1ª QUESTÃO Ulrao **Valor: 1,0**

Calcule o número natural n que torna o determinante abaixo igual a 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

2ª QUESTÃO Ulrao **Valor: 1,0**

Considere o polinômio $P(x) = x^3 + ax + b$ de coeficientes reais, com $b \neq 0$. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que $a < 0$.

3ª QUESTÃO Ulrao **Valor: 1,0**

Considere uma pirâmide regular de altura h, cuja base é um hexágono $ABCDEF$ de lado a. Um plano perpendicular à base e contendo os pontos médios das arestas AB e BC divide a pirâmide em dois poliedros. Calcule o razão entre os volumes destes dois poliedros.

4ª QUESTÃO Ulrao **Valor: 1,0**

Calcule $\operatorname{sen}(x+y)$ em função de a e b, sabendo que o produto $ab \neq 0$, que $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a$ e que $\cos x + \cos y = b$.

5ª QUESTÃO Ulrao **Valor: 1,0**

Seja uma função $f: \Re - \{0\} \rightarrow \Re$, onde $\Re$ representa o conjunto dos números reais, tal que $f(a/b) = f(a) - f(b)$ para a e b pertencentes ao domínio de f. Demonstre que f é uma função par.

6ª QUESTÃO Ulrao **Valor: 1,0**

Sendo a, b e c números naturais em progressão aritmética e z um número complexo de módulo unitário, determine um valor para cada um dos números a, b, c e z de forma que eles satisfaçam a igualdade:

$$\frac{1}{z^a} + \frac{1}{z^b} + \frac{1}{z^c} = z^9$$

7ª QUESTÃO Ulrao. **Valor: 1,0**

Considere a parábola P de equação $y = ax^2$, com $a > 0$ e um ponto A de coordenadas (x_0, y_0) satisfazendo a $y_0 < a x_0^2$. Seja S a área do triângulo ATT', onde T e T' são os pontos de contato das tangentes a P passando por A.

a. Calcule o valor da área S em função de a, x_0 e y_0.
b. Calcule a equação do lugar geométrico do ponto A, admitindo que a área S seja constante.
c. Identifique a cônica representada pela equação obtida no item anterior.

8ª QUESTÃO Ulrao **Valor: 1,0**

Demonstre que o número $\underbrace{11\ldots1}_{(n-1)\text{ vezes}}\underbrace{222\ldots2}_{n\text{ vezes}}5$ é um quadrado perfeito.

9ª QUESTÃO Ulrao **Valor: 1,0**

Ao final de um campeonato de futebol, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os outros adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

10ª QUESTÃO Wono **Valor: 1,0**

Um quadrilátero convexo ABCD está inscrito em um círculo de diâmetro d. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = a$, $\overline{AD} = d$ e $\overline{CD} = b$, com a, b e d diferentes de zero.

a. Demonstre que $d^2 = bd + 2a^2$.

b. Se a, b e d são números inteiros e a é diferente de b, mostre que d não pode ser primo.