

MATEMÁTICA

CG

1ª QUESTÃO Valor 1,0

Demonstre que a dízima periódica $0,XYZYZYZ \dots$, onde X, Y e Z são algarismos distintos, pode ser representada pela fração $\frac{99X+10Y+Z}{990}$.

2ª QUESTÃO Valor 1,0

Considere $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$. Determine o número de subconjuntos H de A tais que as condições:

- a) H tem 6 elementos;
 - b) $8 \in H$;
 - c) exatamente dois elementos maiores que 8 pertencem a H ;
- sejam simultaneamente satisfeitas.

3ª QUESTÃO Valor 1,0

Considere os números complexos z tais que, $|z + 1/z| = 1$. Determine o valor máximo do módulo de z .

4ª QUESTÃO Valor 1,0

Considere as matrizes reais 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \varphi(a) & \varphi(b) \\ \varphi(c) & \varphi(d) \end{bmatrix}$$

onde φ é uma permutação de $\{a, b, c, d\}$.

Determine as permutações para as quais:

- $\det B = \det A$;
- $\det B = -\det A$.

Considere que os valores de a, b, c e d são genéricos.

5ª QUESTÃO Valor 1,0

Considere as equações polinomiais:

$$P_1(x) = x^4 - \frac{35}{6}x^3 + \frac{62}{6}x^2 - \frac{35}{6}x + 1$$

e

$$P_2(y) = ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e$$

onde: $y = 6x + 4$

Determine as raízes de $P_2(x)$ sabendo que uma das raízes de $P_1(x)$ é igual a 2.

6ª QUESTÃO Valor 1,0

Sabe-se que a curva que representa uma função polinomial do 3º grau, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, passa pelos pontos $P_1(-2,0)$, $P_2(-1,7)$, $P_3(0,2)$ e $P_4(1,-9)$. Determine:

- a) os coeficientes do polinômio;
- b) as raízes do polinômio;
- c) os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão da curva que representa o polinômio.

7ª QUESTÃO Valor 1,0

Para atender a exigências aerodinâmicas, o contorno da seção transversal da asa de um planador, referenciado ao sistema de eixos esboçado a seguir, está definido pelas equações: $y = -x^2 + 6x - 3$ e $y = x^2 - 2x + 3$. Determine a área da seção transversal da asa do planador.

Y

X

8ª QUESTÃO Valor 1,0

Determine o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes simultaneamente às duas circunferências descritas pelas equações:

$$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1$$

Obs: considere todos os casos possíveis.

9ª QUESTÃO Valor 1,0

Uma esfera está inscrita num octaedro regular de aresta a . Determine, em função de a , o volume interior ao octaedro e exterior à esfera.

10ª QUESTÃO Valor 1,0

Três círculos C , C' e C'' , de mesmo raio, se tangenciam exteriormente dois a dois. O círculo que tangencia exteriormente C , C' e C'' tem raio q e o círculo que tangencia interiormente C , C' e C'' tem raio p . Se r for o raio do círculo inscrito no triângulo

formado pelos centros de C , C' e C'' , demonstre que: $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{4}{r}$.