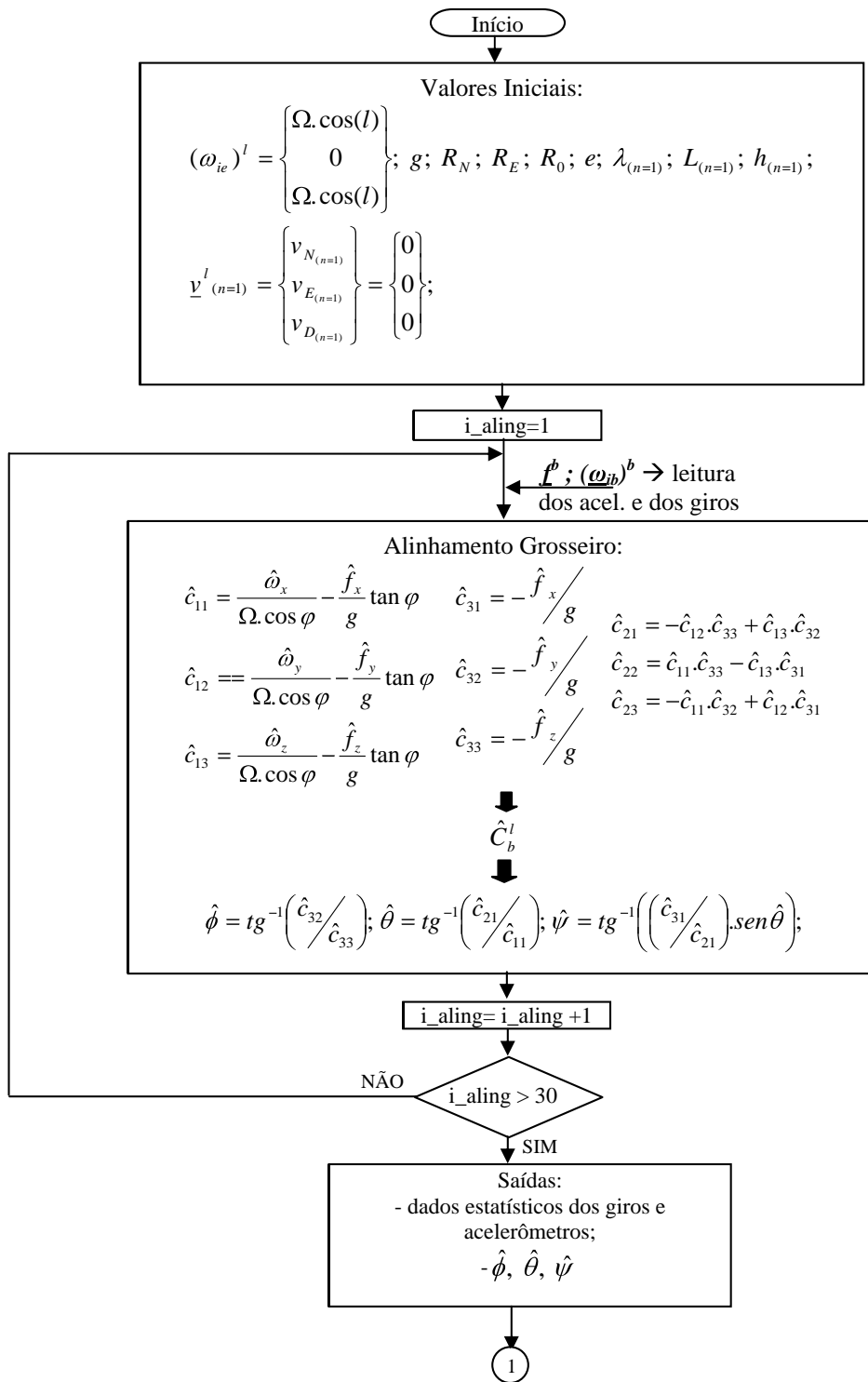
Substituindo-se a EQ. 10.84 na parte esquerda da EQ. 10.86, chega-se, finalmente, a:

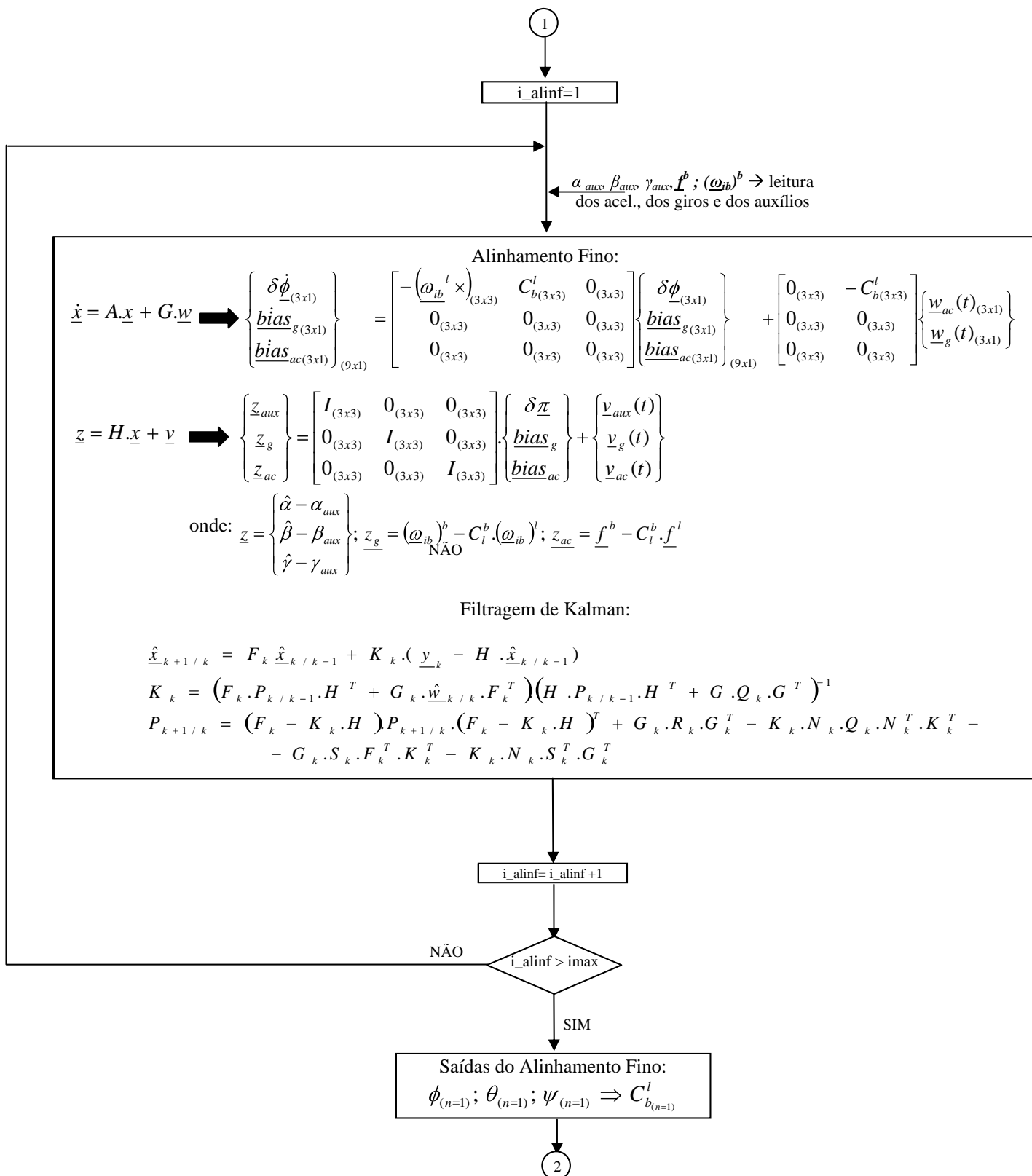
$$A = B - B.C^T . [D + C.B.C^T]^{-1} .C.B$$

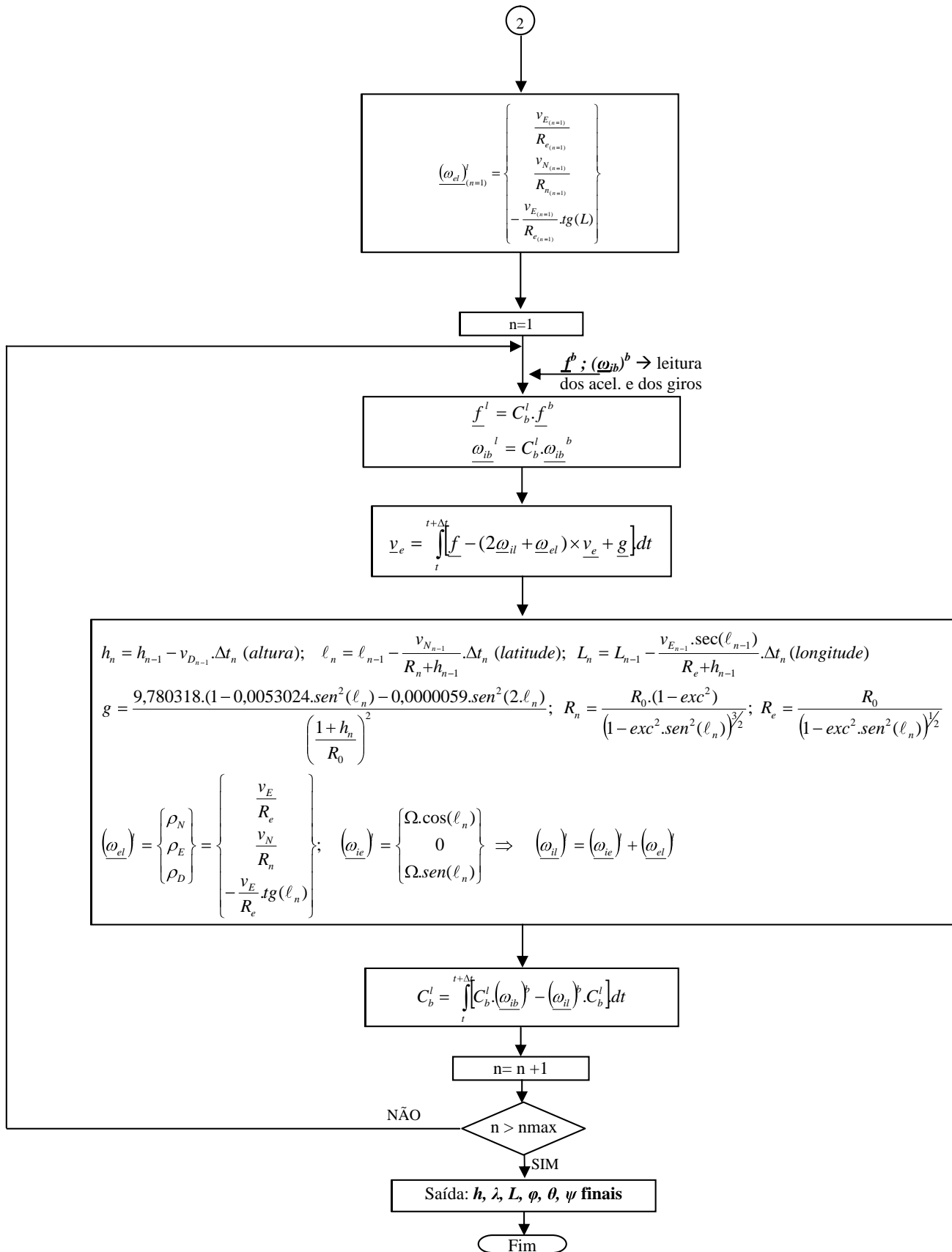
11.

ANEXO

FLUXOGRAMA DOS ALGORITMOS DE ALINHAMENTO, NAVEGAÇÃO E ATITUDE







This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.